

01;03;04

Распространение ударных волн в среде с рэлеевским механизмом энерговыделения

© Н.А. Герасимов,¹ В.В. Кучинский,² В.С. Сухомлинов,¹ С.В. Сухомлинов¹

¹ Научно-исследовательский институт физики Санкт-Петербургского государственного университета, 198903 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: sukhomlinov@pobox.ru

² Научно-исследовательское предприятие гиперзвуковых систем, 196066 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: ajax@peterstar.ru

(Поступило в Редакцию 2 марта 2006 г. В окончательной редакции 1 сентября 2006 г.)

В общем случае в одномерном приближении рассмотрено влияние известного рэлеевского механизма энерговыделения в упругой среде, играющего важную роль, в частности, в плазме газового разряда, на структуру бегущей ударной волны (УВ). Получено уравнение распространения УВ для этого случая. Найдено аналитическое решение уравнения для малых значений параметра, характеризующего свойства среды. Проанализирован характер решения при разных знаках этого параметра и его значениях по модулю порядка единицы. Обнаружено, что при положительных значениях этого параметра УВ в виде „ступеньки“ в такой среде ослабляется и вырождается в возмущение в виде одиночного горба. При отрицательных значениях напротив, УВ усиливается. Установлено, что для наличия стационарного решения в системе координат, связанной с волной распространения УВ в среде с рэлеевским механизмом энерговыделения, необходимо наличие границы среды вниз по потоку от ударного слоя. Ее положение соответствует так называемому „критическому“ энергоподводу, и в этой точке местное число Маха равно единице. При положительном значении параметра среды с рэлеевским энерговыделением существует его предельное значение, при превышении которого уравнение распространения не имеет стационарного решения ни при каком положении границы среды вверх по потоку от ударного слоя. Полученные результаты позволяют перейти к анализу особенностей распространения УВ в слабоионизованной плазме газового разряда.

PACS: 47.40.Nm

Введение

В работе [1] Рэлей рассмотрел так называемый „рэлеевский“ [2] механизм влияния специфических свойств упругой среды на процесс распространения в ней акустических волн. Суть его заключается в том, что если первоначально однородная упругая среда обладает тем свойством, что при возникновении в этой среде области с повышенной плотностью в ней будет происходить дополнительное выделение тепла, то в такой среде упругие волны малой амплитуды будут усиливаться [1,3]. Если же происходит поглощение тепла, то волны будут ослабляться. В работах [2–4] было показано, что основным механизмом взаимодействия акустических волн с низкотемпературной плазмой газового разряда и является рэлеевский механизм. Вполне ясно, что независимо от природы возникновения и величины упругого возмущения наличие рэлеевского механизма будет оказывать влияние на динамику этого возмущения, в том числе и на ударных волнах (УВ).

Проблема распространения упругих волн, как звуковых, так и ударных, в плазме самостоятельного газового разряда в последнее время привлекает пристальное внимание исследователей. Это связано, в первую очередь, с важным прикладным значением этого фундаментального физического явления. Известны попытки использования слабоионизованной плазмы для создания альтернатив-

ных акустическим динамикам мощных источников звука [5,6]. Взаимодействие УВ с газоразрядной плазмой изучалось экспериментально и теоретически многими авторами [7–10]. Актуальность подобных работ обусловлена попытками разработки нетрадиционных методов оптимизации аэродинамических характеристик летальных аппаратов — снижения лобового сопротивления, увеличения подъемной силы и т.д. В результате большого числа исследований были выявлены различные аномалии при сверхзвуковом полете тел различной формы в слабоионизованной плазме атомарных и молекулярных газов [11,12]. В других работах при исследовании распространения бегущих УВ в газовом разряде также наблюдались значительные изменения структуры УВ [13,14].

В настоящее время в литературе интенсивно обсуждается вопрос о том, как наличие электрического поля и слабой ионизации газа влияет на структуру УВ. В этом вопросе у исследователей нет единого мнения. В одних работах утверждается, что влияние плазмы ограничивается лишь изменениями УВ при прохождении тепловой ямы [15,16], в других — что существуют так называемые „специфические механизмы“ влияния плазмы на структуру УВ [17,18]. Процесс распространения УВ в плазме теоретически подробно рассматривался в работе [19]. Однако основное внимание было уделено сравнительно сильным УВ с числом Маха более пяти.

Кроме того, авторы данной монографии рассматривали в основном полностью ионизованную плазму, или плазму со сравнительно высокой степенью ионизации (более 10^{-3}). В то же время для прикладных задач, например в аэродинамике, весьма интересна слабоионизованная плазма (степень ионизации менее 10^{-5}), а также слабые УВ. Следует отметить, что плазма самостоятельного газового разряда — не единственный пример среды с рэлеевским механизмом энерговыделения. Другим таким примером может служить газовая среда, в которой происходят химические реакции с выделением (поглощением) тепла.

В настоящей работе мы будем исследовать проблему в общем виде. Результаты этого общего рассмотрения позволяют, в частности, выяснить физическую сущность вышеупомянутых „плазменных механизмов“. Кроме того, как мы увидим, влияние этих механизмов и не могло быть обнаружено в условиях экспериментальных работ [8,9,11,13,18].

Вывод основных уравнений и их решение

В соответствии с поставленной задачей предположим, что однородный идеальный газ с плотностью ρ_1 и температурой T_1 обладает следующим свойством. Если в некотором элементе объема dV плотность газа по некоторым причинам стала равна $\rho \neq \rho_1$, то в этом элементе объема в единицу времени выделяется (поглощается) энергия

$$\left. \frac{\partial Q(\rho)}{\partial \rho} \right|_{\rho=\rho_1} (\rho - \rho_1) dV = \bar{Q}(\rho_1) (\rho - \rho_1) dV, \quad (1)$$

где функция $\bar{Q}(\rho_1)$ зависит только от плотности газа. Конкретный вид этой функции определяется свойствами данной газовой среды. Отметим, что величина $\bar{Q}(\rho)$ может быть как положительной, так и отрицательной, что соответствует, очевидно, случаям выделения и поглощения тепла при повышении плотности. Будем сохранять обозначения, принятые в работах [20,21], где решалась задача о структуре УВ в газе при наличии в области ударного слоя источника тепловыделения (поглощения) произвольной пространственной формы, который неподвижен в системе координат, связанной с волной. Легко видеть, что наша задача вполне аналогична этой. Действительно, при наличии в газе бегущей УВ сжатие в этой волне приводит к увеличению плотности, что в силу рэлеевского механизма вызывает дополнительное энерговыделение или поглощение в зависимости от знака величины $\bar{Q}(\rho_1)$. При этом ясно, что этот источник тепла неподвижен в системе координат, связанной с волной. Рассмотрим одномерную постановку задачи. Поскольку искомое уравнение распространения мы будем записывать для массовой скорости v , то перепишем формулу (1) в следующем виде:

$$\bar{Q}(\rho - \rho_1) = \bar{Q}\rho_1 \frac{1 - \bar{v}}{\bar{v}}, \quad (2)$$

где $\bar{v} = v/v_1$, v_1 — массовая скорость в лабораторной системе координат в невозмущенной области. Здесь и в дальнейшем мы будем опускать аргумент функции $\bar{Q}(\rho_1)$. При получении (2) мы использовали закон сохранения массы вещества. Подобно тому как это сделано в работе [21], перейдем в систему координат, связанную с бегущей УВ, и предположим, что среда, обладающая рэлеевским механизмом, занимает область пространства $\xi_1 < \xi < \xi_2$, где $\xi = x - Wt$, x — координата в лабораторной системе координат, вдоль которой распространяется УВ; W — скорость УВ; t — время. Таким образом, область с рэлеевским механизмом энерговыделения протяженностью $\xi_2 - \xi_1$ неподвижна в системе координат, связанной с УВ. Это, очевидно, является необходимым (но не достаточным) условием существования стационарного решения для профиля УВ. Как будет видно в дальнейшем, стационарное решение поставленной задачи возможно не при всех значениях ξ_1 . В работе [21] было получено, что в системе координат, связанной с волной, стационарный профиль УВ описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением:

$$\frac{1}{M} \bar{v} \bar{v}_y = (1 - \bar{v})(\bar{v} - v_{20}) - \frac{h(y)}{M}, \quad (3)$$

где

$$v_{20} = \frac{2 + (\gamma - 1)M^2}{(\gamma + 1)M^2}; \quad y = \frac{3(\gamma + 1)\rho_1 a_1}{8\gamma\mu} \xi; \quad \bar{v}_y = \frac{d\bar{v}}{dy}. \quad (3a)$$

Будем считать, что $y_2 = \frac{3(\gamma+1)\rho_1 a_1 \xi_2}{8\gamma\mu} \sim \frac{\xi_2}{\lambda} \gg 1$, где λ — длина пробега молекул (атомов) газа относительно упругих столкновений. Учитывая, что возмущение в УВ экспоненциально убывает вверх по потоку от ударного слоя, будем в дальнейшем полагать, что $y_2 \rightarrow \infty$. В формулах (3), (3a) M, a_1 — число Маха и скорость звука в невозмущенной области, μ — динамическая вязкость газа. Безразмерная величина $h(y)$ определяется следующим образом [21]:

$$h(y) = \frac{2(\gamma - 1)\Delta E(y)}{(\gamma + 1)\rho_1 a_1^3 M^2}, \quad (3b)$$

$$\Delta E(y) = \frac{8\gamma\mu}{3(\gamma + 1)\rho_1 a_1} \left\{ \int_y^\infty Q(y') dy' + \exp\left(-\frac{2\gamma}{\gamma + 1}y\right) \int_{-\infty}^y Q(y') \exp\left(\frac{2\gamma}{\gamma + 1}y'\right) dy' \right\}, \quad (3в)$$

где $Q(y)$ — объемная плотность энерговыделения в единицу времени. Подставив (2) в (3) и используя (3b) и (3в), можно получить нелинейное дифференциальное уравнение, которое описывает структуру УВ в среде с рэлеевским механизмом энерговыделения

$$\frac{(M^2 - 1)}{2\gamma\beta M^2} \exp(-az) \frac{d}{dz} \left\{ \exp(az) \frac{d}{dz} \left[\varphi(2 - \varphi) + \left(1 - \frac{\alpha\varphi}{2}\right) \varphi_z \right] \right\} + \frac{\varphi}{(1 - \frac{\alpha\varphi}{2})} = 0 \quad (4)$$

при $\varphi, \varphi_z, \varphi_{zz} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} 0$, где

$$b_0 = \frac{16\gamma(\gamma - 1)\bar{Q}\mu}{3(\gamma + 1)^2 M^3 \rho_1^2 a_1^4}; \quad \phi(z) = \frac{2}{\alpha} [1 - \nu(z)]; \quad z = \frac{M\alpha y}{2},$$

$$\beta = \frac{16\gamma(\gamma - 1)\mu\bar{Q}}{3\rho_1^2 a_1^4 (M^2 - 1)^2}$$

— параметр энерговыделения; $a = \frac{2\gamma M^2}{(M^2 - 1)}$, $\alpha = 1 - \nu_{20}$.

Уравнение (4) является искомым дифференциальным уравнением распространения УВ в среде с рэлеевским механизмом энерговыделения. Для слабых УВ (т.е. при $M - 1, \alpha \ll 1$) это уравнение можно свести к более простому дифференциальному уравнению второго порядка

$$\varphi_{zz} = 2\varphi_z(\varphi - 1) - \beta\varphi. \quad (5)$$

Следует иметь в виду, что область применимости уравнения (5) ограничивается условием

$$\varphi(z) \sim 1. \quad (5a)$$

Для решения и дальнейшего исследования свойств решения уравнения (5) удобно это уравнение записать в переменных

$$V = \int_z^\infty \varphi(z') dz'; \quad P(V) = \varphi(z).$$

Используя выражение (5), получим уравнение распространения слабых УВ в среде с рэлеевским механизмом энерговыделения в виде

$$P'P + P^2 - 2P + \beta V = 0. \quad (6)$$

Граничные условия для функции $P(V)$ выглядят следующим образом:

$$P(0) = 0.$$

Как известно, уравнение (6) не имеет аналитического решения в общем случае [22]. Тем не менее возможно нахождение его приближенного решения при малых параметрах β . Как будет показано в дальнейшем, именно малые значения этого параметра представляют практический интерес в случае слабоионизованной плазмы газового разряда. При этом оказывается, что нельзя для этой цели воспользоваться методами обычной теории возмущений. Дело в том, что как бы ни был мал параметр β , существует область значений независимой переменной, в которой отличие функций $P_0(V)$ и $P(V, \beta)$ порядка функции $P_0(V)$ (рис. 1). Как известно, в таком случае регулярная теория возмущений неприменима и его приближенное решение должно строиться с помощью теории сингулярных возмущений [23]. Расчеты показывают, что при параметрах $|\beta| < 0.1$ для расчетов структуры УВ в области экстремума и ударного слоя вполне достаточно нулевого приближения теории сингулярных возмущений. Применив результаты

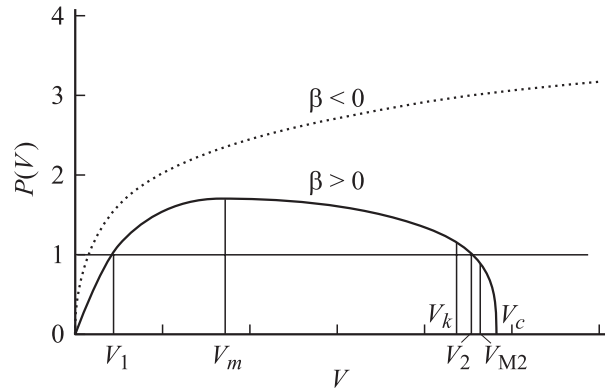


Рис. 1. Качественная зависимость $P(V)$ при отрицательных и положительных β .

этой теории [23], можно получить (см. Приложение 1) трансцендентное уравнение для нулевого приближения решения уравнения (6) $P^0(V)$:

$$F_1(P^0, V) = F_2(P^0, V),$$

$$F_1(P^0, V) = |P^{0^2} - \sqrt{2P^0} + \beta V|,$$

$$F_2(P^0, V) = \beta V$$

$$\times \exp \left\{ 2 \frac{(1 + \sqrt{1 - \beta V}) \left[2 \ln \left(\frac{1 + \sqrt{1 - \beta V}}{2} \right) + 2(1 - \sqrt{1 - \beta V}) - \beta V \right]}{\beta \sqrt{1 - \beta V}} \right\}$$

$$\times \frac{[|1 + \sqrt{1 - \beta V}|]^{\frac{1}{\sqrt{1 - \beta V}}}}{[|-1 + \sqrt{1 - \beta V}|]^{\frac{1}{\sqrt{1 - \beta V}}}} \frac{[|P^0 - 1 - \sqrt{1 - \beta V}|]^{\frac{-1}{\sqrt{1 - \beta V}}}}{[|P^0 - 1 + \sqrt{1 - \beta V}|]^{\frac{-1}{\sqrt{1 - \beta V}}}}. \quad (7)$$

Качественный вид решения (7) соответствует представленному на рис. 1, откуда следует, в свою очередь, что функция $\varphi(z)$ имеет вид, показанный на рис. 2.

Для проверки полученного решения были разработаны численные методы решения уравнений (5) и (6) (см. Приложение 2).

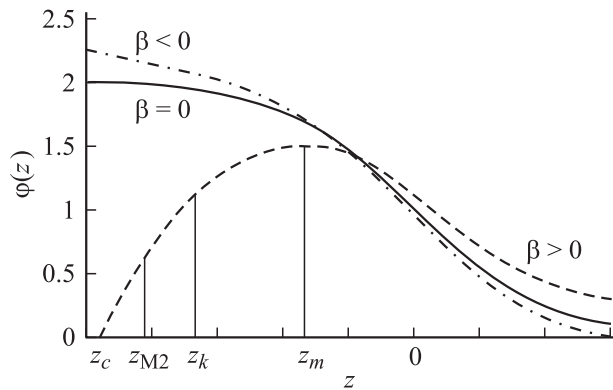


Рис. 2. Качественная зависимость функции $\varphi(z)$.

Обсуждение полученных результатов

Рассмотрим сначала случай $\beta > 0$, т.е. ситуацию, когда при увеличении плотности среды в ней локально возрастает энерговыделение. Исследуем физические механизмы формирования структуры УВ, подобной представленной на рис. 2. На бесконечности вверх по потоку от ударного слоя асимптотическое значение массовой скорости равно невозмущенному (т.е. $\varphi(z) = 0$). По мере приближения к ударному слою из-за сжатия в УВ растет плотность газа, что приводит к дополнительному энерговыделению в этой области. Поскольку течение перед УВ сверхзвуковое, то согласно [24], это приводит к дополнительному замедлению потока и уменьшению местного числа Маха. Сказанное означает, что функция $\varphi(z)$ при $\beta > 0$ превосходит соответствующее значение при $\beta = 0$ (см. рис. 2). Кроме того, из этих рассуждений ясно, что звуковая точка (т.е. значение координаты, где местное число Маха из-за торможения потока первый раз проходит значение, равное единице) при $\beta > 0$ смещается вверх по потоку относительно этой точки при $\beta = 0$. В переменных $P(V)$, V сказанное означает, что $V_{M1}(\beta > 0) > V_M(\beta = 0)$ (рис. 3).

После того как местное число Маха становится меньше единицы, воздействие дополнительного энерговыделения в рэлеевской среде на поток изменяет знак. Действительно, как известно, внешний энерговыделитель в дозвуковой поток приводит к ускорению потока и росту числа Маха [24]. Однако сжатие в ударной волне способствует тому, что еще на некотором пространственном промежутке сохраняется тенденция уменьшения числа Маха (рис. 4). Поскольку по мере удаления от ударного слоя рост сжатия в ударной волне останавливается, а суммарный энергоподвод, определяемый интегральным отклонением плотности от невозмущенного значения, продолжает расти, то начиная с некоторого момента, тенденция роста местного числа Маха и массовой скорости начинает преобладать (рис. 4). Пределом изменения местного числа Маха при одностороннем (т.е. без смены знака) воздействии является достижение единицы [24].

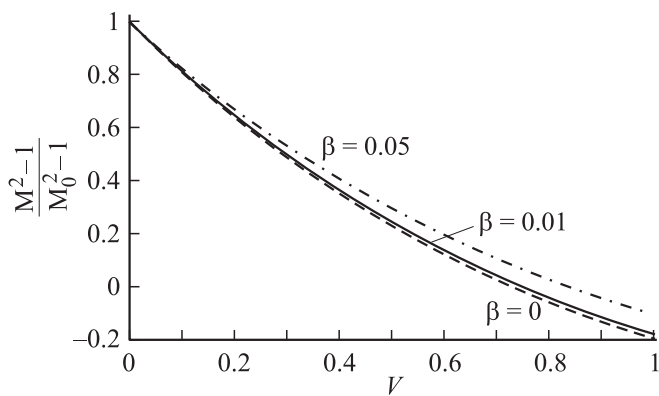


Рис. 3. Зависимость величины $\frac{M^2(V)-1}{M_0^2-1}$ при малых V значениях параметра β , $M_0 = 1.1$.

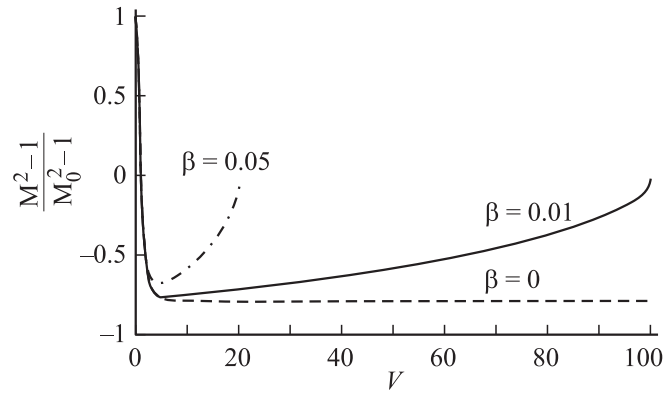


Рис. 4. То же, что на рис. 3, в более широком диапазоне значений β .

Можно показать, что если левая граница рэлеевской среды $z_1 < z_{M2}$, где $M(z_{M2}) = 1$, то физически осмысленного решения задачи о стационарной структуре УВ в рэлеевской среде не существует. Действительно, рассмотрим часть кривой $M(V)$ на промежутке $V_{M2} < V < V_c$ (или $z_{M2} < z < z_c$, где $V_c = \int_{z_c}^{\infty} \varphi(z) dz$, $V_{M2} = \int_{z_{M2}}^{\infty} \varphi(z) dz$).

Согласно вышесказанному, на этом промежутке течение уже сверхзвуковое и $\varphi(z) > 0$, т.е. плотность по-прежнему превышает равновесную, что при $\beta > 0$ приводит к дополнительному энерговыделению. Но, как уже говорилось, внешний энергоподвод в сверхзвуковое течение уменьшает скорость (увеличивает $P(V)$) и местное число Маха. Как видно из рис. 5, 6, наблюдается противоположная тенденция вплоть до значения $V = V_c$, что не имеет физического смысла. Таким образом, мы приходим к важному выводу, что при условии $z_1 < z_{M2}$ и любом сколь угодно малом $\beta > 0$ не существует стационарного решения о структуре УВ в рэлеевской среде, движущейся вместе с УВ. Физически это связано с законом обратных воздействий, а явление носит название теплового кризиса течения [24].

Из результатов, представленных на рис. 3, видно, что при увеличении положительной величины β происходит уменьшение максимального значения функции $\varphi(z)$ (увеличение минимальной массовой скорости), т.е. УВ ослабляется и ширина ударного слоя растет. Кроме того, из этих же данных следует, что при этом уменьшается значение V_{M2} (увеличивается значение z_{M2}). Таким образом, в рассматриваемых условиях при $\beta > 0$ УВ в виде „ступеньки“ ослабляется и вырождается в кривую в форме „одиночного горба“, ширина которого уменьшается при увеличении параметра $\beta > 0$.

На рис. 6 представлены результаты расчетов величины $\frac{M^2(V)-1}{M_0^2-1}$ при $\beta = 0.01$ для различных чисел Маха M_0 . Видно, что при увеличении начального числа Маха и фиксированном параметре β деформация структуры УВ,

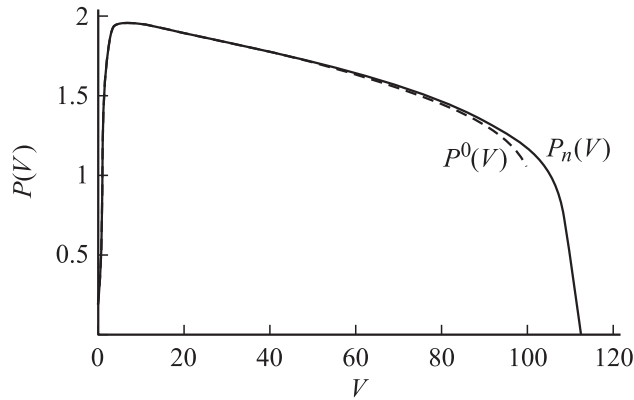


Рис. 5. Сравнение численного решения уравнения (13) — $P_n(V)$ и решения, рассчитанного по формуле (7), — $P^0(V)$; $\beta = 0.01$.

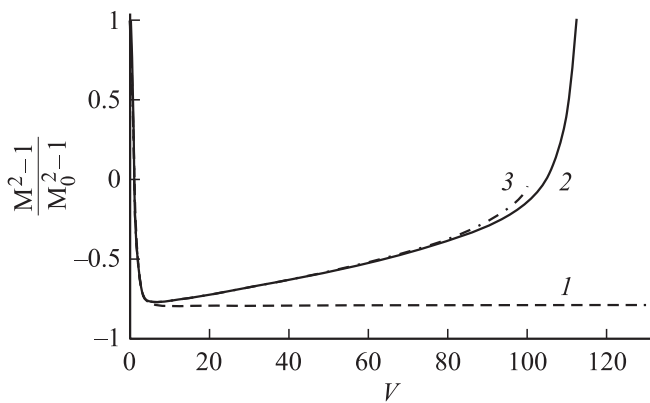


Рис. 6. Сравнение численных расчетов величины $\frac{M^2(V)-1}{M_0^2-1}$ с расчетами, выполненными с использованием формул (7) при $\beta = 0.01$; 1 — точное решение при $\beta = 0$; 2 — численные расчеты; 3 — расчеты по формуле (7).

вызванной рэлеевским механизмом, уменьшается. Можно показать, что при $\beta \geq 0.66$ стационарного решения не существует.

Совершенно аналогичным образом можно проанализировать физические причины изменения структуры УВ при $\beta < 0$. В этом случае увеличение плотности рэлеевской среды относительно равновесного значения приводит, наоборот, к поглощению энергии. Как известно, отвод энергии в сверхзвуковом потоке вызывает рост массовой скорости и местного числа Маха [24]. Тем не менее сжатие перед УВ преобладает, и по мере приближения к ударному слою местное число Маха падает (рис. 7). В этом случае, очевидно, что точка z_{M1} смещается вниз по потоку относительно своего положения при $\beta = 0$. После перехода через точку z_{M1} течение становится дозвуковым. Известно, что отвод энергии приводит к замедлению потока и уменьшению числа Маха [24], так что в рассматриваемой ситуации скорость потока за фронтом УВ начинает уменьшаться.

Вышеприведенные рассуждения иллюстрируются расчетами, представленными на рис. 8. По мере уменьшения массовой скорости в дозвуковой области течения будет происходить увеличение плотности и давления газа. Это непосредственно следует из уравнения неразрывности. Вместе с этим будет происходить нарастающее теплопоглощение в газе ($\beta < 0$), и процесс будет ускоряться. Очевидно, что полая остановка газа невозможна из-за закона сохранения массы. Отсюда следует, что в рэлеевской среде должна существовать левая граница, иначе при $\beta < 0$ стационарного решения о структуре УВ не существует. К сожалению, использованная нами модель не позволяет более подробно проанализировать поведение течения и его дальнейшую эволюцию вблизи точки максимального замедления.

На основании проделанного анализа можно заключить, что в рэлеевской среде при $\beta < 0$ УВ в виде „ступеньки“ усиливается. Интересно отметить, что влияние рэлеевского механизма на УВ прямо противоположно влиянию на акустические волны [2,3].

В данной работе мы ограничились рассмотрением динамики УВ в среде с рэлеевским механизмом энерговыделения в общем виде. В следующей работе мы применим полученные результаты к случаю низкотемпературной слабоионизованной плазмы газового разряда.

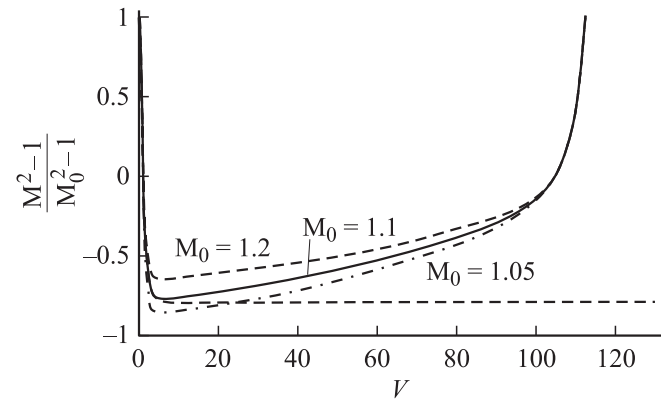


Рис. 7. Численные расчеты величины $\frac{M^2(V)-1}{M_0^2-1}$ при различных числах Маха M_0 ; параметр $\beta = 0.01$.

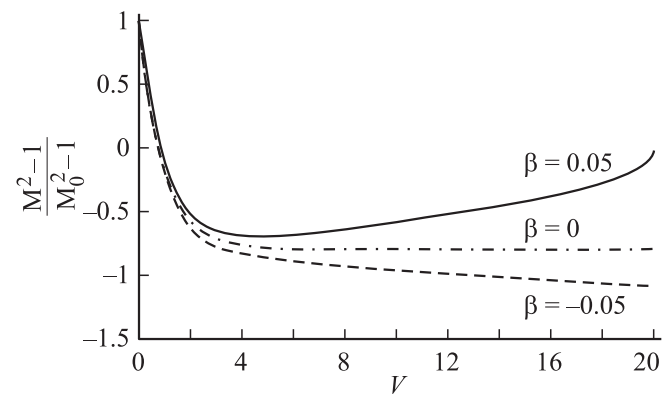


Рис. 8. То же, что на рис. 4.

Приложение 1

Для решения уравнения (6) введем новую независимую переменную по формуле

$$x = \beta V. \quad (8)$$

Тогда уравнение (6) переписывается в виде

$$\beta P'(x) = 2 - P(x) - \frac{x}{P(x)}, \quad (9)$$

$$P(0) = 0.$$

Следуя автору работы [23], введем новую функцию $y(x)$

$$P(x) = y(x) + \bar{P}(x), \quad (10)$$

где

$$\bar{P}(x) = 1 + \sqrt{1-x} \quad (10a)$$

— решение уравнения (9) при $\beta = 0$. В новых переменных уравнение (9) принимает вид

$$\begin{aligned} \beta y' &= 1 - y - \sqrt{1-x} - \frac{x}{y+1+\sqrt{1-x}} \\ &+ \frac{\beta}{2\sqrt{1-x}} \equiv f(y, x) + \frac{\beta}{2\sqrt{1-x}}, \quad (11) \\ y(0) &= -2. \end{aligned}$$

Введем также функции $\lambda(x)$ и $\phi(x)$

$$\lambda(x) = f'_y(y, x)_{y=0} = -\frac{2\sqrt{1-x}}{1+\sqrt{1-x}}, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1}{\beta} \int_0^x \lambda(x') dx' = \frac{2}{\beta} \left\{ 2 \ln \left(\frac{1+\sqrt{1-x}}{2} \right) \right. \\ &\left. + 2(1-\sqrt{1-x}) - x \right\}. \end{aligned}$$

Теперь рассмотрим следующую задачу для функции двух переменных $\tilde{y}(x, t)$:

$$\begin{aligned} \beta \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x} + \lambda(x) \frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} - 1 + \tilde{y} + \sqrt{1-x} \\ + \frac{x}{\tilde{y}+1+\sqrt{1-x}} = \frac{\beta}{2} \frac{1}{\sqrt{1-x}}, \quad (13) \end{aligned}$$

$$\tilde{y}(0, 0) = -2.$$

Задача (13) уже регулярна по параметру β , при этом $\tilde{y}(x, \phi(x)) \equiv y(x)$. В силу регулярности можно искать решение для $\tilde{y}(x, t)$ в виде

$$\tilde{y}(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta^k y_k(x, t). \quad (14)$$

Подставив (14) в уравнение (13) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях параметров β , получим следующую задачу для функции $y_0(x, t)$:

$$\lambda(x) \frac{\partial y_0}{\partial t} = 1 - y_0 - \sqrt{1-x} + \frac{x}{y_0+1+\sqrt{1-x}}, \quad (15)$$

$$y_0(0, 0) = -2.$$

Отметим, что задача (15) определяет решение $y_0(x, t)$ с точностью до некоторой неизвестной функции аргумента x . Введем новую функцию $Y_0(x)$:

$$Y_0 = y_0 + 1 + \sqrt{1-x}. \quad (16)$$

Для новой функции получим уравнение

$$\lambda(x) Y_0 \frac{\partial Y_0}{\partial t} + Y_0^2 - 2Y_0 + x = 0, \quad (17)$$

$$Y_0(0, 0) = 0.$$

Это уравнение интегрируется точно, в результате получаем

$$\begin{aligned} \ln \left(\left| \frac{Y_0^2 - 2Y_0 + x}{\alpha^2(x) - 2\alpha(x) + x} \right| \right) + \frac{1}{\sqrt{1-x}} \\ \times \ln \left[\left| \frac{(-1 + \sqrt{1-x} + Y_0)(-1 - \sqrt{1-x} + \alpha(x))}{(-1 - \sqrt{1-x} + Y_0)(-1 + \sqrt{1-x} + \alpha(x))} \right| \right] \\ = -\frac{2t}{\lambda(x)}, \quad (18) \end{aligned}$$

где $\alpha(x) = Y_0(x, 0)$ — пока произвольная функция. В работе [23] было доказано, что выполняется следующее соотношение:

$$\alpha(x) = \alpha(0) \exp \left(\int_0^x g(x') dx' \right),$$

где функция $g(x)$ определяется собственными функциями дифференциального оператора уравнения (15). При этом $\alpha(0) = 0$ при $Y_0(0, 0) = 0$. Таким образом, в силу (17) доказано, что в нашем случае

$$\alpha(x) \equiv 0. \quad (19)$$

С учетом (19) и (12) уравнение (18) приобретает вид формул (7).

Приложение 2. Численные методы решения

Для численного решения уравнения (6) необходимо задать начальное условие в начальной точке в окрестности $V = 0$ (точка $V = 0$ не подходит, поскольку при $V = 0$ $P(0) = 0$ и $\frac{dP}{dx} = 0$). Дифференцируя уравнение (6) и используя разложение в ряд Тейлора, получим для точки $V = \varepsilon$, $\varepsilon \ll 1$ начальное значение

$$P(\varepsilon) = \varepsilon(1 + \sqrt{1-\beta}). \quad (20)$$

Решив уравнение (6) стандартным методом в области $\varepsilon \leq V < 1/\beta$ (например, методом Рунге–Кутты), получим зависимость $P(V)$. Можно показать, что условие $\frac{d^2P}{dz^2} = 0$, которое мы используем для определения начала координат, эквивалентно уравнению

$$P(V_0) \frac{d^2P(V)}{dV^2} \Big|_{V=V_0} + \left[\frac{dP(V)}{dV} \Big|_{V=V_0} \right]^2 = 0. \quad (21)$$

Решение этого уравнения определяет значение V_0 , далее по решению $P(V)$ находится значение функции $P_0 \equiv P(z) \Big|_{z=0}$. Теперь мы имеем возможность численно решить уравнение

$$\frac{d^2P}{dz^2} + 2(1-P) \frac{dP}{dz} + \beta P = 0, \quad (22)$$

которое получается из уравнения (5) (или из (6) переходим к дифференцированию по z) с граничными условиями

$$P(0) = P_0, \quad \frac{dP}{dz} \Big|_{z=0} = P_0^2 - 2P_0 + \beta V_0 \quad (23)$$

на интервале $[0, +\infty)$ и на интервале $(z_{\text{lim}}, 0]$, $z_{\text{lim}} = z(V_{\text{lim}}) = - \int_{V_0}^{1/\beta} \frac{dV'}{P(V')}$. Оба решения в силу граничных условий сшиты вместе с первой производной. Тот же результат получится, если численно решить уравнение для функции $V = V(z)$

$$\frac{d^2V}{dz^2} + \left(\frac{dV}{dz} \right)^2 + \frac{dV}{dz} + \beta V = 0 \quad (24)$$

с граничными условиями

$$V(z) \Big|_{z=0} = V_0, \quad \frac{dV(z)}{dz} \Big|_{z=0} = -P_0 \quad (25)$$

и затем определить $P(z)$ по формуле $P = -\frac{dV}{dz}$.

Реализация численного метода при любых значениях параметров обеспечивается стандартными программами решения дифференциальных уравнений.

Список литературы

- [1] *Strutt J.W., Rayleigh Baron.* The theory of sound. London: Max and Co. Limited, 1926. Vol. IV.
- [2] *Александров Н.А., Напартович А.П., Паль А.Ф., Серов А.О., Старостин А.Н.* // Физика плазмы. 1990. Т. 16. Вып. 7. С. 862–870.
- [3] *Soukhomlinov V.S., Kolosov V.Y., Sheverev V.A., Otugen M.V.* // Phys. Fluids. 2002. Vol. 14. N 1. P. 427–429.
- [4] *Напартович А.П., Старостин А.Н.* // Химия плазмы. 1973. Вып. 6. С. 153–208.
- [5] *Bastein F.* // J. Phys. D. Appl. Phys. 1987. Vol. 20. P. 1547–1557.
- [6] *Остроумов Г.А.* // Акустический журнал. 1982. Т. XXVIII. Вып. 2. С. 268–270.
- [7] *Basargin I.V. and Mishin G.I.* // Publication of the Ioffe Physico-Technical Institute. Leningrad, 1984. N 880.
- [8] *Ganguly B.N., Bleitzinger P., Garscalden A.* // Phys. Letter. A. 1998. Vol. 230. P. 218.
- [9] *Klimov A.I., Koblov A.N., Mishin G.I., Serov Yu.L., and Yavor I.P.* // Sov. Tech. Phys. 1982. Vol. 8. N 4. P. 192–194.
- [10] *Van Wie D.M., Matterns L.A., Grossman K.R., Gauthier L., Donohue D., Ku H., and Mishin G.I.* Overview of plasma aerodynamics research at JHU/APL. 2nd Workshop on the Application of weakly ionized flows for aerospace applications. Norfolk, 1998. P. 14–25.
- [11] *Mishin G.I., Serov Yu.L., Yavor I.P.* // Sov. Tech. Phys. Lett. 1991. Vol. 17. N 6. P. 413–416.
- [12] *Bedin A.P., Mishin G.I.* // Sov. Tech. Phys. Lett. 1995. Vol. 21. N 14. P. 5–7.
- [13] *Basargin I.V. and Mishin G.I.* // Sov. Tech. Phys. Lett. 1989. Vol. 5. N 4. P. 311–313.
- [14] *Gorshkov V.A., Klimov A.I., Mishin G.I., Fedorov A.B., Yavor I.P.* // Sov. Tech. Phys. 1987. Vol. 57. P. 1893–1898.
- [15] *Найдис Г.В., Румянцев С.В.* // ТВТ. 1987. Т. 25. С. 389–390.
- [16] *Soukhomlinov V.S., Kolosov V.Y., Sheverev V.A., Otugen M.V.* // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 473. P. 245–264.
- [17] *Adamovich I.V., Subramaniam V.V., Rich J.W.* // AIAA J. 1998. Vol. 36. N 5. P. 816–822.
- [18] *Басаргин И.В., Мишин Г.И.* // Письма в ЖТФ. 1985. Т. 11. Вып. 21. С. 1297–1303.
- [19] *Великович А.Л., Либерман М.А.* Физика ударных волн в газах и плазме. М.: Наука, 1987. 295 с.
- [20] *Голятин В.Ю., Кучинский В.В., Сухомлинов В.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 4. С. 25–30.
- [21] *Голятин В.Ю., Кучинский В.В., Сухомлинов В.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 5. С. 52–59.
- [22] *Зайцев В.Ф., Полянин А.Д.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Физматлит, 2001. 576 с.
- [23] *Ломов С.А.* Введение в общую теорию сингулярных возмущений. М.: Наука, 1981. 398 с.
- [24] *Вуллис Л.А.* Термодинамика газовых потоков. М.–Л.: Госэнергетическое издание, 1950. 303 с.