

01;03

# Исследование затекания жидкости в тонкие капилляры при малых числах Вебера

© В.И. Волков, Д.Ю. Козлов, Е.Р. Кирколул

Алтайский государственный медицинский университет,  
636038 Барнаул, Россия  
e-mail: volkov@agmu.ru, dyk@agmu.ru

(Поступило в Редакцию 12 сентября 2006 г. В окончательной редакции 10 января 2007 г.)

Рассмотрено затекание жидкостей в тонкие стеклянные капилляры при малых значениях чисел Вебера и Рейнольдса. Получено, что в таких условиях при заполнении капилляров профиль скорости течения может значительно отличаться от пуазейлевского, и это отличие определяется адгезионными свойствами материала.

PACS: 47.85.Dh

## Введение

Интерес к капиллярной гидродинамике в условиях существенного влияния поверхностных сил связан с многочисленными приложениями в гидротехнике, нефтедобыче, химической технологии, атомной энергетике и в прикладных задачах космических полетов. Известен ряд работ, в которых приведено подробное описание нестационарного течения жидкости в капиллярах, например [1–3]. В этих работах предполагается, что при течении жидкости формируется определенный установившийся или неуставившийся профиль скорости по сечению капилляра, чаще всего принимаемый за пуазейлевский. Работ, посвященных самому процессу заполнения жидкостью пустого капилляра, сравнительно немного, в [4] приведено соотношение для процесса нестационарного заполнения жидкостью капилляра в условиях преобладания сил поверхностного натяжения. В этой работе для горизонтально расположенного капилляра получена квадратичная зависимость смещения мениска жидкости от времени.

## Теоретический анализ

В предлагаемом исследовании сделана попытка уточнить теоретическую связь между координатой мениска жидкости и временем его движения  $z^2 = kt$ , приведеную в [4].

Следует отметить, что в этом соотношении никак не учитываются краевой угол и адгезионные свойства поверхности растекания. Кроме уточнения теоретической связи в законе движения мениска жидкости проведена его экспериментальная проверка на разных жидкостях (спирт, трансформаторное масло ГК, „Рапс“ и „Мобил“) и диаметрах капилляров, изменяющихся в пределах от  $2.5 \cdot 10^{-4}$  до  $9.4 \cdot 10^{-4}$  м. Приведем характерные числа Вебера и Рейнольдса при заполнении горизонтального капилляра в наших экспериментах:

$$We = 2RV^2/\sigma \approx 0.018, \quad Re = 2RV/\nu \approx 18, \quad (1)$$

где  $2R \approx 9 \cdot 10^{-4}$  м — максимальное значение диаметра капилляра,  $V \approx 0.02$  м/с — экспериментально полученное максимальное значение скорости в капиллярах,  $\rho \approx 1000$  кг/м<sup>3</sup> — плотность жидкости,  $\sigma \approx 0.02$  Н/м — коэффициент поверхностного натяжения жидкости,  $\nu \approx 10^{-6}$  м<sup>2</sup>/с — коэффициент кинематической вязкости жидкости.

В качестве численных значений приняты примерные значения скорости, коэффициентов кинематической вязкости и поверхностного натяжения спирта. Для всех остальных жидкостей экспериментальные значения характерных скоростей существенно меньше, а коэффициенты кинематической вязкости существенно выше, при этом коэффициенты поверхностного натяжения всех исследуемых масел мало отличаются от коэффициента поверхностного натяжения спирта. Поэтому можно утверждать, что приведенные числа Вебера и Рейнольдса в соотношении (1) являются верхней границей для наших условий проведения эксперимента. При таких числах  $Re$  движение жидкости можно считать ламинарным во всей области за исключением области входной кромки капилляра.

Запишем уравнение движения жидкости по горизонтальному цилиндрическому капилляру

$$\frac{d(mV)}{dt} = \frac{2\sigma \cos \varphi}{R} \pi R^2 - \mu \frac{\partial V}{\partial r} 2\pi R z, \quad (2)$$

где  $m = \rho \pi R^2 z$  — масса жидкости в капилляре,  $R$  — радиус капилляра,  $z$  — продольная координата мениска жидкости в капилляре,  $\varphi$  — краевой угол,  $\mu$  — коэффициент динамической вязкости жидкости.

Начальное условие при  $t = 0$ ,  $z = 0$ . Далее заменим градиент скорости по сечению капилляра средним значением его модуля, считая в первом приближении профиль скорости пуазейлевским

$$\frac{\bar{\partial V}}{\partial r} = \frac{\int_0^R \frac{\partial V}{\partial r} 2\pi r dr}{\pi R^2} = \theta \frac{V}{R}, \quad (3)$$

т. е.  $\theta$  определяется из усреднения градиента скорости по сечению капилляра. За  $V$  здесь и в дальнейшем принята

средняя расходная скорость. Для пуазейлевского течения это усреднение приводит к значению

$$\theta = \frac{8}{3}. \quad (4)$$

Следует отметить, что профиль скорости, по крайней мере на границе раздела мениска жидкости со стенкой капилляра, не совпадает с пуазейлевским, так как мениск жидкости прокатывается вдоль стенки с ненулевой скоростью, что приводит к повышенному значению градиентов скоростей вблизи стенки, на которой выполняются условия прилипания. Это движение подобно движению обруча по шероховатой стенке без проскальзывания. Подставив (3) в (2), учитывая, что  $z$  — координата мениска жидкости, а

$$V \equiv \frac{dz}{dt}$$

— скорость его движения, получим дифференциальное уравнение относительно  $z$ :

$$\frac{d}{dt} \left( z \frac{dz}{dt} \right) = \frac{2\sigma \cos \varphi}{R\rho} - \frac{2\mu\theta}{R^2\rho} z \frac{dz}{dt}. \quad (5)$$

После первого интегрирования получаем

$$z \frac{dz}{dt} = \frac{R\sigma \cos \varphi}{\mu\theta} \left( 1 - \exp \left( -\frac{2\mu\theta}{R^2\rho} t \right) \right). \quad (6)$$

Оценка коэффициента при времени  $t$  показателя экспоненты в (6) для диаметра  $9 \cdot 10^{-4}$  м и коэффициента динамической вязкости спирта приводит к значению  $\sim 7$ . Оценки для других исследуемых жидкостей и капилляров дадут этот коэффициент существенно большим 7. Таким образом, можно утверждать, что примерно через 0.1 с экспоненциальным членом в уравнении (6) можно пренебречь. Тогда, проведя второе интегрирование уравнения (6), получим квадратичный закон смещения мениска в капилляре от времени

$$z^2 = \frac{2R\sigma \cos \varphi}{\mu\theta} t. \quad (7)$$

Константа перед временем имеет размерность коэффициента диффузии. Движение жидкости в капилляре происходит, главным образом, за счет силы адгезии, определяющий параметр которой можно измерить по высоте поднятия жидкости в капилляре  $h$

$$\sigma \cos \varphi = \frac{R\rho gh}{2}, \quad (8)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения.

Подставив (8) в (7), получим

$$z^2 = \frac{R^2 gh}{\nu\theta} t. \quad (9)$$

Если пренебречь перестройкой потока на начальном участке, то разложив экспоненту в соотношении (6) с

точностью до членов первого порядка малости, получим после интегрирования уравнение движения на начальном участке с постоянной скоростью

$$z = \sqrt{2gh} t. \quad (10)$$

Таким образом, жидкость в рассматриваемой модели стартует со скоростью, равной скорости вытекания ее из широкого сосуда высотой  $h$ , которая определяется из капиллярного поднятия жидкости.

## Методика

Как показали эксперименты, проведенные в работе [5], из-за гистерезиса смачивания воспроизводимость экспериментов по капиллярному поднятию лучше всего при измерениях с краевым углом оттекания. Краевой угол оттекания для приведенных жидкостей оказался близок к нулю, поэтому высота капиллярного поднятия определялась после гравитационного стекания излишка жидкости из капилляра. Перед началом эксперимента капилляр погружался в исследуемую жидкость для образования адсорбционного подслоя, что также улучшало повторяемость экспериментальных результатов.

Полученные экспериментальные зависимости координаты  $z$  и квадрата координаты мениска  $z^2$  в горизонтальном капилляре в зависимости от времени для спирта и трансформаторного масла приведены на рис. 1–4. Процесс растекания жидкости в стеклянных капиллярах фиксировался на видеокамеру с частотой 15 кадров в секунду, а затем обрабатывался на компьютере. Во всех экспериментах высота начального уровня жидкости в широком сосуде с выходящим из него капилляром практически не изменялась и была близка к радиусу горизонтального капилляра, с тем чтобы можно было пренебречь гидростатическим давлением, оказываемым столбом жидкости. Сумма случайной и систематической погрешностей экспериментальных кривых не превосходила 5%. Каждая серия состояла из 5 опытов, и таких серий было проведено не менее трех. Диаметры капилляров определялись с микроскопом с точностью  $10^{-5}$  м.

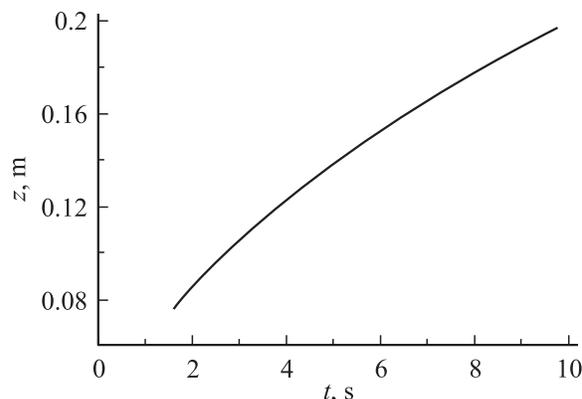
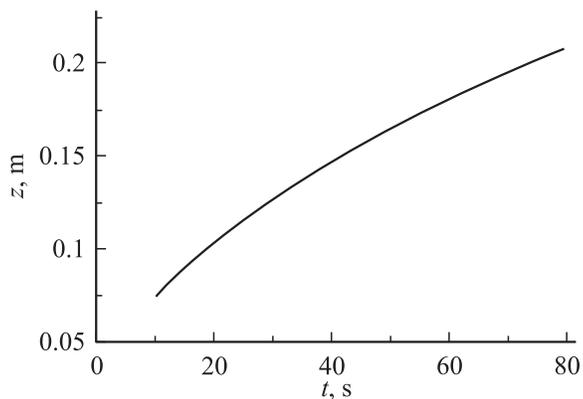
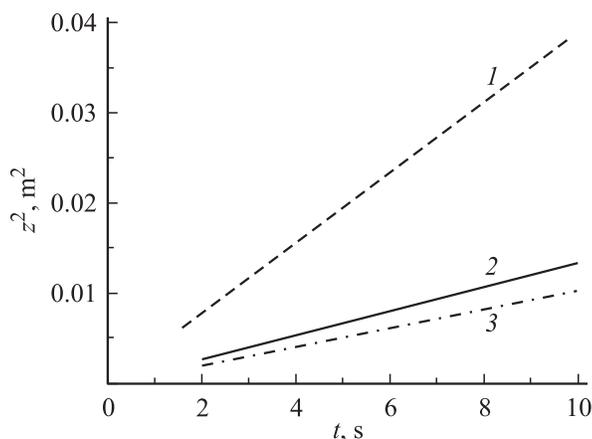


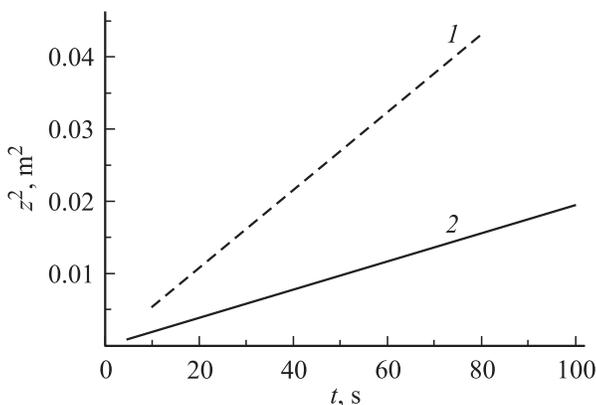
Рис. 1. Зависимость координаты мениска спирта от времени. Капилляр  $d = 9.4 \cdot 10^{-4}$  м.



**Рис. 2.** Зависимость координаты мениска трансформаторного масла от времени. Капилляр  $d = 9.4 \cdot 10^{-4}$  м.



**Рис. 3.** Зависимость квадрата координаты мениска спирта от времени: 1 — капилляр  $d = 9.4 \cdot 10^{-4}$ ; 2 —  $3.4 \cdot 10^{-4}$ ; 3 —  $2.5 \cdot 10^{-4}$  м.



**Рис. 4.** Зависимость квадрата координаты мениска трансформаторного масла от времени: 1 — капилляр  $d = 9.4 \cdot 10^{-4}$ ; 2 —  $3.4 \cdot 10^{-4}$  м.

Эксперименты проводились практически в изотермических условиях. Различия температуры между разными сериями находилось в пределах  $1^\circ\text{C}$ .

## Экспериментальная часть

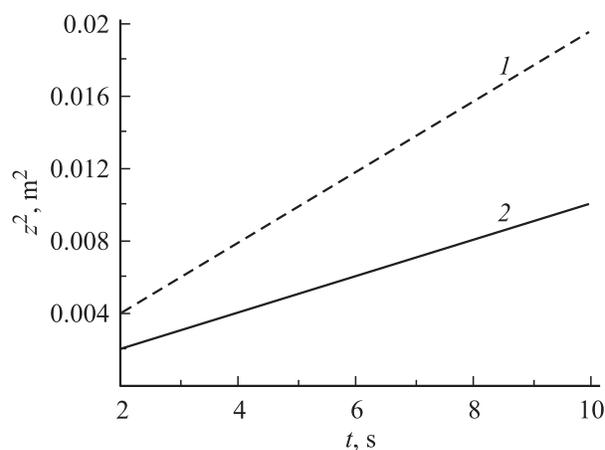
Результаты экспериментов представлены на рис. 1–6 и в табл. 1, 2.

В результате экспериментов получена ожидаемая зависимость (9) смещения мениска жидкости в капилляре от времени

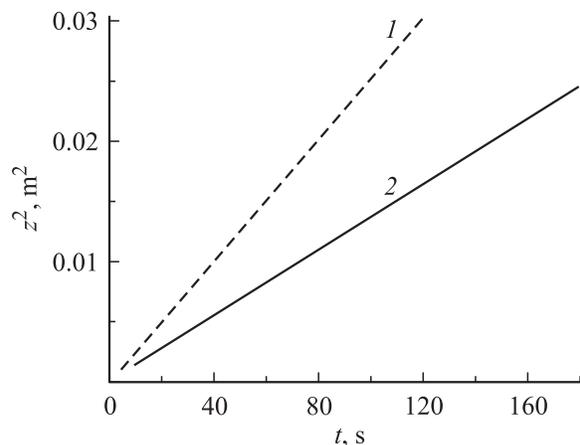
$$z^2 = kt. \quad (11)$$

Осталось уточнить коэффициент  $\theta$  в формуле (3), который, как оказалось, может зависеть от адгезионных свойств материала трубки. В двух последних столбцах табл. 1, 2 приведены соответствующие отношения диаметров и максимальных высот поднятия.

На рис. 5, 6 приведены экспериментальные графики для капилляров из стекла марки № 23. Можно видеть, что характер течения в этих трубках практически не изменился, при этом максимальные высоты поднятия оказались выше, а скорость движения мениска ниже, чем в экспериментах, представленных на рис. 3, 4 (капилляры из стекла марки ХС-3). Вышеупомянутые марки стекла различаются, главным образом, содержанием



**Рис. 5.** То же, что для рис. 3: 1 —  $d = 5.9 \cdot 10^{-4}$ ; 2 —  $3.1 \cdot 10^{-4}$  м.



**Рис. 6.** То же, что для рис. 4: 1 —  $d = 5.9 \cdot 10^{-4}$ ; 2 —  $3.1 \cdot 10^{-4}$  м.

**Таблица 1.** Максимальные высоты поднятия спирта  $h$  и тангенсы угла наклона  $k$  экспериментальных прямых  $z^2(t)$ 

$d \cdot 10^3, \text{m}$	$h \cdot 10^3, \text{m}$	$k \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$	$d_i/d_j$	$h_j/h_i$
$d_1 = 0.94$	$h_1 = 10.8$	3905.6	$d_1/d_2 = 2.8$	$h_2/h_1 = 2.9$
$d_2 = 0.34$	$h_2 = 31.6$	1345.2	$d_2/d_3 = 1.4$	$h_3/h_2 = 1.3$
$d_3 = 0.25$	$h_3 = 42.1$	1045.4	$d_1/d_3 = 3.8$	$h_3/h_1 = 3.9$
$d_4 = 0.59$	$h_4 = 20.3$	1964.2		
$d_5 = 0.31$	$h_5 = 41.1$	1011.6	$d_4/d_5 = 1.9$	$h_5/h_4 = 2$

**Таблица 2.** Максимальные высоты поднятия трансформаторного масла  $h$  и тангенсы угла наклона  $k$  экспериментальных прямых  $z^2(t)$ 

$d \cdot 10^3, \text{m}$	$h \cdot 10^3, \text{m}$	$k \cdot 10^6, \text{m}^2/\text{s}$	$d_i/d_j$	$h_j/h_i$
$d_1 = 0.94$	$h_1 = 13.8$	539.7	$d_1/d_2 = 2.76$	$h_2/h_1 = 2.85$
$d_2 = 0.34$	$h_2 = 39.2$	194.7		
$d_3 = 0.59$	$h_3 = 24.4$	252.5		
$d_4 = 0.31$	$h_4 = 50.7$	136.9	$d_3/d_4 = 1.9$	$h_4/h_1 = 2$

оксидов натрия и калия, так, в ХС-3 содержится 14.5%  $\text{Na}_2\text{O}$  и 1%  $\text{K}_2\text{O}$ , а в стекле № 23 — соответственно 9.4 и 7.1. Из формулы Лапласа (8)

$$\frac{h_1}{h_2} = \alpha \frac{R_2}{R_1}, \quad (12)$$

$h_1, h_2$  — максимальные высоты поднятия, а  $R_1, R_2$  — радиусы двух сравниваемых капилляров. Коэффициент  $\alpha = 1$ , если капилляры изготовлены из одного материала и имеют одинаковые адгезионные свойства; если же  $\alpha \neq 1$ , то марки стекла этих двух капилляров различны и следует делать поправку на различные адгезионные свойства материалов. Для капилляров, представленных на рис. 3, 4,  $\alpha = 1$  (с экспериментальной точностью). То же можно сказать и о капиллярах из стекла марки № 23 (рис. 5, 6). Однако, если сравнивать между собой эти два сорта трубок, то различие адгезионных свойств приводит к  $\alpha \approx 0.86$ .

Кроме того, как уже отмечалось, профиль скорости в капилляре, строго говоря, нельзя считать пуазейлевским. Из (9) и (11) можно найти поправку

$$\theta = \frac{R^2 g h}{\nu k}, \quad (13)$$

подставив известные параметры: коэффициент кинематической вязкости жидкости  $\nu$ , радиус капилляра  $R$ , коэффициент  $k$  и максимальную высоту поднятия  $h$ .

## Результаты и их обсуждение

Среднее значение  $\theta$  для капилляров (рис. 1–4) составляет  $\sim 3.7$ , а для капилляров (рис. 5, 6) —  $\sim 5.5$ , что отличается приблизительно в 1.4 и в 2 раза соответственно

от коэффициента  $\theta = 8/3$ , который соответствует пуазейлевскому профилю скорости.

Следует отметить, что экспериментальные значения  $\theta$  для спирта и трансформаторного масла несколько отличались: так, для капилляров из стекла марки ХС-3  $\theta \sim 3.9$  для спирта и  $\sim 3.5$  — для трансформаторного масла, а для капилляров из стекла марки № 23  $\theta \sim 5.7$  для спирта и  $\sim 5.3$  — для трансформаторного масла. Так как отличие составляет  $\sim 10\%$ , что близко к точности эксперимента, то окончательные выводы о зависимости  $\theta$  от вязкости жидкости делать преждевременно.

Если говорить о сравнительных методиках измерения вязкости с использованием системы из двух капилляров, то они должны быть изготовлены из одинакового материала и протарированы на жидкостях с известной вязкостью. Предложенный способ был опробован на спирте и трансформаторном масле ГК, физические параметры которых хорошо изучены. Затем с помощью изложенного метода были проведены эксперименты и получены кривые, подобные описанным выше для масел „Мобил“ и „Рапс“, и оценены их коэффициенты вязкости. Так, например, для „Рапса“ получено значение коэффициента кинематической вязкости  $\nu = 6.7 \cdot 10^{-5} \text{m}^2/\text{s}$  при температуре  $25.6^\circ\text{C}$ .

## Заключение

1. В экспериментах получено, что при заполнении капилляров профиль скорости течения при малых числах Вебера может существенно отличаться от пуазейлевского и величина этого отличия зависит от адгезионных свойств материалов.

2. Сделан вывод о доминирующей роли адгезионных свойств материала поверхностей растекания при движении жидкостей, приведена поправка, позволяющая учитывать это обстоятельство.

## Список литературы

- [1] Полубаринова-Кочина П.Я. Теория движения грунтовых вод. Изд. 2-е. М.: Наука, 1977. 664 с.
- [2] Сумм Б.Д., Горюнов Ю.В. Физико-химические основы смачивания и растекания. М.: Химия, 1976. 324 с.
- [3] Дерягин Б.В., Чураев Н.В., Муллер В.М. Поверхностные силы. М.: Наука, 1985. 398 с.
- [4] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Изд-во академии наук, 1952. 250 с.
- [5] Лескова С.С. Диагностика свойств жидкости на границах раздела гетерогенных сред. Автореф. дис. канд. физ.-мат. наук. Барнаул, 2006. 20 с.