

01;04

## Двойной заряженный слой на границе между стенкой и симметричной плазмой

© Б.А. Альтеркоп,<sup>1</sup> И.Д. Дубинова,<sup>2</sup> А.Е. Дубинов<sup>2</sup><sup>1</sup> Тель-Авивский университет,  
Тель-Авив, Израиль<sup>2</sup> Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,  
607188 Саров, Нижегородская область, Россия  
e-mail: dubinov@rol.ru

(Поступило в Редакцию 11 ноября 2006 г.)

Показано, что особенности образования и структура стационарного заряженного слоя на границе между симметричной плазмой и стенкой существенно зависят от отношений  $\tau_{\pm}$  (для обеих компонент плазмы) тепловой скорости к скорости потока плазмы в начале слоя, а также от знака и величины электростатического потенциала стенки  $\phi_w$ . Полученный критерий существования слоя зависит от  $\tau_{\pm}$  и не зависит от знака  $\phi_w$ . Сформулированы условия, при которых в пристеночной области симметричной плазмы может формироваться структура типа „двойной слой“. Двойной заряженный слой содержит два подслоя с различными знаками заряда при фиксированной полярности стенки. При этом подслои, примыкающий к плазме, имеет знак заряда, противоположный полярности стенки, в то время как подслои, примыкающий к стенке, имеет знак заряда, совпадающий с ее полярностью. Определены области значений параметров симметричной плазмы, при которых двойной слой существует. Найдено, что подобная структура может формироваться не при всех значениях параметров плазмы, при которых заряженный слой существует, и на возможность его формирования влияют как  $\tau_{\pm}$ , так и знак потенциала стенки.

PACS: 52.40.Kh, 52.30.Ex, 52.40.Hf

### Введение

Симметричной называют плазму, у которой заряженные частицы противоположных знаков имеют одинаковые величины отношений заряда к массе.

Один из классических примеров симметричной плазмы легких частиц — электрон-позитронная плазма ( $e^-e^+$ -плазма), которую уже исследуют в лабораторных условиях [1–4]. Такую плазму получают с помощью  $\beta^+$ -распадающихся изотопов (обычно  $\text{Na}^{22}$ ) и электронных пучков и удерживают в электромагнитных ловушках [1–3] или получают за счет рождения  $\beta^-\beta^+$ -пар в результате взаимодействия интенсивного лазерного луча с твердотельной мишенью [4].

Другой пример симметричной плазмы тяжелых частиц — фуллереновая плазма ( $\text{C}_{60}^-\text{C}_{60}^+$ -плазма), содержащая только ионы  $\text{C}_{60}^-$  и  $\text{C}_{60}^+$  и не содержащая свободных электронов. Она получается путем воздействия электронного пучка на фуллереновый сублимационный пар благодаря процессам ионизации электронным ударом и прилипания электронов, а затем очистке плазмы от свободных электронов с помощью магнитного поля [5].

Заряженное тело, погруженное в симметричную плазму, создает возмущения, которые, как и в любой другой плазме, формируют пограничный слой между телом и невозмущенной плазмой. Структура пограничного слоя между плазмой и заряженным телом имеет фундаментальное значение для физики плазмы и для различных приложений, поскольку она определяет работу зондов, антенн и взаимодействие плазмы со стенками ограничивающей ее камеры. Существует мнение [5], что в

полностью симметричной плазме не может существовать никаких стационарных потенциальных структур типа пристеночных заряженных слоев или типа двойных слоев (помимо зарядов и масс заряженных частиц равны и концентрации частиц в невозмущенной плазме в силу условия квазинейтральности). Такое положение можно считать оправданным, если стенка не заряжена. В электрон-ионной плазме проводящая стенка, не имеющая гальванической связи с внешней цепью, заряжается и находится под плавающим потенциалом. Причина — различие скоростей электронов и ионов из-за различия их масс. В симметричной плазме массы всех частиц одинаковы, поэтому заряд и плавающий потенциал стенки равны нулю. В этом случае симметричная плазма свободно натекает на стенку, и разделения зарядов не происходит. Если на стенку подан потенциал, и она заряжена, то под действием электрического поля стенки в симметричной плазме, как и в любой другой, возникает разделение зарядов, и формируется заряженный слой.

Структура слоя зависит от параметров плазмы и потенциала стенки. В частности, при определенных условиях в пристеночном слое может происходить смена знака объемного заряда, т. е. возникать структура типа „двойной слой“. Возможность такого явления основана на термодинамической неравновесности плазмы, когда ее компоненты имеют различные температуры вследствие редких межчастичных столкновений и, следовательно, малой скорости релаксации. Для типичных значений температуры и плотности симметричной плазмы длина свободного пробега частиц очень велика. Так, для ти-

пичных параметров  $C_{60}^-C_{60}^+$ -плазмы [5]  $T_{\pm} \approx 1$  eV,  $Z = 1$ ,  $n_0 = 2 \cdot 10^7$  cm $^{-3}$  длины свободного пробега  $L_{\pm}$  [cm]  $\approx 3.4 \cdot 10^{13} T_{\pm}^2$  [eV]/ $Z^4 n_{\pm}$  [cm $^{-3}$ ]  $\approx 10^5$  cm = 1 km(!), дебаевская длина  $\lambda_D = 2$  mm и параметр неидеальности  $\Gamma = 6.25 \cdot 10^{-6} \ll 1$ . Для типичных параметров  $e^-e^+$ -плазмы значений [1]  $n_0 = 10^6$  cm $^{-3}$  и  $T \approx 0.025$  eV соответственно  $L_{\pm} \approx 5 \cdot 10^9$  cm,  $\lambda_D = 1$  mm и параметр неидеальности  $\Gamma = 1/n_0 \lambda_D^3 = 10^{-3} \ll 1$ . Следовательно, типичные параметры лабораторных симметричных плазм таковы, что для большинства процессов их можно считать идеальными и бесстолкновительными.

Развитию теории пристеночного заряженного слоя в симметричной плазме посвящена данная работа. Основная цель работы — определение условий существования стационарного заряженного слоя и его двуслойной структуры в симметричной плазме.

## 1. Описание модели пристеночного слоя в симметричной плазме

Рассмотрение будем вести в рамках гидродинамического подхода, примененного в [6] и позднее развитого в работах [7–9]. Этот подход отличается тем, что в нем используется приближение идеального газа и учитывается парциальное давление и инерция частиц обоих знаков заряда. Последнее может быть необязательным для легких частиц в обычной несимметричной  $e^-i^+$ -плазме с сильно различающимися массами частиц, но это принципиально для симметричной плазмы. Укажем, что в работе [10] была предпринята попытка кинетического описания двойного слоя в пристеночном слое, однако математические трудности не позволили провести полный анализ.

Будем считать, что двукомпонентная квазинейтральная симметричная плазма занимает область  $x \leq 0$ , граница между невозмущенной плазмой и заряженным слоем (граница слой–плазма) локализована в точке  $x = 0$  и сохраняет квазинейтральность, а поверхность тела находится при  $x > 0$ . Тогда граничные условия на границе плазма–слой при  $x = 0$  следующие:

$$\varphi(0) = 0; \quad \frac{d\varphi(0)}{dx} = -E_0; \quad v_{\pm}(0) = v_{\pm 0}; \quad n_{\pm(0)} = n_{\pm 0};$$

$$v_{-0} = v_{+0} = v_0; \quad n_{-0} = n_{+0} = n_0. \quad (1)$$

Структуру слоя будем описывать с помощью следующих безразмерных уравнений [8]:

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2} = N_- - N_+, \quad (2)$$

$$\frac{1}{N_-^2} - 1 + \tau_- \ln N_-^2 = \Phi, \quad (3)$$

$$\frac{1}{N_+^2} - 1 + \tau_+ \ln N_+^2 = -\Phi, \quad (4)$$

первое из которых представляет собой уравнение Пуассона, а два последующих выражают законы сохранения

энергии в ансамблях частиц при сохранении их потоков. В уравнениях (2)–(4) использованы следующие обозначения и нормировки:

$$\Phi = \frac{2q\varphi}{mv_0^2}, \quad N_{\pm} = \frac{n_{\pm}}{n_0}, \quad s = \frac{x}{L},$$

$$\tau_{\pm} = \frac{kT_{\pm}}{mv_0^2}, \quad L = \sqrt{\frac{\epsilon_0 m v_0^2}{2q^2 n_0}}, \quad (5)$$

где  $q$  и  $m$  — модуль заряда и масса положительно и отрицательно заряженных частиц, составляющих плазму;  $\varphi$  — электростатический потенциал;  $n_0$  и  $v_0$  — концентрация и скорость частиц невозмущенной плазмы;  $x$  — координата;  $k$  и  $\epsilon_0$  — постоянная Больцмана и диэлектрическая постоянная;  $T_{\pm}$  — температуры компонент плазмы;  $n_{\pm}$  — концентрации частиц плазмы в слое; индексы  $\pm$  обозначают знак заряда.

Укажем предположения, в рамках которых записаны уравнения (2)–(4):

— плазма симметрична, т.е. состоит из двух компонент, в которых модуль заряда и масса положительно и отрицательно заряженных частиц равны, а также равны их скорости и концентрации в невозмущенной области;

— плазма является полностью ионизованной и находится в состоянии частичного термодинамического равновесия, при этом температуры компонент постоянны в слое;

— обе компоненты плазмы удовлетворяют уравнению состояния идеального газа  $p_{\pm} = n_{\pm} k T_{\pm}$ ;

— стенка поглощает и нейтрализует заряженные частицы, а эмиссия отсутствует;

— система стационарна, а электростатический потенциал стенки  $\varphi_W$  может быть как положительным, так и отрицательным.

## 2. Условие существования слоя

Рассмотрим уравнение Пуассона (2) вблизи границы слой–плазма. Примем во внимание, что плотность заряда  $\rho(\Phi) = N_+(\Phi) - N_-(\Phi)$  на самой границе равна нулю, т.е.  $\rho(0) = 0$ . Вблизи границы мы можем положить  $\rho(\Phi) \approx \rho'(0)\Phi$ , где штрих обозначает производную по  $\Phi$ . Тогда уравнение Пуассона вблизи границы можно записать как

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2} \approx -\rho'(0)\Phi. \quad (6)$$

Следовательно, для того чтобы распределение электростатического потенциала в слое было не осциллирующей функцией и представлялось вогнутой кривой при  $\Phi > 0$  и выпуклой при  $\Phi < 0$ , необходимо

$$\rho'(0) \leq 0, \quad \rho(0) = 0. \quad (7)$$

Используя  $N_+(0) = N_-(0) = 1$  и следующие из (3) и (4) соотношения

$$\frac{dN_+}{d\Phi} = \frac{N_+^3}{2(1 - \tau_+ N_+^2)} \quad \text{и} \quad \frac{dN_-}{d\Phi} = -\frac{N_-^3}{2(1 - \tau_- N_-^2)}, \quad (8)$$

представим условие (7) в виде

$$\frac{1}{1 - \tau_-} + \frac{1}{1 - \tau_+} \leq 0. \quad (9)$$

Неравенство (9) — критерий существования слоя в симметричной плазме, т.е. необходимое условие того существования стационарного слоя с учетом инерции и температур обеих компонент плазмы. Рассмотрим этот критерий более подробно.

Легко видеть, что при

$$(1 - \tau_+)(1 - \tau_-) > 0, \quad (10)$$

неравенство (9) не выполняется, если скорость плазмы превышает тепловые скорости частиц обоих знаков заряда, т.е.

$$(A): \quad \tau_+ < 1 \text{ и } \tau_- < 1, \quad (11)$$

и удовлетворяется в обратном случае, когда

$$(B): \quad \tau_+ > 1 \text{ и } \tau_- > 1. \quad (12)$$

Этот вывод справедлив и при  $\tau_+ = \tau_-$ . В случае, противоположном (10),

$$(1 - \tau_+)(1 - \tau_-) < 0, \quad (13)$$

т.е. когда скорость плазмы превышает тепловую скорость одной из компонент и меньше тепловой скорости другой, неравенство (9) выполняется, если

$$\tau_+ + \tau_- \leq 2. \quad (14)$$

Для удобства представим последнее условие в следующем виде:

$$G = \frac{2}{\tau_+ + \tau_-} = \frac{2mv_0^2}{k(T_- + T_+)} \geq 1. \quad (15)$$

Условие, когда скорость плазмы превышает тепловую скорость одной из компонент и меньше тепловой скорости другой, подобно частному случаю, соответствующему критерию Бома для формирования слоя в плазме газового разряда. Существенно, однако, что в симметричной плазме невозможно пренебрежение инерцией одной из компонент, как это делается при выводе критерия Бома. Таким образом, условия (14) и (15) — суть обобщение критерия Бома с учетом инерции и температур обеих компонент плазмы. Физический смысл уравнения (15) состоит в том, что скорость плазмы на границе слоя должна превышать скорость звука, которая в симметричной плазме определяется как  $c_s = \sqrt{k(T_+ + T_-)/2m}$ . В соответствии с (13) и (14) можно выделить две области параметров, в которых условие (9) выполняется

$$(C): \quad \tau_+ < 1 \text{ и } \tau_- > 1 \quad (16)$$

и

$$(D): \quad \tau_+ > 1 \text{ и } \tau_- < 1. \quad (17)$$

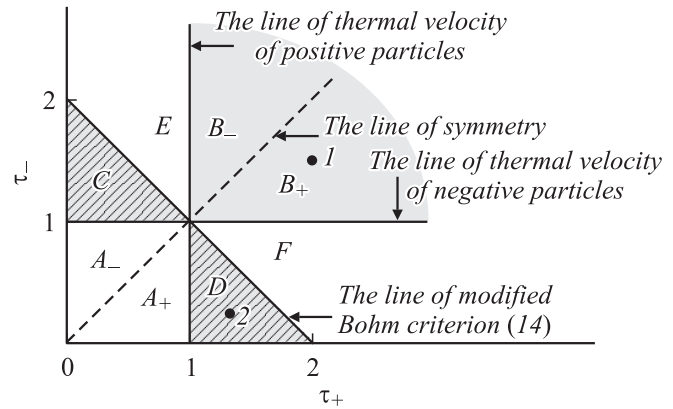


Рис. 1. Карта областей на плоскости  $(\tau_+, \tau_-)$ , соответствующих различным режимам формирования слоя: области не осциллирующих решений закрашены, области существования двойного слоя заштрихованы.

Области A, B, C и D на плоскости  $(\tau_+, \tau_-)$  показаны на рис. 1. Легко видеть, что критерий (14) ограничивает максимальные значения  $\tau_+$  и  $\tau_-$  в областях C и D. В итоге заряженный слой с монотонным распределением потенциала существует только в областях B, C и D, где  $\rho'(0) < 0$ , и невозможен в областях A, E и F, где  $\rho'(0) \geq 0$ .

На рис. 1 показана биссектриса  $\tau_+ = \tau_-$ , являющаяся линией симметрии. Эта линия соответствует одинаковой геометрии слоя при  $\pm\phi_w$ . Линия симметрии делит области A и B на равные части, которые обозначим как  $A_+$  и  $A_-$ ,  $B_+$  и  $B_-$  соответственно.

### 3. Условие образования двойного слоя

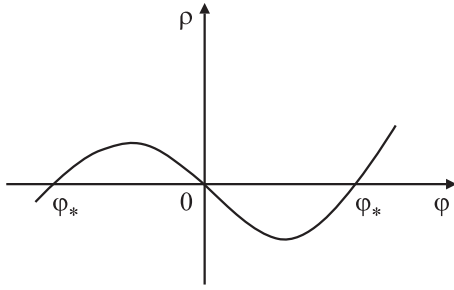
Предыдущее рассмотрение было основано фактически на условии (7) на границе слоя. В частности, из него следует, что слой вблизи этой границы является положительно заряженным ( $\rho > 0$ ) при  $\Phi < 0$  и отрицательно ( $\rho < 0$ ) — при  $\Phi > 0$ .

Если условие  $\rho'(\Phi) \leq 0$  выполняется не только на границе слой–плазма, но и везде внутри слоя, полярность слоя (sign  $\rho$ ) неизменна, т.е. реализуется монослой. Вместе с тем полярность слоя может измениться внутри слоя, если условие (7) выполняется на границе слой–плазма, а внутри слоя в некоторой точке, где  $\phi = \phi_*$  ( $\Phi = \Phi_*$ ) имеет место

$$\rho(\Phi_*) = 0, \quad \rho'(\Phi_*) \geq 0. \quad (18)$$

На рис. 2 схематично показано распределение плотности заряда в слое в этом случае.

Видно, что выполнение условия (18) означает, что заряженный слой имеет структуру двойного слоя: он содержит два подслоя с различными знаками заряда при фиксированной полярности стенки. При этом подслое, примыкающий к плазме, имеет знак заряда, противоположный полярности стенки, в то время как подслое,



**Рис. 2.** Качественный характер поведения  $\rho(\varphi)$  в случае образования двойного слоя.

примыкающий к стенке, имеет знак заряда, совпадающий с ее полярностью.

Чтобы найти  $\Phi_*$ , воспользуемся уравнениями (3) и (4). Так как  $\rho(\Phi_*) = 0$  (см. (18)), т.е.  $N_-(\Phi_*) = N_+(\Phi_*)$ , получим

$$\Phi_* = (\tau_- - \tau_+) \ln N_*, \quad (19)$$

$$G \left( \frac{1}{N_*^2 - 1} \right) + \ln N_*^2 = 0. \quad (20)$$

Здесь обозначено  $N_* = n_{\pm}(\Phi_*)/n_0$ , а  $G$  было определено в (15). Соотношения (19) и (20) означают, что для стационарности границы между подслоями действие электрического поля должно уравниваться разностью давлений компонент плазмы, тогда как их суммарное давление должно уравнивать силу инерции. Уравнение (20) анализировалось в [8], где было показано, что при всех положительных  $G$  оно имеет два положительных корня, один из которых есть  $N_{*1} = 1$  и, следовательно  $\varphi_{*1} = 0$ , т.е. этот корень соответствует границе слой–плазма, а второй корень  $N_{*2}$  соответствует точке внутри слоя, причем  $N_{*2} \geq 1$  при  $G \geq 1$  и, наоборот,  $N_{*2} \leq 1$  при  $G \leq 1$ . Заметим, что существование только одного корня внутри слоя означает, что знак заряда изменяется внутри слоя только один раз и тройные слои невозможны. Используя этот факт и вышеприведенные результаты, мы можем найти область существования корней на плоскости  $(\tau_+, \tau_-)$ . Для этого удобно воспользоваться рис. 1. Если  $\tau_+ = \tau_-$  (температуры компонент плазмы совпадают), то корень  $N_{*1} = 1$  ( $\varphi_{*1} = 0$ ) расположен на линии нейтральности, где  $G = 1$ . Из (20) следует, что если  $G \geq 1$  и  $\varphi_W > 0$ , то второй корень  $N_{*2} \geq 1$  ( $\varphi_{*2} > 0$ ) располагается в области  $C$ , где  $\tau_+ < 1$  и  $\tau_- \geq \tau_+$ . Если  $G \geq 1$ , но  $\varphi_W < 0$ , то  $\varphi_{*2} < 0$ , и второй корень располагается в области  $D$ , где  $\tau_- < 1$  и  $\tau_- \leq \tau_+$ . Аналогично, когда  $G \leq 1$  и  $\varphi_W > 0$ , то второй корень  $N_{*2} < 1$  ( $\varphi_{*2} > 0$ ) расположен в области  $B_+$  ( $\tau_- \leq \tau_+$ ), но если  $\varphi_W < 0$ , то  $\varphi_{*2} < 0$ , и корень находится в области  $B_-$  ( $\tau_- \geq \tau_+$ ).

Таким образом, из проведенного анализа следует, что  $N_{*2} \geq 1$  в областях  $C$  и  $D$ , где  $G \geq 1$ , и  $N_{*2} < 1$  в областях  $B_+$  и  $B_-$ , где  $G \leq 1$ . Чтобы окончательно убедиться в формировании двойного слоя, необходимо

проверить выполнение второго условия (18)  $\rho'(\Phi_*) \geq 0$ . Для этого воспользуемся уравнениями (8). Рассмотрим область  $B$ , где  $\tau_+ > 1$  и  $\tau_- > 1$ , а поэтому  $N_{*2} < 1$  и  $G \leq 1$ . Поскольку  $N_+(0) = N_-(0) = 1$ , то функции  $N_+(\Phi)$  и  $N_-(\Phi)$  должны убывать с удалением от границы слой–плазма. Следовательно, в области  $B_+$  должно быть  $dN_{\pm}/d\Phi < 0$  для  $\Phi_W \geq \Phi > 0$ , причем вблизи  $\Phi_*$  функция  $N_-(\Phi)$  должна убывать быстрее, чем  $N_+(\Phi)$ . В области  $B_-$   $dN_{\pm}/d\Phi > 0$  для  $\Phi_W \leq \Phi < 0$ , и вблизи  $\Phi_*$  должно быть  $dN_-/d\Phi > dN_+/d\Phi$ . Согласно (8), эти условия приводят к следующим неравенствам:

— в области  $B_+$

$$\tau_- N_-^2 < 1, \quad \tau_+ N_+^2 > 1, \quad \tau_- N_-^2 + \tau_+ N_+^2 > 2; \quad (21)$$

— в области  $B_-$

$$\tau_+ N_+^2 < 1, \quad \tau_- N_-^2 > 1, \quad \tau_- N_-^2 + \tau_+ N_+^2 > 2. \quad (22)$$

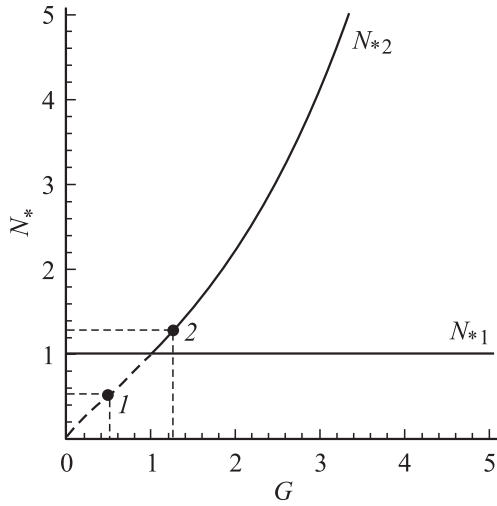
Поскольку  $\tau_{\pm} > 1$  во всей области  $B$ , то первое из неравенств для каждой области  $B_{\pm}$  противоречит условию  $N_{\pm}(0) = 1$ . Следовательно, в области  $B$  функции  $N_{\pm}(\Phi)$ , удовлетворяющие условию  $N_{\pm}(0) = 1$ , не удовлетворяют неравенству (18). Таким образом, формирование двойного слоя в плазме с параметрами из области  $B$  невозможно.

Рассмотрим теперь область  $C$ , где  $N_{*2} \geq 1$  и  $G \geq 1$ . Здесь функции  $N_+(\Phi)$  и  $N_-(\Phi)$  должны возрастать с удалением от границы плазма–слой. Следовательно, в области  $C$  должно быть  $dN_{\pm}/d\Phi > 0$  для  $\Phi_W \geq \Phi > 0$ , причем функция  $N_+(\Phi)$  должна возрастать вблизи  $\Phi_*$  быстрее, чем  $N_-(\Phi)$ , а в области  $D$   $dN_{\pm}/d\Phi < 0$  для  $\Phi_W \leq \Phi < 0$ , и вблизи  $\Phi_*$  должно быть  $dN_-/d\Phi > dN_+/d\Phi$ . Следовательно, в области  $C$  должны выполняться те же неравенства (22), что и в области  $B_-$ , а в области  $D$  те же неравенства (21), что и в области  $B_+$ . На границе слоя, где  $N_+(0) = N_-(0) = 1$ , первые два неравенства в (21) и (22), очевидно, выполняются в соответствующих областях, а последнее — нет, поскольку  $G \geq 1$ . Это значит, что в области  $C$  у границы слоя функция  $N_+(\Phi)$  возрастает медленнее, чем  $N_-(\Phi)$ , и догоняет последнюю только при  $\Phi \sim \Phi_*$ ,  $N_+^2 \sim N_-^2 \sim N_*^2 > G$ . Соответственно в области  $D$  при удалении от границы слоя функция  $N_-(\Phi)$  сначала возрастает медленнее, чем  $N_+(\Phi)$ , и только при  $\Phi \sim \Phi_*$  догоняет последнюю.

Для иллюстрации сказанного приведем график зависимости 2-го корня уравнения (20)  $N_{*2}(G)$  — концентрации плазмы внутри двойного слоя в квазинейтральном сечении ( $N_+(\Phi_*) = N_-(\Phi_*) = N_*$ ) (рис. 3) и точные значения  $N_{*2}(G)$  и электростатического потенциала  $\Phi_*(G)$  в этом же сечении:

$$N_{*2}(G) = \begin{cases} \sqrt{-\frac{G}{W_{-1}[-G \exp(-G)]}} & \text{при } G < 1, \\ \sqrt{-\frac{G}{W_0[-G \exp(-G)]}} & \text{при } G > 1; \end{cases} \quad (23)$$

$$\Phi_* = (1 - G\tau_+) \left\{ 1 + \frac{1}{G} W_{0,-1}[-G \exp(-G)] \right\}, \quad (24)$$



**Рис. 3.** Зависимость концентрации плазмы в квазинейтральном сечении внутри двойного слоя (корней уравнения (20)) от параметра  $G$ : нефизичный участок показан пунктиром, пронумерованные точки соответствуют численным примерам.

где  $W_0(x)$  и  $W_{-1}(x)$  — соответственно основная и отрицательная действительные ветви  $W$ -функции Ламберта [11,12]. Эта функция определяется как решение уравнения  $W(x) \exp W(x) = x$ , причем указанные ветви  $W$ -функции разделяются точкой с координатой  $(-1/e, -1)$ , где они непрерывно переходят друг в друга. Что касается формул (23) и (24), то если  $G > 1$ , в них необходимо использовать основную ветвь  $W$ -функции Ламберта, если  $G < 1$  — то отрицательную.

Заметим, что график функции  $\Phi_*(G)$  (24) построить нельзя, так как она зависит еще и от разности  $\tau_- - \tau_+$ .

Что касается графика  $N_{*2}(G)$ , то его участок, соответствующий  $G < 1$ , показан пунктиром, поскольку на этом участке двойной слой невозможен.

#### 4. Решение задачи и анализ

Уравнения (3) и (4) можно решить относительно концентраций  $N_{\pm}$ , получив при этом

$$N_-(\Phi) = \frac{1}{\sqrt{-\tau_- W_{0,-1} \left[ -\frac{1}{\tau_-} \exp \left( -\frac{1+\Phi}{\tau_-} \right) \right]}}, \quad (25)$$

$$N_+(\Phi) = \frac{1}{\sqrt{-\tau_+ W_{0,-1} \left[ -\frac{1}{\tau_+} \exp \left( -\frac{1-\Phi}{\tau_+} \right) \right]}}, \quad (26)$$

Путем простой подстановки выражений (25) и (26) можно легко убедиться, что они действительно являются корнями уравнений (3) и (4).

Важно, что решения (25) и (26) уравнений (3) и (4) имеют по две ветви, т. е. являются двузначными. Причем корень (25), выраженный через основную ветвь  $W_0$ , представляет собой строго возрастающую функцию  $\Phi$ , а

корень, выраженный через отрицательную ветвь  $W_{-1}$ , — строго убывающую. Корень, выраженный в (26) через основную ветвь  $W_0$ , является строго убывающей функцией, а корень, выраженный через отрицательную ветвь  $W_{-1}$ , — строго возрастающей.

Чтобы отбросить лишние нефизичные корни, воспользуемся условием квазинейтральности границы слоя, примыкающей к невозмущенной плазме. Согласно этому условию, должно быть

$$(N_+ - N_-)|_{\Phi=0} = 0, \quad (27)$$

а это возможно только при

$$N_{\pm}|_{\Phi=0} = 1. \quad (28)$$

Математический анализ показал, что для выполнения условий (27) и (28) при  $\tau_- > 1$  в (25) необходимо выбирать основную ветвь  $W_0(x)$ , тогда как при  $\tau_- < 1$  необходимо выбирать отрицательную ветвь  $W_{-1}(x)$  функции Ламберта. Аналогично для (26) при  $\tau_+ > 1$  только основная ветвь  $W_0(x)$  может удовлетворять условию квазинейтральности, а при  $\tau_+ < 1$  — только отрицательная ветвь  $W_{-1}(x)$ . Границы между ветвями  $\tau_+ = 1$  и  $\tau_- = 1$  означают физически равенство невозмущенной скорости плазмы тепловой скорости соответствующей компоненты.

Решения (25) и (26) определяют концентрацию отрицательных частиц  $N_-(\Phi)$  при  $\Phi \geq \Phi_{\min}$ , а положительных  $N_+(\Phi)$  — при  $\Phi \leq \Phi_{\max}$ . Таким образом, плотность пространственного заряда  $\rho(\Phi)$  определена на отрезке  $[\Phi_{\min}, \Phi_{\max}]$ , концы которого легко определить как точки сопряжения ветвей  $W$ -функции Ламберта соответствующих аргументов (в точке сопряжения ее аргумент должен быть равен  $-\exp(-1)$ ):

$$\Phi_{\min} = \tau_- - \tau_- \ln \tau_- - 1; \quad (29)$$

$$\Phi_{\max} = -\tau_+ + \tau_+ \ln \tau_+ + 1. \quad (30)$$

Из (25) и (26) можно получить выражение для плотности заряда

$$\rho(\Phi) = \frac{1}{\sqrt{-\tau_+ W_{0,-1} \left[ -\frac{1}{\tau_+} \exp \left( -\frac{1-\Phi}{\tau_+} \right) \right]}} - \frac{1}{\sqrt{-\tau_- W_{0,-1} \left[ -\frac{1}{\tau_-} \exp \left( -\frac{1+\Phi}{\tau_-} \right) \right]}} \quad (31)$$

и ее производной по  $\Phi$

$$\rho'(\Phi) = \frac{W_{0,-1} \left[ -\frac{1}{\tau_+} \exp \left( -\frac{1-\Phi}{\tau_+} \right) \right]}{2 \left\{ -\tau_+ W_{0,-1} \left[ -\frac{1}{\tau_+} \exp \left( -\frac{1-\Phi}{\tau_+} \right) \right] \right\}^{3/2} \left\{ 1 + W_{0,-1} \left[ -\frac{1}{\tau_+} \exp \left( -\frac{1-\Phi}{\tau_+} \right) \right] \right\}} + \frac{W_{0,-1} \left[ -\frac{1}{\tau_-} \exp \left( -\frac{1+\Phi}{\tau_-} \right) \right]}{2 \left\{ -\tau_- W_{0,-1} \left[ -\frac{1}{\tau_-} \exp \left( -\frac{1+\Phi}{\tau_-} \right) \right] \right\}^{3/2} \left\{ 1 + W_{0,-1} \left[ -\frac{1}{\tau_-} \exp \left( -\frac{1+\Phi}{\tau_-} \right) \right] \right\}} \quad (32)$$

В полном соответствии с предыдущими результатами из (32) следует, что неравенство в (7) выполняется только в областях, закрашенных на рис. 1.

Подставим (31) в уравнение Пуассона (2), получив в итоге обыкновенное дифференциальное уравнение для  $\Phi(s)$ :

$$\frac{d^2\Phi}{ds^2} = -\frac{1}{\sqrt{-\tau_+ W_{0,-1} \left[ -\frac{1}{\tau_+} \exp\left(-\frac{1-\Phi}{\tau_+}\right) \right]}} + \frac{1}{\sqrt{-\tau_- W_{0,-1} \left[ -\frac{1}{\tau_-} \exp\left(-\frac{1+\Phi}{\tau_-}\right) \right]}}. \quad (33)$$

Это уравнение легко интегрируется, его общее решение можно записать в виде

$$s - C_1 = \int_{\Psi=\Phi(s)} \frac{d\Psi}{2\sqrt{R_-(\Psi) - \frac{\tau_-}{R_-(\Psi)} + R_+(\Psi) - \frac{\tau_+}{R_+(\Psi)} + C_2}}, \quad (34)$$

где  $C_{1,2}$  — постоянные интегрирования и

$$R_{\pm}(\Psi) = \sqrt{-\tau_{\pm} W_{0,-1} \left[ -\frac{1}{\tau_{\pm}} \exp\left(-\frac{1 \mp \Psi}{\tau_{\pm}}\right) \right]}. \quad (35)$$

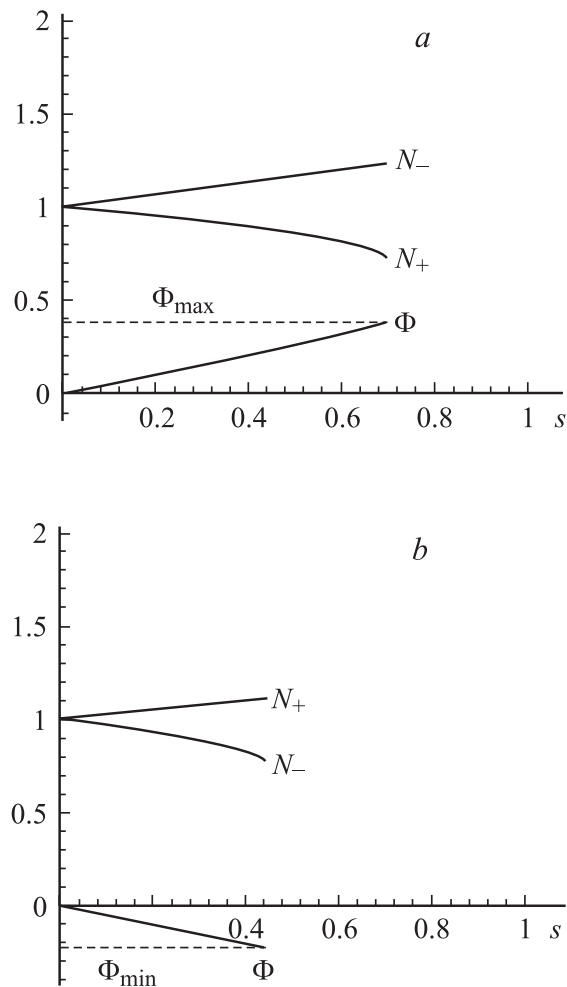
Полученное решение позволяет представить графически профили электростатического потенциала и концентрации компонент плазмы при различных параметрах  $\tau_+$  и  $\tau_-$ . В качестве примеров были рассмотрены два набора параметров плазмы:  $\tau_+ = 2$ ;  $\tau_- = 7/4$  для области  $B_+$  (обозначено точкой 1 на рис. 1) и  $\tau_+ = 4/3$ ;  $\tau_- = 1/4$  для области  $D$  (точка 2 на рис. 1). При этом в силу симметрии карты областей на рис. 1 нет необходимости в рассмотрении примеров для областей  $B_-$  и  $C$ .

Числовые значения величин для данных примеров сведены в таблицу.

Область	$\tau_+$	$\tau_-$	$G$	$N_*$	$\Phi_*$	$\Phi_{\max}$	$\Phi_{\min}$
$B_+$	2	1.75	0.533	0.563	0.144	0.386	-0.229
$D$	1.33	0.25	1.263	1.276	-0.264	0.050	-0.403

В расчетах электрическое поле на границе слой–плазма выбиралось как свободный параметр, как и в работе [8], причем отрицательному полю соответствует положительный потенциал стенки, и наоборот. В численных примерах бралось  $E(0) = \pm 1/2$ .

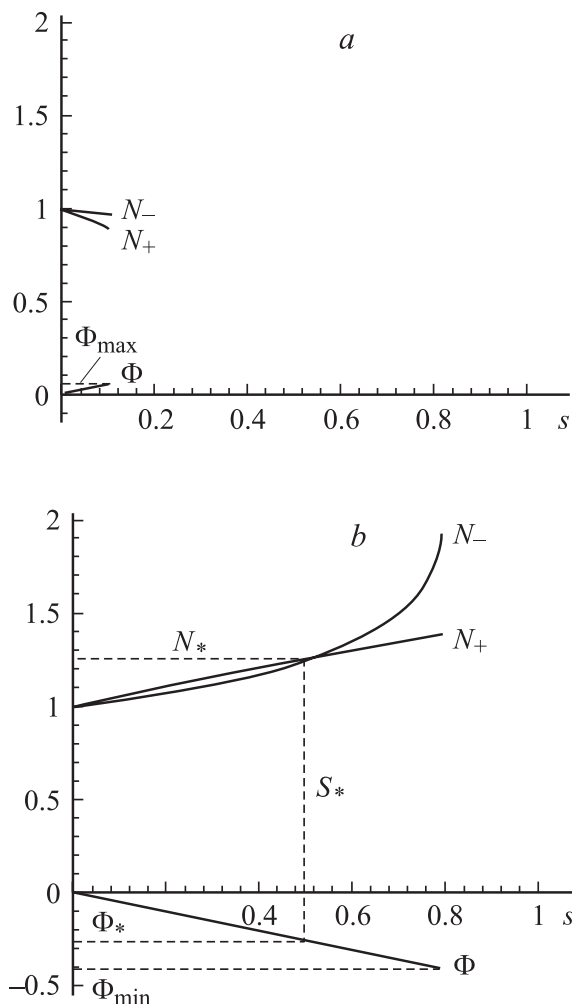
На рис. 4 представлены профили электростатического потенциала и концентраций частиц для обоих вариантов полярности стенки. Параметры плазмы соответствовали области  $B_+$ , в которой необходимо выбрать основную ветвь  $W$ -функции Ламберта для обоих слагаемых в (33). Видно, что по мере продвижения в глубь слоя к стенке одна из концентраций монотонно растет, а другая падает. Этот факт присущ только областям  $B_+$  и  $B_-$ . Расчеты



**Рис. 4.** Профили безразмерных электростатического потенциала  $\Phi(s)$  и концентраций частиц  $N_{\pm}(s)$  в пристеночном слое для области параметров  $B_+$  (для точки 1 на рис. 1), числовые данные из таблицы показаны пунктиром: *a*) для положительно заряженной стенки, *b*) для отрицательно заряженной.

также показали, что двойной слой здесь не образуется в согласии с результатами анализа в п. 3. При этом оказывается, что строго возрастающая ветвь зависимости  $N_-(\Phi)$  из (25) и строго убывающая ветвь зависимости  $N_+(\Phi)$  из (26) могут пересечься только один раз, что и происходит в точке  $N_{*1} = 1$  при  $\Phi_{*1} = 0$ . А всегда существующий второй корень  $N_{*2} < 1$  уравнения (20) соответствует пересечению отброшенных нефизических ветвей (25) и (26), которые не удовлетворяют условию квазинейтральности на границе слой–плазма. Таким образом, еще раз подчеркнем, что двойной слой в областях  $B_{\pm}$  невозможен.

На рис. 5 представлены профили электростатического потенциала и концентраций частиц для области  $D$  также для обоих вариантов полярности стенки. Здесь характер изменения концентраций другой: концентрации частиц обоих знаков либо вместе растут, либо вместе убыва-



**Рис. 5.** Профили безразмерных электростатического потенциала  $\Phi(s)$  и концентраций частиц  $N_{\pm}(s)$  в пристеночном слое для области параметров  $D$  (для точки 2 на рис. 1), числовые данные из таблицы показаны пунктиром: *a*) для положительно заряженной стенки, *b*) для отрицательно заряженной.

ют. Как и предсказывалось в п. 3, при определенной полярности потенциала стенки возможно образование двойного слоя.

## Заключение

Основные результаты работы можно суммировать следующим образом. Рассмотрены особенности образования и структура стационарного заряженного слоя на границе между симметричной плазмой и стенкой. Показано, что структура слоя существенно зависит от следующих параметров: отношений  $\tau_{\pm}$  (для обеих компонент плазмы) тепловой скорости к потоковой в начале слоя, а также от знака и величины электростатического потенциала стенки  $\phi_w$ ; при этом возможность существования слоя зависит от  $\tau_{\pm}$  и не зависит от знака  $\phi_w$ . Найдено, что структура типа „двойной слой“ может формироваться

не во всех областях параметров, при которых слой существует: в областях  $B_{\pm}$  двойной слой невозможен, в то время как в областях  $C$  и  $D$  двойной слой может реализоваться при определенном знаке  $\phi_w$ . Тогда заряженный слой содержит два подслоя с различными знаками заряда при фиксированной полярности стенки. При этом подслои, примыкающий к плазме, имеет знак заряда, противоположный полярности стенки, в то время как подслои, примыкающий к стенке, имеет знак заряда, совпадающий с ее полярностью.

Работа А.Е.Д. выполнялась в рамках гранта NWO-047.016.020 (Нидерланды).

## Список литературы

- [1] Greaves R.G., Surko C.M. // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. N 21. P. 3846.
- [2] Surko C.M., Greaves R.G. // Phys. Plasmas. 2004. Vol. 11. N 5. P. 2333.
- [3] Boehmer H., Adams M., Rynn N. // Phys. Plasmas. 1995. Vol. 2. N 11. P. 4369.
- [4] Liang E.P., Wilks S.C., Tabak M. // Phys. Rev. Lett. 1998. Vol. 81. N 22. P. 4887.
- [5] Oohara W., Hatakeyama R. // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91. N 20. P. 205 005-1.
- [6] Жаров А.А., Фрайман Г.М. // Физ. плазмы. 1987. Т. 13. № 3. С. 858.
- [7] Alterkop B.A. // J. Appl. Phys. 2004. Vol. 95. N 4. P. 1650.
- [8] Альтеркоп Б.А., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е. // ЖЭТФ. 2006. Т. 102. Вып. 1. С. 173.
- [9] Alterkop B.A., Dubinova I.D., Dubinov A.E., Voxman R.L. // Contrib. Plasma Phys. 2007. Vol. 47. N 3. P. 190.
- [10] Lundgren L. // J. Appl. Phys. 1983. Vol. 54. N 8. P. 4354.
- [11] Дубинова И.Д. // Физ. плазмы. 2004. Т. 30. № 10. С. 937.
- [12] Dubinov A.E., Dubinova I.D. // J. Plasma Phys. 2005. Vol. 71. N 5. P. 715.