Журнал технической физики, 2007, том 77, вып. 8

01;03;05

К физическому смыслу критической равновесной толщины пленки на поверхности градины

© Р.Г. Закинян

Ставропольский государственный университет,
355035 Ставрополь, Россия

(Поступило в Редакцию 30 марта 2006 г. В окончательной редакции 10 января 2007 г.)

Анализ существующих теорий роста градин показал, что существует два различных подхода, объясняющих слоистую структуру градин. Л.Г. Качуриным было показано, что слоистая структура льда на поверхности предмета, помещенного в поток переохлажденного водного аэрозоля, определяется равновесной толщиной пленки. Другой подход основан на уравнении теплового баланса на поверхности градины и введении понятия критической водности облака. Определен смысл критической равновесной толщины пленки, установлена связь между двумя существующими критериями, определяющими переход от сухого режима роста градин к мокрому режиму.

PACS: 64.90.+b, 92.60.Jq

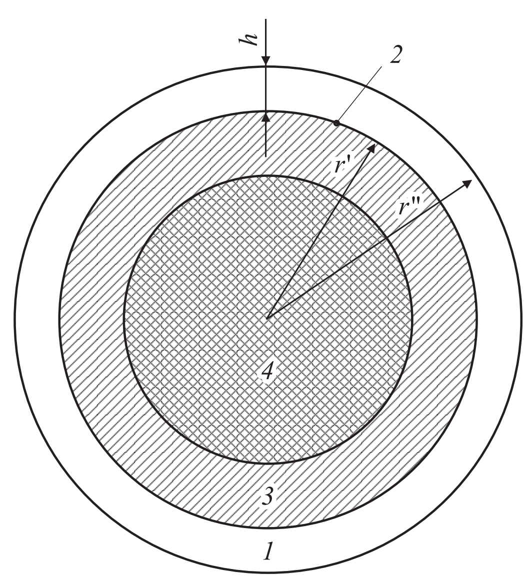
Введение

Современные представления о росте градин опираются на теорию Шумана–Лудлама [1–9]. При этом трудной проблемой остается учет наличия пленки на поверхности градины, существенно влияющей на термодинамику роста градины.

Многие исследователи [1,6,7,10,11] решали эту проблему. Анализ существующих теорий роста градин показал, что существует два различных подхода к решению данной задачи. Л.Г. Качуриным в [6] было показано, что слоистая структура льда на поверхности предмета, помещенного в поток переохлажденного водного аэрозоля, определяется равновесной толщиной пленки h_b. Скорость роста толщины пленки воды на поверхности градины определяется разностью скоростей притока капель и движения фронта кристаллизации (см. рисунок).

Если толщина пленки воды на поверхности градины $h < h_b$, то пленка неустойчива и толщина пленки с течением времени уменьшается. При этом капли замерзают на поверхности градины, не образуя пленки, что приводит к образованию матовой неоднородной структуры льда, т. е. в этом случае скорость движения фронта кристаллизации больше, чем скорость притока капель на поверхность градины. Если $h > h_b$, то пленка устойчива, она начинает расти и при этом образуется прозрачная структура льда. В этом случае скорость притока капель больше, чем скорость движения фронта кристаллизации. Рост льда происходит под пленкой с образованием прозрачной однородной структуры льда. Таким образом, равновесная толщина пленки — эта такая толщина, при которой скорость роста толщины пленки за счет притока капель равняется скорости движения фронта кристаллизации. Недостатком теории Качурина является то, что в ней не учтен тепло-массообмен на поверхности пленки, и температура поверхности пленки считается постоянной. Кроме того, из анализа экспериментальных данных Качурин приходит к понятию критической равновесной толщины пленки, которое непосредственно из теории не вытекает. Смысл же этого понятия остается открытым.

Другой подход основан на уравнении теплового баланса на поверхности градины при отсутствии пленки воды на ней и введении понятия критической водности. Наиболее полно данный подход отражен в работе М.К. Жекамухова [1]. Приравняв скорость движения фронта кристаллизации скорости притока капель при условии, что все капли на поверхности градины замерзают, не образуя пленки воды, получают выражение для критической водности облака. Если водность облака (масса жидкокапельной фракции в единице объема облака) больше некоторой критической водности Шумана–Лудлама q_{cr}, то на поверхности градины образуется жидкая пленка, и она со временем растет до некоторого значения, после чего происходит срыв капель с поверхности пленки. Ес-



Рост пленки на поверхности градины: *1* — пленка воды, *2* — фронт кристаллизации, *3* — слой льда, *4* — зародыш градины.

ли же водность облака $q < q_{\rm cr}$, капли кристаллизуются на поверхности градины, не сливаясь в пленку, т.е. градина растет в сухом режиме и при этом образуется матовая структура льда. Другими словами, критическая водность Шумана–Лудлама — это такая максимальная водность облака, при которой капли, оседающие на градину, замерзают, не образуя пленки.

В [12–14] теория Качурина была развита с учетом тепло-массообмена на поверхности пленки и были установлены связи между существующими теориями роста градин: Шумана–Лудлама, Качурина и Жекамухова. Однако вопрос о равновесной толщине пленки и ее смысле так и остался открытым.

Целью настоящей статьи является установление связей между существующими критериями, определяющими переход от сухого режима роста градин к мокрому, и выяснение физического смысла критической равновесной толщины пленки.

1. Равновесная толщина пленки

Постановка задачи: решить задачу роста льда на поверхности градины, находящейся в потоке переохлажденного водного аэрозоля, с учетом виртуально образовавшейся пленки с начальной толщиной h_0, в которой температура равномерно распределена и равна температуре ледяного ядра T_0.

В [12] была установлена зависимость температуры поверхности пленки от толщины пленки, выражаемая формулой Жекамухова

$$\theta_s = \theta_\infty \frac{h}{h_t + h}, \tag{1}$$

где $\theta = T_0 - T$, T_s — температура поверхности пленки; T_∞ — температура окружающей среды; $T_0 = 273\,\mathrm{K}$ — температура фронта кристаллизации; h — толщина пленки; h_t — параметр, имеющий размерность длины, смысл которого будет разъяснен ниже.

С учетом этой зависимости для скорости роста толщины пленки была установлена закономерность (см. рисунок)

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dr''}{dt} - \frac{dr'}{dt} = u - \frac{k_0'}{h_t + h}, \tag{2}$$

где первое слагаемое

$$\frac{dr''}{dt} = \frac{qEV}{4\rho_h} \equiv u$$

определяет рост градины за счет притока капель; r'' — радиус поверхности пленки (расстояние от центра градины до поверхности пленки); второе слагаемое

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{k_0'}{h_t + h}$$

получается из уравнения теплового баланса на фронте кристаллизации и определяет скорость движения фронта кристаллизации; r' — радиус фронта кристаллизации (расстояние от центра градины до фронта кристаллизации);

$$k_0' = \frac{\lambda\theta_\infty}{\rho L_c};$$

q — водность облака; E — коэффициент захвата капель; V — скорость падения градины; ρ — плотность воды; ρ_h — плотность градины; L_c — удельная теплота кристаллизации воды; $h_t = 2R/G$;

$$G = \frac{\lambda_a + DL\delta\,\mathrm{Sh/Nu}}{\lambda}\,\mathrm{Nu} = G_0\,\mathrm{Nu};$$

$G_0 \approx 7 \cdot 10^{-2}$; λ, λ_a — соответственно коэффициенты молекулярной теплопроводности воды и воздуха; D — коэффициент молекулярной диффузии водяного пара в воздухе; L — удельная теплота испарения воды; R — радиус градины; $\delta \approx 2.7 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{kg/(m^3 \cdot {}^\circ C)}$; Nu — число Нуссельта; Sh — число Шервуда.

Из (2) при $dh/dt = 0$ следует, что существует критическая скорость притока капель

$$u_{\rm cr} = \frac{k_0'}{h_t + h}, \tag{3}$$

определяющая режим роста пленки на поверхности градины. Критическая скорость притока капель — это такая скорость, при которой скорость роста толщины пленки за счет притока капель равна скорости движения фронта кристаллизации. Если же $u < u_{\rm cr}$, то скорость притока капель на поверхность градины меньше скорости движения фронта кристаллизации. При этом толщина пленки уменьшается, т.е. если в начальный момент времени на поверхности градины имелась пленка, то при условии $u < u_{\rm cr}$ фронт кристаллизации догонит поверхность пленки, и дальнейший рост льда будет происходить в отсутствие пленки. Градина будет расти в сухом режиме. Если $u > u_{\rm cr}$, то скорость притока капель больше скорости движения фронта кристаллизации. При этом толщина пленки увеличивается. Рост льда будет проходить под пленкой.

При $h = 0$ формула (3) дает выражение для критической скорости притока капель, которая следует из теории Шумана–Лудлама:

$$(u_{\rm cr})_{\rm Sh-L} = \frac{k_0'}{h_t}. \tag{4}$$

Из формулы (3) следует, что если при критической водности Шумана–Лудлама на поверхности градины образуется пленка, которая растет, то для дальнейшего поддержания роста пленки критическая водность облака может быть меньше критической водности Шумана–Лудлама, т.е. согласно формуле (3), чем больше толщина пленки, тем меньше критическая водность. А это противоречит экспериментальным данным. Поэтому Жекамухов предлагает, так как $h \ll h_t$ (для градины радиусом $R = 1 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m}$, $h_t = 3 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{m}$), то формулу (2) записывать в виде

$$\frac{dh}{dt} = u - \frac{k_0'}{h_t} = u - u_{\rm cr}. \tag{5}$$

При такой записи понятие равновесной толщины пленки становится ненужным. Получается простая картина: при водности облака, большей критической водности Шумана–Лудлама, пленка на поверхности градины растет, а при водности облака, меньшей критической водности Шумана–Лудлама, пленка на поверхности градины уменьшается. При такой ситуации между теориями Качурина и Жекамухова нет связи. Одна теория полностью отвергает другую.

В [12] была рассмотрена ситуация, когда рост пленки описывается более общей формулой (2), а не (5). Однако проблема критической равновесной толщины пленки осталась открытой. Это понятие было введено в теорию согласно экспериментальным данным Качурина. Чтобы формула (2) правильно описывала экспериментальные данные и чтобы понятие критической равновесной толщины пленки следовало из теории, следует предположить, не вдаваясь в кинетику образования, что слой жидкости с начальной толщиной пленки может образовываться скачкообразно, т. е. виртуально (по терминологии Л.Г. Качурина — спонтанно). Согласно Качурину, в облаке имеется крупнокапельная фракция, которая способствует виртуальному образованию пленки. Посмотрим, как изменятся расчеты.

Толщина пленки, образующейся на поверхности градины, определяется разностью скоростей роста градины за счет притока капель и движения фронта кристаллизации [2,11].

Скорость движения поверхности пленки за счет притока капель определяется из уравнения баланса массы выражением [1–5,11]

$$\frac{dr''}{dt} = \frac{qEV}{4\rho_h} \equiv u. \tag{6}$$

Скорость движения фронта кристаллизации r' определяется из уравнения теплового баланса [10,11]

$$\rho L_c \frac{dr'}{dt} + \lambda \frac{dT}{dr}\Big|_{r=r'} = 0. \tag{7}$$

Уравнение (7) — есть условие Стефана [15], при этом мы пренебрегли оттоком тепла внутрь ледяной сферы [1,5].

Запишем уравнение теплового баланса на поверхности пленки [1,12]:

$$-4\pi R^2 \lambda \frac{dT}{dr}\Big|_{r=r''} = 2\pi R \lambda_a \,\mathrm{Nu}\,(T_s - T_\infty) + 2\pi R D \,\mathrm{Sh}\, L(\rho_s - \rho_\infty), \tag{8}$$

где L — удельная теплота испарения воды; ρ_s, ρ_∞ — плотность водяного пара у поверхности пленки и в окружающей среде.

Примем, что в пленке устанавливается стационарное распределение температуры [11,12]

$$-\frac{dT}{dr}\Big|_{r=r'} = -\frac{dT}{dr}\Big|_{r=r''} \approx \frac{T_0 - T_s}{h - h_0}. \tag{9}$$

В формуле (9) мы предположили, что в начальный момент времени на поверхности градины имеется пленка воды толщиной h_0 с равномерным распределением температуры, т. е. температура по всей толщине пленки одинакова и равна T_0. Изменение толщины пленки и температуры поверхности пленки происходит при дальнейшем росте градины в результате тепло-массообмена с поверхности пленки.

В первом приближении можно положить [1]

$$\rho_s - \rho_\infty = \delta(T_s - T_\infty). \tag{10}$$

Подставив (9) в (8) с учетом (10), получим

$$T_0 - T_s = (h - h_0)(T_s - T_\infty)\,\frac{\lambda_a \,\mathrm{Nu} + D\,\mathrm{Sh}\, L\delta}{2\lambda R}. \tag{11}$$

Введем следующее обозначение:

$$G = \frac{\lambda_a + DL\delta\,\mathrm{Sh/Nu}}{\lambda}\,\mathrm{Nu} = G_0\,\mathrm{Nu}. \tag{12}$$

В [12] было предложено безразмерную величину G называть числом Жекамухова. Учитывая, что для градины $\mathrm{Sh/Nu} \approx 1$ [1,5], найдем $G_0 \approx 7 \cdot 10^{-2}$ (постоянная Жекамухова [12]). Сделаем замену переменных $T_0 - T = \theta$. Окончательно для температуры поверхности пленки получим

$$\theta_s = \theta_\infty \frac{h - h_0}{h_t + h - h_0}, \tag{13}$$

где $h_t = 2R/G$. Учитывая, что для градины [1] $\mathrm{Nu} \approx \approx \beta R^{3/4}$, где $\beta \approx 3093\,\mathrm{m}^{-3/4}$, для h_t получим выражение: $h_t = (2/G_0\beta)R^{1/4}$ или, если R и h измерять в m, то $h_t = 9.238 \cdot 10^{-3} R^{1/4}$ [2].

Из (13) видно, что при $h = h_0$ $\theta_s = 0$, т. е. $T_s = T_0$, а при $h \to \infty$ (или $h \gg h_t$, т. е. при больших числах Жекамухова) $\theta_s \to \theta_\infty$, т. е. температура поверхности пленки много выше температуры окружающей среды.

Итак, в теории Качурина [10] считается, что температура поверхности пленки величина постоянная, что, как следует из (13), верно при больших числах Жекамухова. В [1] считается, что температура поверхности пленки пропорциональна толщине пленки, что, как следует из (13), верно при малых числах Жекамухова. В [12] теория роста градин была рассмотрена в общем случае, когда температура поверхности пленки описывается выражением (1).

С учетом (13) выражение для скорости движения фронта кристаллизации примет вид

$$\frac{dr'}{dt} = \frac{\lambda}{\rho L_c}\,\frac{\theta_\infty}{h_t + h - h_0} = \frac{k_0'}{h_t + h - h_0}, \tag{14}$$

где $k_0' = \lambda\theta_\infty/\rho L_c = (c\theta_\infty/L_c)k$, c — удельная теплоемкость воды, k — коэффициент молекулярной температуропроводности воды. Из (14) видно, что с увеличением толщины пленки скорость движения фронта кристаллизации уменьшается.

Для скорости изменения толщины пленки получим уравнение

$$\frac{dh}{dt} = \frac{dr''}{dt} - \frac{dr'}{dt} = u - \frac{k_0'}{h_t + h - h_0}. \qquad (15)$$

Из условия $dh/dt = 0$ найдем равновесную толщину пленки

$$h_b = \frac{k_0'}{u} - h_t + h_0. \qquad (16)$$

С учетом (16) выражение (15) запишем в виде

$$\frac{dh}{dt} = u\left(1 - \frac{h_t + h_b - h_0}{h_t + h - h_0}\right). \qquad (17)$$

Решение (17) имеет вид

$$h - h_0 + (h_t + h_b)\ln\left|\frac{h - h_b}{h_0 - h_b}\right| = ut, \qquad (18)$$

где h_0 — начальная толщина пленки.

Из (15)–(17) следует, что если $dh/dt = 0$ и $h_0 = 0$, т. е. пленка на поверхности градины отсутствует, то $h_b = 0$. А это может иметь место, как следует из (16), если водность $q = q_{\mathrm{Sh-L}}$ (формула (4)), т. е. когда пленка отсутствует, оба параметра (равновесная толщина пленки и критическая водность Шумана–Лудлама) определяют режим роста градины. Можно говорить как о равновесной толщине пленки, так и о критической водности Шумана–Лудлама.

Когда $q > q_{\mathrm{Sh-L}}$, на поверхности градины образуется пленка, но она неустойчива. В теории Качурина [10] пленка может расти, если начальная толщина пленки больше равновесной: $h_0 > h_b$. Но сложно объяснить, как появляется слой жидкости с начальной толщиной, превышающей равновесную. Для этого, как было отмечено выше, Качурин предположил, что в облаке имеется крупнокапельная фракция, которая способствует виртуальному образованию пленки.

Из (17) видно: чтобы пленка росла при $h_0 > 0$, необходимо $h_b = 0$. Отсюда для критической скорости притока капель получим выражение

$$u_{\mathrm{cr}} = \frac{k_0'}{h_t - h_0}, \qquad (19)$$

из которого видно, что, чем больше h_0, тем больше должна быть критическая водность потока капель. Или соответственно из (19) получим выражение для критической водности Качурина

$$q_K = \frac{4k_0'\rho_h}{EV(h_t - h_0)}, \qquad (20)$$

откуда следует, что критическая водность, определяющая рост пленки, зависит от h_0. Формуле (20) можно дать иную интерпретацию: чтобы на поверхности градины могла образоваться виртуально пленка толщиной h_0 водность облака должна быть равна критической водности Качурина (20).

Предположим, что $u'_{\mathrm{cr}} < u_{\mathrm{cr}}$, т. е. водность меньше критической водности Качурина: $q'_K < q_K$. Тогда, как видно из выражения для равновесной толщины пленки, $h_b > 0$. И чтобы пленка выросла при этих условиях, ее толщина должна быть больше равновесной: $h_0 > h_b$.

Таким образом, видно: чтобы пленка толщины h_0 могла виртуально образоваться на поверхности градины, водность облака должна быть больше критической, удовлетворяющей формуле (20). Тем самым h_0 есть такая толщина пленки, которая может стабильно устанавливаться на поверхности градины. Если водность меньше критической водности Качурина и $h_0 < h_b$, то пленка на поверхности градины неустойчива и со временем исчезает. Только лишь при водности, большей (20), появляются условия для виртуального образования пленки толщиной h_0.

Как согласовать полученный вывод с тем, что, согласно экспериментальным данным Качурина, $(h_b)_{\mathrm{cr}} = 1.0 \cdot 10^{-3}$ m. В [12] было отмечено следующее. Обработав большой экспериментальный материал, Л.Г. Качурин [11] пришел к выводу, что существует такое критическое значение равновесной толщины h_b (обозначим ее $(h_b)_{\mathrm{cr}}$ или h_{bc}), при которой с достаточной вероятностью можно ожидать, что $h > (h_b)_{\mathrm{cr}}$. Значение критической равновесной толщины определяется из опыта — $(h_b)_{\mathrm{cr}} = 1.0 \cdot 10^{-3}$ m [11]. Таким образом, понятие критической равновесной толщины следует из вероятностной трактовки экспериментальных материалов, но непосредственно не следует из теории Качурина [10]. Из теории следует, что существует равновесная толщина пленки, определяющая устойчивость пленки на поверхности градины, принимающая в зависимости от условий произвольные значения. Понятие критической равновесной толщины пленки требует еще своего обоснования в рамках вероятностно-статистической теории роста градин.

Из (20) видно также, что, так как величина $(h_t - h_0)$ слабо меняющаяся, то режим роста пленки будет определяться в основном выражением

$$h_t - h_0 = \frac{4k_0'\rho_h}{EVq_K}. \qquad (21)$$

Отсюда выражение для критической водности Качурина принимает вид

$$q_K = \frac{4k_0'\rho_h}{EVh_{bc}} = \frac{4k_0'\rho_h}{EV(h_t - h_0)}. \qquad (22)$$

Таким образом, критическая равновесная толщина пленки связана с начальной толщиной пленки следующим выражением $h_{bc} = h_t - h_0$. Отсюда, например, следует, что для границы радиусом $R = 1 \cdot 10^{-2}$ m устойчивая (с точки зрения термодинамики, без учета срыва капель с поверхности градины) толщина пленки равна $h_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ m.

Сравнив (22) с выражением для критической водности Шумана–Лудлама

$$q_{\mathrm{Sh-L}} = \frac{4k_0'\rho_h}{EVh_t}, \tag{23}$$

видим, что критическая водность Шумана–Лудлама относится к случаю, когда $h_0 = 0$, а критическая водность Качурина относится к случаю, когда кристаллизация происходит при наличии на поверхности градины устойчивой пленки.

Теперь мы можем понять результаты опытов Качурина [10,11]. Градины время от времени оказывались в условиях со сверхкритической водностью. При этом на них образовывалась пленка воды. После попадания в условия с иной водностью режим роста градины зависел от значения толщины пленки, которая образовывалась на градине на предыдущем этапе. Таким образом, мы действительно приходим к вероятностной трактовке понятия критической равновесной толщины пленки. Тем самым критической равновесной толщине пленки дан ясный смысл. Было бы интересным промоделировать описанный выше процесс на математической модели градового облака и сравнить экспериментальное значение критической равновесной толщины с полученным на модели значением.

Сравнив два критерия, определяющие режим роста градины: критическую водность Шумана–Лудлама и равновесную толщину пленки, мы увидим, что равновесная толщина пленки полнее определяет тенденцию изменения толщины пленки, а значит, и режим роста градины. Действительно, если $h_0 < h_b$, то $dh/dt < 0$, т. е. пленка со временем исчезает, и градина будет расти в сухом режиме. Если $h_0 > h_b$, то $dh/dt > 0$, т. е. толщина пленки со временем увеличивается и градина растет в мокром режиме. Таким образом, будет ли расти градина в мокром или сухом режиме, зависит от того, больше или меньше толщина пленки некоторой равновесной толщины, являющейся, согласно (16), функцией температуры окружающей среды, водности облака и скорости падения (соответственно радиуса) градины.

Заключение

Переход от сухого режима роста градины к мокрому определяется критической водностью Качурина, а не Шумана–Лудлама. Если водность облака больше критической водности Шумана–Лудлама, но меньше критической водности Качурина, то пленка на поверхности градины неустойчива, со временем исчезает и градина растет в сухом режиме. Только лишь при водности облака, большей критической водности Качурина, на поверхности градины может спонтанно образоваться пленка. Дальнейший рост пленки будет зависеть от того, больше или меньше начальная толщина пленки равновесной толщины пленки. Если $h_0 > h_b$, пленка растет, если $h_0 < h_b$ — пленка уменьшается.

Список литературы

[1] *Жекамухов М.К.* Некоторые проблемы формирования структуры градин. М.: Гидрометеоиздат, 1982. 172 с.
[2] *Мейсон Б.Дж.* Физика облаков. Л.: Гидрометеоиздат, 1961. 542 с.
[3] *Роджерс Р.* Краткий курс физики облаков. Л.: Гидрометеоиздат, 1979. 232 с.
[4] *Сулаквелидзе Г.К.* Ливневые осадки и град. Л.: Гидрометеоиздат, 1967. 410 с.
[5] *Хоргуани В.Г.* Микрофизика зарождения и роста града. Л.: Гидрометеоиздат, 1984. 188 с.
[6] *List R.* // J. Atom. Sci. 1990. N 47. P. 1919–1925.
[7] *List R.* // Atmospheric Research. 1994. N 32. P. 85–94.
[8] *Ludlam F.H.* Hailstone studies. Nubila, 1958. N 1. P. 28.
[9] *Schumann T.E.* // Quart. J. Roy. Met. Soc. 1938. Vol. 94. P. 3.
[10] *Качурин Л.Г.* // Изв. АН СССР. Сер. геофиз. 1962. № 6. С. 38–46.
[11] *Качурин Л.Г., Морачевский В.Г.* Кинетика фазовых переходов воды в атмосфере. Л.: Изд-во ЛГУ, 1965. 144 с.
[12] *Закинян Р.Г.* // Метеорология и гидрология. 2000. № 10. С. 59–67.
[13] *Закинян Р.Г.* // ИФЖ. 2003. Т. 76. № 2. С. 42–47.
[14] *Закинян Р.Г.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 9–14.
[15] *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977. 735 с.