04;10

Уравнение для среднеквадратичного радиуса релятивистского электронного пучка, распространяющегося в плотных и разреженных газоплазменных средах продольно внешнему магнитному полю

© Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет
Научно-исследовательский институт математики и механики им. В.И. Смирнова
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: Kolesnikov_evg@mail.ru, man06@mail.ru

(Поступило в Редакцию 8 декабря 2006 г.)

С помощью уравнений переноса, вириала и уравнения для средней полной поперечной энергии частицы поперечного сегмента пучка получено выражение для среднеквадратичного радиуса релятивистского электроного пучка, распространяющегося как в плотных, так и разреженных газоплазменных средах продольно внешнему магнитному полю.

PACS: 52.40.Mj

Введение

Новые области применения релятивистских электронных пучков (РЭП) делают актуальным дальнейшее исследование динамики транспортировки РЭП в газоплазменных средах [1–22]. Важное место в комплексе проблем, связанных с распространением РЭП в указанных средах, занимает вопрос о поперечной динамике рассматриваемых пучков. В работе [21] было сформулировано кинетическое уравнение, описывающее эволюцию функции распределения частиц поперечного сегмента параксиального моноэнергетичного аксиально-симметричного РЭП, распространяющегося в плотных и разреженных газоплазменых средах продольно внешнему однородному стационарному магнитному полю. В [22] на основе указанного кинетического уравнения получены уравнения переноса массы, импульса и энергии, а также уравнение вириала и условие динамического равновесия.

В настоящей работе при помощи сформулированных в работе [22] уравнений переноса и вириала, а также найденного здесь уравнения для средней полной поперечной энергии частицы сегмента пучка получено уравнение для среднеквадратичного радиуса РЭП. Сформулированное нами уравнение обобщает аналогичное уравнение, полученное в работах [5,12] для случая транспортировки пучка в плотной газоплазменной среде, на ситуацию распространения РЭП как в плотной плазме, так и в разреженной плазме в режиме ионной фокусировки.

Кинетическое уравнение, уравнения переноса и уравнение вириала

Рассмотрим аксиально-симметричный квазистационарный пучок релятивистких электронов с осью симметрии z, инжектируемый в однородную газоплазменную среду при наличии направленного вдоль оси z однородного стационарного магнитного поля с индукцией $B = B_0 i_z$, где i_z — орт указанной оси. Представим пучок в виде совокупности тонких поперечных сегментов S^τ, каждый из которых инжектируется в момент времени $t = \tau$ (при $z = 0$) и содержит фиксированное число частиц.

Как было показано в [21], в параксиальном приближении продольное движение частиц пучка в любом сегменте S^τ является детерминированным. В отличие от продольного движения поперечная динамика частиц носит стохастический характер, и состояние пучка в фазовом пространстве поперечных координат $\mathbf{r}_\perp$ и поперечных импульсов $\mathbf{p}_\perp$ может быть охарактеризовано с помощью функции распределения $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$. В соответствии с [5,21–25] в условиях, когда столкновения частиц пучка с нейтральными частицами газоплазменной среды приводят к многократному рассеянию на малые углы, а также в предположении об изотропности и упругом характере рассеяния временна́я эволюция функции распределения $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ частиц сегмента S^τ описывается уравнением

$$\frac{\partial f^\tau}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_\perp}{\gamma m}\nabla_\perp f^\tau + \left[-e\nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z) + \Omega_b \mathbf{p}_\perp \times \mathbf{i}_z\right]\nabla_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau = \frac{m\gamma S}{2}\Delta_{\mathbf{p}_\perp} f^\tau. \quad (1)$$

В уравнении (1) коэффициент μ определен соотношением

$$\mu = 1 - \frac{1-\alpha_c}{\beta^2(1-\alpha_m)}, \quad (2)$$

где $\beta = v_z/c$ (v_z — продольная компонента скорости частиц пучка, которая полагается одинаковой у всех частиц в силу параксиальности и моноэнергетичности РЭП, c — скорость света), α_c и α_m — соответственно коэффициенты зарядовой и магнитной (токовой) нейтрализации пучка, а φ_0 — заданный потенциал электрического поля ионного фона (в режиме ИФ). В соответствии с изложенным в работе [21] при транспортировке в плотной плазме коэффициентам α_c и α_m могут быть приписаны заданные постоянные значения, а потенциал $\varphi_0 \equiv 0$. В то же время при транспортировке РЭП в режиме ИФ постоянные α_c и α_m имеют нулевые значения, а потенциал φ_0 не равен нулю. Другие величины в (1) имеют следующий смысл: $\gamma = (1-\beta^2)^{-1/2}$ — лоренц-фактор частиц пучка, m и e — соответственно масса покоя и заряд электрона; $\Omega_b = |e|B_0/(\gamma mc)$ — гирочастота частиц пучка во внешнем манитном поле; S — средняя скорость изменения кинетической энергии поперечного движения частиц пучка в результате многократного кулоновского рассеяния частиц РЭП на атомах и молекулах фонового газа, рассматриваемая как заданная характеристика рассеивающей среды и пучка. Наконец, A_z — z-компонента векторного потенциала коллективного электромагнитного поля пучково-плазменной системы, которая в рассматриваемом случае параксиального квазистационарного пучка удовлетворяет уравнению

$$\Delta_\perp A_z = -\frac{4\pi}{c}(1-\alpha_m)J_{bz}, \tag{3}$$

где J_{bz} — z-компонента плотности тока пучка.

Введем в рассмотрение радиус экранировки самосогласованного электромагнитного поля фоновой плазмой R_c, т. е. предположим, что

$$\varphi_0\big|_{r\geq R_c} = A_z\big|_{r\geq R_c} \equiv 0. \tag{4}$$

Решение уравнения (3), удовлетворяющее граничному условию (4), имеет вид

$$A_z = -\frac{2}{c} I_b(1-\alpha_m)\int d\mathbf{r}'_\perp \ln\frac{|\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp|}{R_c} \times \int d\mathbf{p}_\perp f^\tau(\mathbf{r}'_\perp, \mathbf{p}_\perp, t), \tag{5}$$

где I_b — полный ток пучка.

С учетом соотношения (5) уравнение (1) может быть рассмотрено как интегро-дифференциальное для функции распределения частиц сегмента пучка $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$, которое должно решаться при начальном условии

$$f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)\big|_{t=\tau} = f_0(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, \tau), \tag{6}$$

где $f_0(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ — заданная функция распределения частиц пучка по поперечным координатам и импульсам на выходе из инжектора.

В работе [22] на основе кинетического уравнения (1) были получены уравнения переноса массы (уравнение непрерывности), импульса и энергии. В частности, уравнение непрерывности имеет вид

$$\frac{\partial\chi}{\partial t} + \nabla_\perp \circ \left(\frac{\chi\tilde{\mathbf{p}}_\perp}{m\gamma}\right) = 0, \tag{7}$$

где $\chi(\mathbf{r}_\perp, t)$ — плотность частиц пучка в сегменте S^τ, определяемая интегралом

$$\chi(\mathbf{r}_\perp, t) = \int f^\tau d\mathbf{p}_\perp, \tag{8}$$

и

$$\tilde{\mathbf{p}}_\perp(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{1}{\chi}\int \mathbf{p}_\perp f^\tau d\mathbf{p}_\perp \tag{9}$$

— средний поперечный импульс частиц пучка в сегменте S^τ. Заметим, что уравнение (7) представляет собой обычное уравнение непрерывности, выражающее закон сохранения числа частиц рассматриваемого сегмента пучка.

Уравнение переноса импульса в работе [22] сформулировано в виде

$$\frac{\partial\chi\tilde{\mathbf{p}}_\perp}{\partial t} + \nabla_\perp \circ \left(\chi\,\widetilde{\frac{\mathbf{p}_\perp\mathbf{p}_\perp}{m\gamma}}\right) + e\chi\nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z) + \chi\Omega_b(\mathbf{i}_z \times \tilde{\mathbf{p}}_\perp) = 0, \tag{10}$$

где

$$\int \frac{\mathbf{p}_\perp p_\perp^2}{2m^2\gamma^2} f^\tau d\mathbf{p}_\perp = \chi\,\widetilde{\frac{\mathbf{p}_\perp p_\perp^2}{2m^2\gamma^2}} = \chi\,\widetilde{\frac{v_\perp p_\perp^2}{2m\gamma}}. \tag{11}$$

В свою очередь уравнение переноса энергии, согласно [22], может быть записано как

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi\widetilde{p_\perp^2}}{2m\gamma}\right) = -\nabla_\perp \circ \left(\chi\,\widetilde{\frac{\mathbf{p}_\perp p_\perp^2}{2m^2\gamma^2}}\right) - \frac{e\chi\tilde{\mathbf{p}}_\perp}{m\gamma} \circ \nabla_\perp(\varphi_0 - \beta\mu A_z) - \frac{1}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}\frac{\chi\widetilde{p_\perp^2}}{2m\gamma} + \chi S. \tag{12}$$

Уравнение для среднего вириала, полученное Э. Ли [E. Lee] в работе [5], нами было обобщено на случай наличия ионного фона и внешнего продольного магнитного поля. Для этого случая уравнение вириала было сформулировано в виде

$$E_\perp - \frac{d}{dt}\left(\frac{m\gamma}{8}\frac{d\mathfrak{R}^2}{dt}\right) = \kappa T_B + e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle - \frac{\Omega_b L}{2}, \tag{13}$$

где

$$\mathfrak{R}^2 \equiv 2\int \chi r^2 d\mathbf{r}_\perp \tag{14}$$

— удвоенный средреквадратичный радиус сегмента пучка S^τ, $T_B = e^2\beta^2 N_b/2 = e\beta I_b/2c$ — так называемая температура Беннета, $\beta = v_z/c$ (v_z и c — продольная компонента скорости частиц пучка в рассматриваемом сегменте РЭП и скорость света в вакууме), N_b — полная линейная плотность частиц пучка, $\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle$ — усредненная по радиальному профилю пучка линейная плотность частиц ионного канала, J_{bz} — z-компонента плотности тока пучка, L — среднее значение углового момента частицы рассматриваемого сегмента пучка

$$L = L_0 + \frac{m\gamma\Omega_b}{4}(\mathfrak{R}_0^2 - \mathfrak{R}^2), \tag{15}$$

L_0 и $\mathfrak{R}_0$ — начальные значения.

Уравнение для средней полной поперечной энергии частицы сегмента пучка

Введем в рассмотрение среднюю полную поперечную энергию частицы сегмента пучка Ψ, которую определим как сумму средней кинетической энергии поперечного движения $E_\perp$, средней потенциальной энергии частицы в эффективном коллективном электрическом поле $E_{\text{eff}} = -\nabla_\perp(-\beta\mu A_z)$ (μ определено в (2)) и средней потенциальной энергии частицы в электрическом поле ионного фона

$$\Psi = E_\perp + \Lambda_b + \Lambda_0, \tag{16}$$

где

$$\Lambda_b = -\frac{1}{2}\int \chi e\beta\mu A_z d\mathbf{r}_\perp, \tag{17}$$

$$\Lambda_0 = \int \chi e\varphi_0 d\mathbf{r}_\perp, \tag{18}$$

$$E_\perp = \int \frac{\chi \widetilde{p_\perp^2}}{2m\gamma} d\mathbf{r}_\perp. \tag{19}$$

Продифференцировав по времени выражение (16) для средней полной поперечной энергии Ψ частицы сегмента пучка, получим

$$\frac{d\Psi}{dt} = \int\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi\widetilde{p_\perp^2}}{2m\gamma}\right) + \frac{\chi\widetilde{p_\perp^2}}{2m\gamma^2}\frac{d\gamma}{dt}\right]d\mathbf{r}_\perp - \frac{E_\perp}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt}$$
$$+ \int e\varphi_0\frac{\partial\chi}{\partial t}d\mathbf{r}_\perp - e\beta\mu I_n\int\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi A_z}{2I_n}\right)d\mathbf{r}_\perp$$
$$- \frac{d(\kappa T_B)}{dt}\int\frac{\chi A_z}{I_n}d\mathbf{r}_\perp, \tag{20}$$

где $I_n = I_b + I_p = (1-\alpha_m)I_b$ — полный ток в системе плазма–пучок, I_b — полный обратный плазменный ток.

С учетом уравнений переноса энергии (12), уравнения непрерывности (7) и условия

$$\chi(\mathbf{r}_\perp, t)\big|_{\mathbf{r}_\perp\notin\Gamma} \equiv 0,$$

где Γ — область ненулевых значений функции χ в пространстве поперечных координат $\mathbf{r}_\perp$, имеем

$$\int\left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\chi\widetilde{p_\perp^2}}{2m\gamma}\right) + \frac{\chi\widetilde{p_\perp^2}}{2m\gamma^2}\frac{d\gamma}{dt}\right]d\mathbf{r}_\perp$$
$$= -\int\nabla_\perp\circ\left(\frac{\chi\widetilde{p_\perp^2\mathbf{p}_\perp}}{2m^2\gamma^2}\right)d\mathbf{r}_\perp - \int\left(\frac{e\chi\tilde{\mathbf{p}}_\perp}{m\gamma}\right)\circ\nabla_\perp\varphi_0 d\mathbf{r}_\perp$$
$$+ e\beta\mu I_n\int\left(\frac{\chi\tilde{\mathbf{p}}_\perp}{m\gamma}\circ\nabla_\perp\frac{A_z}{I_n}\right)d\mathbf{r}_\perp + \int\chi S d\mathbf{r}_\perp$$
$$= -\int e\varphi_0\frac{\partial\chi}{\partial t}d\mathbf{r}_\perp + e\beta\mu I_n\int\frac{A_z}{I_n}\frac{\partial\chi}{\partial t}d\mathbf{r}_\perp + \int\chi S d\mathbf{r}_\perp. \tag{21}$$

Подстановка (21) в (20) дает

$$\frac{d\Psi}{dt} = -\frac{E_\perp}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt} + \Lambda_b\frac{d}{dt}(\ln I_n)$$
$$+ \int\chi S d\mathbf{r}_\perp + \int e\chi\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}d\mathbf{r}_\perp$$
$$+ eI_n\int\left[\frac{\beta\mu A_z}{I_n}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\beta\mu A_z}{2I_n}\chi\right)\right]d\mathbf{r}_\perp. \tag{22}$$

Рассмотрим последний интеграл в (22). Тогда с учетом (5) имеем

$$L^* \equiv eI_n\int\left[\frac{\beta\mu A_z}{I_n}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\beta\mu A_z}{2I_n}\chi\right)\right]d\mathbf{r}_\perp$$
$$= eI_n\int\left[\frac{\beta\mu A_z}{2I_n}\frac{\partial\chi}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\beta\mu A_z}{2I_n}\chi\right)\right]d\mathbf{r}_\perp$$
$$= -\frac{eI_n}{c}\beta\mu\int d\mathbf{r}_\perp\int d\mathbf{r}'_\perp\ln\left|\frac{\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp}{R_c}\right|\left(\chi'\frac{\partial\chi}{\partial t} - \chi\frac{\partial\chi'}{\partial t}\right)$$
$$-\frac{eI_n}{c}\beta\mu\int d\mathbf{r}_\perp\int d\mathbf{r}'_\perp\ln\left|\frac{\mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp}{R_c}\right|\chi\chi'\frac{\partial(\beta\mu)}{\partial t}. \tag{23}$$

Нетрудно убедиться, что первый интеграл в правой части (23) обращается в нуль. Принимая во внимание (17), из (23) находим

$$L^* = \frac{\Lambda_b}{\beta\mu}\frac{d(\beta\mu)}{dt}. \tag{24}$$

Учитывая (23) и (24), из (22) полуим уравнение для средней полной поперечной энергии частицы сегмента пучка

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{dE_\perp}{dt} + \frac{d\Lambda_b}{dt} + \frac{d\Lambda_0}{t} = -\frac{E_\perp}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt} + \Lambda_b\frac{d\ln\kappa T_B}{dt}$$
$$+ \int\chi S d\mathbf{r}_\perp + \int e\chi\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}d\mathbf{r}_\perp, \tag{25}$$

откуда следует уравнение

$$\frac{dE_\perp}{dt} = -\int e\varphi_0\frac{\partial\chi}{\partial t}d\mathbf{r}_\perp - \Lambda_b\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{\Lambda_b}{\kappa T_B}\right)$$
$$-\frac{E_\perp}{\gamma}\frac{d\gamma}{dt} + \int\chi S d\mathbf{r}_\perp. \tag{26}$$

Первый и второй члены правой части уравнения (26) характеризуют соответственно скорости изменения поперечной кинетической энергии частиц сегмента пучка за счет работы сил, действующих на частицы со стороны электрического поля ионного фона и самосогласованного эффективного поперечного электрического поля, а последними членами определяются скорости изменения поперечной кинетической энергии в результате неупругих и упругих столкновений частиц пучка с частицами среды.

Уравнение для среднеквадратичного радиуса сегмента пучка

Умножив (26) на лоренц-фактор частиц пучка γ, запишем полученное уравнение в виде

$$\frac{d}{dt}\gamma E_\perp = \gamma\biggl(-\int e\varphi_0\,\frac{\partial\chi}{\partial t}\,d\mathbf{r}_\perp - \Lambda_b\,\frac{d}{dt}\,\ln\left(\frac{\Lambda_b}{\kappa T_B}\right) + \int\chi S d\mathbf{r}_\perp\biggr). \tag{27}$$

Обратимся теперь к уравнению вириала (13). После умножения уравнения вириала на лоренц-фактор γ и дифференцирования по t получим

$$\frac{d(\gamma E_\perp)}{dt} = \frac{m}{8}\,\frac{d}{dt}\biggl(\gamma\,\frac{d}{dt}\Bigl(\gamma\,\frac{d\mathfrak{R}^2}{dt}\Bigr)\biggr) + \frac{d(\gamma\kappa T_B)}{dt} + \frac{d}{dt}\bigl(\gamma e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle\bigr) - \frac{\Omega_b\gamma}{2}\,\frac{dL}{dt}. \tag{28}$$

Последнее уравнение с учетом (15) можно записать следующим образом:

$$\frac{d(\gamma E_\perp)}{dt} = \frac{m}{8\mathfrak{R}^2}\,\frac{d}{dt}\left(\gamma^2\mathfrak{R}^3\,\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + \gamma\,\frac{d\gamma}{dt}\,\mathfrak{R}^3\,\frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right) + \frac{d(\gamma\kappa T_B)}{dt} + \frac{d}{dt}\bigl(\gamma e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle\bigr) + \frac{m\gamma^2\Omega_b^2}{8}\,\frac{d\mathfrak{R}^2}{dt}. \tag{29}$$

Приравнивая правые части (27) и (29), приходим к уравнению

$$\frac{d}{dt}\biggl(\gamma^2\mathfrak{R}^3\,\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + \gamma\,\frac{d\gamma}{dt}\,\mathfrak{R}^3\,\frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \frac{4\mathfrak{R}^2\gamma\kappa T_B}{m} + \frac{4\mathfrak{R}^2\gamma e^2\langle N_\Psi(\mathbf{r}_\perp)\rangle}{m} + \frac{\gamma^2\Omega_b^2\mathfrak{R}^4}{4}\biggr) = \frac{4\gamma\mathfrak{R}^2}{m}\biggl(-\kappa T_B\,\frac{d\Gamma}{dt} - \int e\varphi_0\,\frac{\partial\chi}{\partial t}\,d\mathbf{r}_\perp + e^2\langle N_\Phi(r_\perp)\rangle\,\frac{d}{dt}\,\ln\left(\frac{\mathfrak{R}}{R_c}\right)^2 + \int\chi S d\mathbf{r}_\perp\biggr), \tag{30}$$

где

$$\Gamma = \frac{\Lambda_b}{\kappa T_B} - \ln\left(\frac{\mathfrak{R}}{R_c}\right)^2. \tag{31}$$

Перепишем уравнение вириала (13) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m\gamma}{8}\,\frac{d\mathfrak{R}^2}{dt}\right) - E_\perp + \kappa T_B + e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle - \frac{\Omega_b L}{2} = 0. \tag{32}$$

Выполнив дифференцирование по времени в левой части (32) и умножив (32) на $4\gamma\mathfrak{R}^2/m$, получим

$$\gamma^2\mathfrak{R}^3\,\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + \gamma\,\frac{d\gamma}{dt}\mathfrak{R}^3\,\frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \gamma^2\mathfrak{R}^2\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right)^2 - \frac{4E_\perp\gamma\mathfrak{R}^2}{m} + \frac{4\mathfrak{R}^2\gamma\kappa T_B}{m} + \frac{4\mathfrak{R}^2\gamma e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle}{m} - \frac{2\Omega_b\gamma\mathfrak{R}^2}{m}\,L = 0. \tag{33}$$

С учетом (33) выражение, стоящее в левой части уравнения (30) под знаком производной, может быть записано в виде

$$\gamma^2\mathfrak{R}^3\,\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + \gamma\,\frac{d\gamma}{dt}\,\mathfrak{R}^3\,\frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \frac{4\mathfrak{R}^2\gamma\kappa T_B}{m} + \frac{4\mathfrak{R}^2\gamma e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle}{m} + \frac{\gamma^2\Omega_b^2\mathfrak{R}^4}{4} = -\gamma^2\mathfrak{R}^2\left(\frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right)^2 + \frac{4E_\perp\gamma\mathfrak{R}^2}{m} + \frac{2\Omega_b\gamma\mathfrak{R}^2}{m}\,L + \frac{\gamma^2\Omega_b^2\mathfrak{R}^4}{4}. \tag{34}$$

В силу интеграла среднего обобщенного углового момента [22]

$$L + \frac{m\gamma\Omega_b}{4}\,\mathfrak{R}^2 = \tilde{P}_\theta \tag{35}$$

имеем

$$\frac{2\Omega_b\gamma\mathfrak{R}^2L}{m} + \frac{\gamma^2\Omega_b^2\mathfrak{R}^4}{4} = \frac{4\tilde{P}_\theta^2}{m^2} - \frac{4L^2}{m^2}. \tag{36}$$

С использованием уравнения вириала (13) и интеграла обобщенного углового момента ($d\tilde{P}_\theta/dt = 0$) [22] уравнение (34) принимает вид

$$\gamma^2\mathfrak{R}^3\,\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + \gamma\,\frac{d\gamma}{dt}\,\mathfrak{R}^3\,\frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \frac{4\mathfrak{R}^2\gamma\kappa T_B}{m} + \frac{4\mathfrak{R}^2\gamma e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle}{m} + \frac{\gamma^2\Omega_b^2\mathfrak{R}^4}{4} = 4\left(E^2 + \frac{\tilde{P}_\theta^2}{m^2}\right), \tag{37}$$

где

$$E = \frac{\gamma\mathfrak{R}}{2}\left[\frac{4E_\perp}{m\gamma} - \left(\frac{d\mathfrak{R}}{dt}\right)^2 - \left(\frac{2L}{m\gamma\mathfrak{R}}\right)^2\right]^{1/2} \tag{38}$$

— среднеквадратичный эмиттанс рассматриваемого сегмента пучка [22].

Как следует из (30) и (37), задача об определении среднеквадратичного радиуса сегмента сводится к решению уравнения

$$\frac{d^2\mathfrak{R}}{dt^2} + \frac{1}{\gamma}\,\frac{d\gamma}{dt}\,\frac{d\mathfrak{R}}{dt} + \frac{4\kappa T_B}{\gamma m\mathfrak{R}} + \frac{4e^2\langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp)\rangle}{\gamma m\mathfrak{R}} + \frac{\Omega_b^2\mathfrak{R}}{4} = \frac{4(E^2 + \tilde{P}_\theta^2/m^2)}{\gamma^2\mathfrak{R}^3}, \tag{39}$$

где эмиттанс может быть представлен в виде

$$E^2 = E_0^2 + \int\limits_{\tau}^{t} dt' \, \frac{\gamma \mathfrak{R}^2}{m} \Bigg(-\kappa T_B \frac{d\Gamma}{dt'} - \int e\varphi_0 \frac{\partial \chi}{\partial t'} \, d\mathbf{r}_\perp + e^2 \langle N_\Phi(\mathbf{r}_\perp) \rangle \frac{d}{dt} \ln \left(\frac{\mathfrak{R}}{\mathfrak{R}_c} \right)^2 + \int \chi S d\mathbf{r}_\perp \Bigg), \tag{40}$$

E_0 — начальное значение эмиттанса.

Уравнение (39) представляет собой искомое уравнение для среднеквадратичного радиуса РЭП, обобщающее аналогичное уравнение, полученное в работах [5,12], на случай транспортировки РЭП как в плотной плазме, так и в разреженной плазме в режиме ионной фокусировки.

Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М., 1980. 167 с.

[2] *Диденко А.Н., Григорьев В.П., Усов Ю.П.* Мощные электронные пучки и их применение. М., 1977. 277 с.

[3] *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М., 1990. 331 с.

[4] *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М., 1984. 432 с.

[5] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60–69.

[6] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1978. Vol. 21. N 8. P. 1327–1343.

[7] *Buchanan H.L.* // Phys. Fluids. 1987. Vol. 30. N 1. P. 221–231.

[8] *Надеждин Е.Р., Сорокин Г.А.* // Физика плазмы. 1983. Т. 9. № 5. С. 988–991.

[9] *Глазычев Л.В., Сорокин Г.А.* // Физика плазмы. 1990. Т. 16. № 5. С. 592–598.

[10] *Кондратьев Н.А., Сметанин В.И.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 3. С. 67–73.

[11] *Fernsler R.F., Hubbard R.F., Lampe M.* // J. Appl. Phys. 1994. Vol. 75. N 7. P. 3278–3293.

[12] *Lee E.P., Cooper R.K.* // Part. Accel. 1976. Vol. 7. P. 83–95.

[13] *Колесников Е.К., Савкин А.Д.* // Письма в ЖТФ. 1994. Т. 20. Вып. 1. С. 54–56.

[14] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // РиЭ. 1992. Т. 37. № 4. С. 694–699.

[15] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 68–73.

[16] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 7. С. 127–129.

[17] *Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 1. С. 76–78.

[18] *Надеждин Е.Р., Сорокин Г.А.* // Физика плазмы. 1988. Т. 14. № 5. С. 619–622.

[19] *Колесников Е.К.* // Физика плазмы. 2002. Т. 28. № 4. С. 360–367.

[20] *Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. № 4. С. 103–108.

[21] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. № 9. С. 103–107.

[22] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. № 7. С. 119–125.

[23] *Либов Р.* Введение в теорию кинетических уравнений. М., 1974. 371 с.

[24] *Чандрасекар С.* Стохастические проблемы в физике и астрономии. М., 1947. 168 с.

[25] *Черчиньяни К.* Теория и приложения уравнения Больцмана. М., 1978. 495 с.