

01;03

О влиянии расклинивающего давления на нелинейные осцилляции слоя воды на поверхности заряженной тающей градины

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, О.С. Крючков

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 3 мая 2007 г.)

В аналитических асимптотических расчетах второго порядка малости исследовано влияние расклинивающего давления на характеристики нелинейных осцилляций тонкого заряженного слоя жидкости на поверхности твердого сферического ядра. Выяснилось, что вследствие влияния расклинивающего давления при начальной деформации, определяющейся k -й модой в спектре мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия, частоты мод с номерами, меньшими k , снижаются, а частоты мод с номерами, большими k , — увеличиваются. Амплитуды всех нелинейно возбуждающихся мод при наличии расклинивающего давления увеличиваются по сравнению с амплитудами тех же мод в его отсутствие.

PACS: 47.55.D-

Введение

Исследование осцилляций и устойчивости заряженного слоя электропроводной жидкости на криволинейной твердой подложке представляет интерес в связи с многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями. Так, неустойчивость заряженного водяного слоя на поверхности тающих градин в грозовом облаке играет важную роль в процессах микроразделения зарядов и инициирования разряда линейной молнии [1,2]. С электростатической неустойчивостью заряженного слоя электропроводной жидкости приходится сталкиваться при анализе физических механизмов функционирования некоторых типов жидкостных масс-спектрометров [3,4], а также жидко-металлических источников ионов [5]. Так, в некоторых типах жидкостных масс-спектрометров для получения ионов труднолетучих органических веществ используется явление электродиспергирования растворов таких веществ с мениска на вершине металлического капилляра, по которому осуществляется подача раствора, в вакуумных низкотемпературных (≈ 100 К) условиях [3]. При этом вследствие низкой температуры раствор на срезе капилляра замерзает, и электрогидродинамическая эмиссия микрокапелек идет из пленки жидкости на поверхности ледяного ядра [4,6], существование которой обеспечивается джоулевым нагревом при протекании по пленке электрического тока.

Устойчивость заряженного слоя жидкости на поверхности сферического ядра не раз рассматривалась в линейном приближении по величине деформации свободной поверхности как для идеальной, так и для вязкой жидкости [7–9]. Такая задача решалась и для тонких (с толщиной порядка сотни нм и меньше) слоев жидкости, когда существенное влияние на устойчивость заряженного слоя жидкости начинает оказывать расклинивающее давление [10,11]. Однако нелинейный

аналитический расчет осцилляций тонкого заряженного слоя жидкости на поверхности твердого сферического ядра с учетом влияния расклинивающего давления пока не проводился. Этой проблеме и посвящена настоящая работа.

Выделяют четыре компоненты расклинивающего давления P_h , имеющие различную физическую природу, которые в общем случае не описываются единым аналитическим выражением [12]. Поэтому, подразумевая в первую очередь качественное исследование влияния P_h на устойчивость тонких слоев жидкостей на твердой смачиваемой подложке, отметим, что для настоящего рассмотрения наиболее важной особенностью P_h является его сильная зависимость от толщины слоя h , которую в дальнейшем будем принимать такой же, как и для флуктуационной составляющей расклинивающего давления

$$P_h = A/h^k, \quad (1)$$

где $3 \leq k \leq 4$ в зависимости от h . Константа A при $k = 3$ имеет значение $\sim 10^{-13}$ erg, как это получено в строгом теоретическом расчете [12,13] и как это принимается при теоретическом анализе устойчивости свободных тонких пленок.

1. Математическая формулировка задачи

Пусть твердое сферическое ядро радиуса R_0 покрыто симметрично расположенным шаровым слоем толщины h с внешним радиусом R смачивающей его жидкости, массовой плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения свободной поверхности σ . Жидкость будем считать идеальной: несжимаемой, идеально проводящей. Вся система несет электрический заряд Q , однородно распределенный по невозмущенной сферической поверхности жидкого слоя. Примем, что в на-

чальный момент времени $t = 0$ равновесная сферическая форма жидкой фазы градины претерпела виртуальную осесимметричную деформацию с конечной амплитудой, меньшей толщины жидкого слоя, пропорциональную одной из мод капиллярных осцилляций слоя. Будем исследовать нелинейные осцилляции слоя при $t > 0$.

Для упрощения расчетов перейдем к безразмерным переменным, в которых $R = \sigma = \rho = 1$. Тогда в сферической системе координат с началом в центре масс градины уравнение свободной границы жидкости, возмущенной осесимметричным капиллярным волновым движением, запишется в виде

$$r = 1 + \xi(\theta, t), \quad |\xi| \ll 1. \quad (2)$$

Движение жидкости в жидком слое будем полагать потенциальным, с потенциалом поля скоростей $\psi(\mathbf{r}, t)$.

Математическая формулировка задачи расчета нелинейных осцилляций жидкого слоя на поверхности твердого сферического ядра состоит из системы уравнений Лапласа для потенциала скорости $\psi(\mathbf{r}, t)$ и электростатического потенциала $\Phi(\mathbf{r}, t)$

$$\Delta\psi(\mathbf{r}, t) = 0, \quad \Delta\Phi(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (3)$$

и граничных условий к ним: на бесконечности ($r \rightarrow \infty$)

$$\Phi(\mathbf{r}, t) \rightarrow 0, \quad (4)$$

на поверхности твердого сферического ядра ($r = R_0$)

$$\partial\psi(\mathbf{r}, t)/\partial r = 0 \quad (5)$$

и условий на свободной поверхности жидкости, определенной соотношением (2): кинематического

$$\frac{\partial\xi}{\partial r} = \frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial\psi}{\partial\theta} \frac{\partial\xi}{\partial\theta}, \quad (6)$$

динамического

$$-\frac{\partial\psi}{\partial t} - \frac{1}{2}(\nabla\psi)^2 + P + P_h + P_E - P_\sigma = 0, \quad (7)$$

$$P_E = \frac{(\nabla\Phi)^2}{8\pi}, \quad P_h = \frac{A}{(h + \xi)^k}, \quad P_\sigma = \text{div } \mathbf{n} \quad (8)$$

и условия постоянства электрического потенциала поверхности жидкого слоя

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \Phi_S(t). \quad (9)$$

В соотношениях (7), (8) P — постоянное гидродинамическое давление внутри слоя жидкости в равновесном состоянии, P_E — давление электрического поля собственного заряда на свободную поверхность жидкости, P_σ — лапласовское давление, \mathbf{n} — единичный вектор нормали к свободной поверхности слоя. В (9) $\Phi_S(t)$ — постоянный вдоль свободной поверхности жидкости электростатический потенциал.

Необходимо также учесть условия: неизменности собственного электрического заряда

$$-\frac{1}{4\pi} \oint_S (\mathbf{n}\nabla\Phi) dS = Q, \quad S = \begin{cases} r = 1 + \xi(\theta, t), \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases} \quad (10)$$

неизменности объема слоя жидкости на поверхности градины

$$\int_{V_1} r^2 dV_1 = \frac{4}{3} \pi (1 - R_0^3), \quad V_1 = \begin{cases} R_0 \leq r \leq 1 + \xi(\theta, t), \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi, \end{cases} \quad (11)$$

неподвижности центра масс градины

$$\frac{\int_{V_1} \mathbf{r} dV_1 + \rho' \int_{V_2} \mathbf{r} dV_2}{\int_{V_1} dV_1 + \rho' \int_{V_2} dV_2} = 0, \quad V_2 = \begin{cases} 0 \leq r \leq R_0, \\ 0 \leq \theta \leq \pi, \\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь ρ' — массовая плотность твердого ядра.

Начальные условия сформулируем в виде задания начальной осесимметричной деформации равновесной сферической формы свободной поверхности слоя жидкости и равенства нулю начальной скорости движения поверхности

$$\xi(\theta, t = 0) = \xi_0 P_0(\mu) + \xi_1 P_1(\mu) + \varepsilon P_k(\mu), \quad (k \geq 2), \quad \mu \equiv \cos \theta, \quad (13)$$

$$(\partial\xi(\theta, t = 0)/\partial t) = 0. \quad (14)$$

Здесь ε — безразмерная амплитуда начального возмущения, являющаяся малым параметром задачи, $P_k(\mu)$ — полином Лежандра k -го порядка, ξ_0 и ξ_1 — константы.

Следует отметить, что условия (11) и (12) должны выполняться в любой момент времени, в том числе и начальный. Несложно показать, что, если в начальный момент времени возбуждена только одна мода, то условие неизменности объема жидкого слоя (11) и неподвижности центра масс (12) определяют константы ξ_0 и ξ_1 в (13)

$$\xi_0(\theta, t = 0) = -\varepsilon^2 \frac{1}{2k+1} + O(\varepsilon^3),$$

$$\xi_1(\theta, t = 0) = 0 + O(\varepsilon^3). \quad (15)$$

2. Описание процедуры решения

Решение задачи (3)–(14) в рамках теории возмущений будем искать методом многих временных масштабов [14]. Искомые функции $\xi(\theta, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ считаются зависящими не просто от времени t , а от разных его масштабов T_m , определенных как $T_m \equiv \varepsilon^m t$,

и представляются в виде асимптотических разложений по степеням малого параметра ε

$$\begin{aligned}\xi(\theta, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1, \dots), \\ \psi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots), \\ \Phi(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \Phi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots), \\ \Phi_S^m(\mathbf{r}, t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon^m \Phi_S^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots).\end{aligned}\quad (16)$$

Производные по времени в (6), (7) будем вычислять в соответствии с методом многих временных масштабов по правилу

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2 \frac{\partial}{\partial T_2} + O(\varepsilon^3).$$

Расклинивающее давление P_h , определенное соотношением (1), также разложим в ряд по степеням ε с сохранением слагаемых второго порядка малости

$$\begin{aligned}P_h &= \frac{A}{(h + \xi)^k} \approx \frac{A}{h^k} - \varepsilon \frac{kA}{h^{k+1}} \xi^{(1)} \\ &\quad - \varepsilon^2 \frac{kA}{h^{k+1}} \left[\xi^{(2)} - \frac{k+1}{2h} (\xi^{(1)})^2 \right], \quad \xi/h \ll 1.\end{aligned}\quad (17)$$

Подставив разложения (16), (17) в краевую задачу (3)–(12) и приравняв в каждом из уравнений слагаемые одного порядка малости, несложно получить набор краевых задач для последовательного определения неизвестных функций $\xi^{(m)}$, $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$.

3. Решение нулевого порядка

В нулевом порядке малости по ε (при $m = 0$) из задачи (3)–(12) получим решение нулевого порядка, описывающее равновесное состояние системы

$$\begin{aligned}\psi^{(0)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, \dots) &\equiv 0, & \xi^{(0)}(\theta, T_0, T_1, \dots) &\equiv 0, \\ \Phi_S^{(0)}(T_0, T_1, \dots) &\equiv Q, & \Phi^{(0)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, \dots) &\equiv \frac{Q}{r}, \\ P &= 2 - \frac{Q^2}{8\pi} - \frac{A}{h^k}.\end{aligned}\quad (18)$$

4. Решение первого порядка

Для $m \geq 1$ в силу линейности уравнений (3) им должна удовлетворять каждая из функций $\psi^{(m)}$, $\Phi^{(m)}$ в разложениях (16). Поэтому представим последние как

решения системы (3), с учетом (4) и (5), в виде рядов по полиномам Лежандра

$$\begin{aligned}\psi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots) &= \sum_{n=0}^{\infty} (D_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^n \\ &\quad + G_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1}) P_n(\mu), \\ \Phi^{(m)}(r, \theta, T_0, T_1, \dots) &= F^{(m)}(t) \\ &\quad + \sum_{n=0}^{\infty} F_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) r^{-n-1} P_n(\mu).\end{aligned}\quad (19)$$

В виде рядов по полиномам Лежандра будем искать и последовательные поправки $\xi^{(m)}$ к выражению, определяющему форму поверхности капли

$$\xi^{(m)}(\theta, T_0, T_1, \dots) = \sum_{n=0}^{\infty} M_n^{(m)}(T_0, T_1, \dots) P_n(\mu).\quad (20)$$

В первом порядке малости по ε для определения коэффициентов $G_n^{(1)}$, $D_n^{(1)}$, $F_n^{(1)}$, $M_n^{(1)}$ в решениях (19), (20) (при $m = 1$) система граничных и начальных условий (5)–(14) с учетом (15) преобразуются к виду

$$\begin{aligned}(r = R_0) \quad & \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} = 0, \\ (r = 1) \quad & \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r}, \quad -\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_0} + \frac{1}{4\pi} \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \\ & \times \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} \right) + (2 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)} = 0, \\ & \Phi^{(1)} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \xi^{(1)} = \Phi_S^{(1)}, \\ & \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \left(\frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) \xi^{(1)} \right] d\mu d\varphi = 0, \\ (t = 0) \quad & \xi^{(1)} + P_k(\mu), \quad \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_0} = 0, \quad \int_0^\pi \xi^{(1)} d\mu = 0.\end{aligned}\quad (21)$$

Здесь Δ_Ω — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

Подставив разложения (19), (20) (при $m = 1$), а также решения нулевого порядка малости (18) в систему граничных условий (21), несложно получить систему дифференциальных уравнений относительно коэффициентов $M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 M_n^{(1)}(t)}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(1)}(t) &= 0, \\ \omega_n^2 &= \chi(n)n \left[(n-1)(n+2-W) + \frac{kA}{h^{k+1}} \right], \\ W &= \frac{Q^2}{4\pi}, \quad \chi(n) = \frac{(n+1)(1-(1-h)^{2n+1})}{n+1+n(1-h)^{2n+1}}.\end{aligned}\quad (22)$$

Решения системы (22) имеют вид

$$M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = A_n(T_1, \dots) \exp(i\omega_n T_0) + \text{к. с.} \quad (n \geq 2), \quad (23)$$

где „к. с.“ означает слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным. Остальные коэффициенты $G_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$, $D_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$, $F_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$, выражаются через $M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)$ с помощью соотношений

$$D_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = \frac{1}{n(1 - (1-h)^{2n+1})} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0},$$

$$G_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = \frac{(1-h)^{2n+1}}{(n+1)(1 - (1-h)^{2n+1})} \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0},$$

$$F_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots) = Q M_n^{(1)}(T_0, T_1, \dots),$$

$$A_n(T_1, \dots) \equiv a_n(T_1, \dots) \exp[ib_n(T_1, \dots)],$$

$$M_0^{(1)}(t) = M_1^{(1)}(t) = D_1^{(1)}(t) = 0,$$

$$D_0^{(1)}(t) = D_0^{(1)}(T_1, T_2), \quad F^{(1)}(t) = \Phi_S^{(1)}(t) = 0.$$

Зависимости функций a_n и b_n от времени T_1 определяются в следующих порядках малости.

Чтобы завершить рассмотрение задачи в линейном по ε приближении, величины a_n и b_n можно положить не зависящими от времени, т. е.

$$\begin{aligned} a_n(T_1, \dots) &\approx a_n^{(0)} + O(T_1), \\ b_n(T_1, \dots) &\approx b_n^{(0)} + O(T_1). \end{aligned} \quad (24)$$

Несложно показать, что при этом для возмущения поверхности получается оценка

$$\xi(\theta, t) \approx \varepsilon \xi^{(1)}(\theta, t, a_n^{(0)}, b_n^{(0)}) + \varepsilon O(\varepsilon t), \quad (25)$$

где $a_n^{(0)}$, $b_n^{(0)}$ — константы, не зависящие от времени.

Ошибка в этом разложении окажется порядка первого члена, если $t \approx O(\varepsilon^{-1})$. Для значений $t \geq O(\varepsilon^{-1})$ данное разложение становится непригодным. Таким образом, выражение (25) справедливо на временном интервале $t \leq O(1)$; в этом случае ошибка составляет $\sim \varepsilon^2$. Однако при исследовании тенденций движения поверхности использовать (25) можно и на временных интервалах $t \leq O(\varepsilon^{-1})$ при условии выполнения требования сравнимости решения первого порядка с величиной начального возмущения. Более детальная информация о пределах применимости выписанного разложения может быть получена при анализе задачи в следующем квадратичном порядке малости по ε .

Подставив разложение (25) с учетом (15), (20), (23), (24) в начальные условия (13), (14) и приравняв друг другу величины одного порядка малости, получаем систему уравнений относительно a_n и b_n :

$$a_n(0, 0) \cos(b_n(0, 0)) = 0.5\delta_{nk},$$

$$a_n(0, 0) \sin(b_n(0, 0)) = 0,$$

из которой несложно найти

$$a_n = 0.5\delta_{nk}, \quad b_n = 0 \quad (n \geq 2),$$

где δ_{nk} — символ Кронекера.

В итоге функция, описывающая эволюцию формы поверхности капли со временем в линейном по ε приближении, будет иметь вид

$$\xi(\theta, t) = \varepsilon \cos(\omega_k t) P_k(\mu) + O(\varepsilon^2). \quad (26)$$

Согласно этому решению, в первом порядке возмущения по ε поверхность капли совершает гармонические колебания в окрестности равновесной сферы, соответствующие k -й (изначально возбужденной) моде.

Для потенциалов полей скоростей и электростатического потенциала в этом же приближении получим следующие решения:

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}, t) = & - \frac{\varepsilon \omega_k}{(1 - R_0^{2k+1})} \left(\frac{r^k}{k} + \frac{r^{-k-1}}{k+1} \right) \\ & \times \sin(\omega_k t) P_k(\mu) + O(\varepsilon^2), \end{aligned}$$

$$\Phi(\mathbf{r}, t) = \frac{Q}{r} + \varepsilon \frac{Q}{r^{k+1}} \cos(\omega_k t) P_k(\mu) + O(\varepsilon^2).$$

5. Решение второго порядка

Для определения поправок второго порядка малости, т. е. для отыскания функций $G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $D_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $F_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$, выпишем систему граничных условий (5)–(14), сохраняя слагаемые второго порядка малости по ε

$$(r = R_0) \quad \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} = 0,$$

кинематическое

$$\begin{aligned} (r = 1) \quad & \frac{\partial \xi^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial T_1} \\ & = \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \frac{\partial^{(2)} \psi^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

динамическое

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial \psi^{(2)}}{\partial T_0} - \frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial T_1} - \xi^{(1)} \frac{\partial^2 \psi^{(1)}}{\partial r \partial T_0} - \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ & + \frac{\varepsilon_*}{8\pi} \left[2 \frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \right)^2 \right] \\ & + 2\xi^{(2)} \frac{\partial \Phi^0}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} + 2\xi^{(1)} \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) \\ & + (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{\partial \Phi^{(0)}}{\partial r} \frac{\partial^3 \Phi^{(0)}}{\partial r^3} + \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(0)}}{\partial r^2} \right)^2 \right) + \left[(2 + \Delta_\Omega) \xi^{(2)} \right. \\ & \left. - 2\xi^{(1)} (1 + \Delta_\Omega) \xi^{(1)} \right] - \frac{kA}{h^{k+1}} \left[\xi^{(2)} - \frac{k+1}{2h} (\xi^{(1)})^2 \right] = 0, \end{aligned}$$

условие постоянства потенциала на поверхности

$$\Phi^{(2)} + \xi^{(2)} \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} + \xi^{(1)} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} + \frac{1}{2} (\xi^{(1)})^2 \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} = \Phi_s^{(2)},$$

условие постоянства заряда на капле

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[\frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)} \left(\frac{\partial^2 \Phi^{(1)}}{\partial r^2} + 2 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial r} \right) + \xi^{(2)} \left(\frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + 2 \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) + (\xi^{(1)})^2 \left(\frac{1}{2} \frac{d^3 \Phi^{(0)}}{dr^3} + 2 \frac{d^2 \Phi^{(0)}}{dr^2} + \frac{d\Phi^{(0)}}{dr} \right) - \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial \theta} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial r} \right] d\mu d\varphi = 0,$$

заданная форма начального возмущения при $t = 0$

$$\xi_0^{(2)} = -\frac{1}{(2k+1)},$$

равенство нулю начальной скорости движения поверхности ($t = 0$)

$$\frac{\partial \xi^{(2)}(\theta, t)}{\partial T_0} + \frac{\partial \xi^{(1)}(\theta, t)}{\partial T_1} = 0,$$

условие постоянства объема капли в произвольный момент времени

$$\int_0^\pi \left[\xi^{(2)}(\theta, t) + (\xi^{(1)}(\theta, t))^2 \right] d\mu = 0,$$

условие неподвижности центра масс капли

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left[2\xi^{(2)}(\theta, t) + 3(\xi^{(1)}(\theta, t))^2 \right] Y_1^m(\theta, \varphi) d\mu d\varphi = 0.$$

Подставив разложения (19), (20) (при $m = 2$), а также решения (18) и (23) в систему выписанных граничных условий задачи второго порядка малости, можно получить дифференциальное уравнение для нахождения неизвестных коэффициентов $M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_n^{(2)}}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(2)} = -2 \frac{\partial^2 M_n^{(1)}(t)}{\partial T_1 \partial T_0} + \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ \gamma_{mln} M_m^{(1)} M_l^{(1)} - \eta_{mln} \frac{\partial M_m^{(1)}}{\partial T_0} \frac{\partial M_l^{(1)}}{\partial T_0} \right\}, \quad (27) \\ \gamma_{mln} \equiv K_{mln} \left\{ n\chi_n \left[2[l(l+1) - 1] + \frac{W}{2} [l(m+1) - m(2m - 2n + 7) + 3] + \frac{k(k+1)A}{2h^{k+2}} \right] + \omega_m^2 [n\chi_n - v_m] \right\} + \alpha_{mln} \left\{ \frac{\chi_n n W}{2} + \frac{\omega_m^2}{m\chi_m} \right\}, \end{aligned}$$

$$\eta_{mln} \equiv K_{mln} \left[\frac{n\chi_n}{2} - v_m \right] + \frac{\alpha_{mln}}{m\chi_m} \left[1 + \frac{n\chi_n}{2l\chi_l} \right],$$

$$v_n = \frac{n-1 + (n+2)(1-h)^{2n+1}}{1 - (1-h)^{2n+1}},$$

$$K_{mln} \equiv [C_{m0l0}^{n0}]^2,$$

$$\alpha_{mln} \equiv -\sqrt{m(m+1)l(l+1)} C_{m0l0}^{n0} C_{m(-1)1(1)}^{n0},$$

$$C_{m0l0}^{n0} \equiv \begin{cases} 0, & \text{если } m+l+n = 2g+1, \\ & \text{где } g \text{ — целое число;} \\ \frac{(-1)^{g-n} \sqrt{2n+1} g!}{(g-m)!(g-l)!(g-n)!} \\ \times \left[\frac{(2g-2m)!(2g-2l)!(2g-2n)!}{(2g+1)!} \right]^{1/2}, & \\ & \text{если } m+l+n = 2g, \text{ где } g \text{ — целое число,} \end{cases}$$

$$C_{m(-1)1(1)}^{n0} \equiv \sqrt{2n+1} n!$$

$$\begin{aligned} & \times \left[\frac{(m+l-n)! m(m+1)}{(n+m-l)!(n-m+l)!(m+l+n+1)l(l+1)} \right]^{1/2} \\ & \times \sum_z \frac{(-1)^{m+1+z} (m+z-1)!(n+l-z+1)}{z!(m-z+1)!(n-z)!(l-n+z-1)!}. \quad (28) \end{aligned}$$

В последней сумме суммирование ведется по всем целым значениям z , для которых выражения под знаком факториала неотрицательны. C_{n0m0l0} и $C_{m(-1)1(1)}^{n0}$ (коэффициенты Клебша–Гордана [15]) отличны от нуля при условии, что их нижние индексы удовлетворяют соотношениям

$$|m-l| \leq n \leq (m+l), \quad m+l+n = 2g \quad (g \text{ — целое число}).$$

Это неоднородное дифференциальное уравнение, подставив в его правую часть решение первого порядка, записанное в виде

$$\begin{aligned} M_n^{(10)}(t) = A_n(T_1, T_2) \exp(i\omega T_0) + \bar{A}_n(T_1, T_2) \exp(-i\omega T_0), \\ A_n(T_1, T_2) \equiv a_n(T_1, \dots) \exp(ib_n(T_1, \dots)). \quad (29) \end{aligned}$$

Горизонтальная черта сверху над A_n обозначает комплексное сопряжение.

Расписывая слагаемые в правой части (27) с учетом (29), для уравнения относительно коэффициентов $M_n^{(2)}(t)$ получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_n^{(2)}}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(2)} = -2i\omega_n \frac{\partial A_n(T_1, \dots)}{\partial T_1} \exp(i\omega_n T_0) \\ \times \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ [\gamma_{mln} + \omega_m \omega_l \eta_{mln}] A_m(T_1, \dots) A_l(T_1, \dots) \right. \\ \times \exp(i(\omega_m + \omega_l) T_0) + [\gamma_{mln} - \omega_m \omega_l \eta_{mln}] A_m(T_1, \dots) \\ \times \bar{A}_l(T_1, \dots) \exp(i(\omega_m - \omega_l) T_0) \left. \right\} + \kappa. c. \end{aligned}$$

Для того чтобы исключить из решения этого уравнения секулярные (т.е. неограниченно возрастающие во времени) члены, необходимо потребовать, чтобы в правой части исчезли слагаемые, пропорциональные $\exp(i\omega_n T_0)$, т.е. описывающие внешнее воздействие с частотой ω_n , равной одной из частот собственных колебаний системы.

Таким образом, необходимо, чтобы

$$-2i\omega_n \frac{\partial A_n(T_1, \dots)}{\partial T_1} \exp(i\omega_n T_0) + \text{к. с.} = 0.$$

Учитывая (40), приходим к заключению, что

$$\frac{\partial a_n(T_1, \dots)}{\partial T_1} = 0, \quad \frac{\partial b_n(T_1, \dots)}{\partial T_1} = 0,$$

т.е. получаем, что a_n и b_n в решениях первого порядка малости (24) не зависят от времени T_1 . Их зависимость от более медленных времени T_2, T_3 и т.д. может быть определена только в следующих порядках приближений. Таким образом, в дальнейшем будем полагать, что амплитуды разложения $M_m^{(1)}$ зависят только от временных масштабов T_0

$$M_m^{(1)}(T_0, T_1, \dots) \approx M_m^{(1)}(T_0) + O(T_2).$$

Уравнение для коэффициентов $M_n^{(2)}(t)$ примет вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_n^{(2)}}{\partial T_0^2} + \omega_n^2 M_n^{(2)} &= \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ [\gamma_{mln} + \omega_m \omega_l \eta_{mln}] A_m(T_2) \right. \\ &\times A_l(T_2) \exp(i(\omega_m + \omega_l)T_0) + [\gamma_{mln} - \omega_m \omega_l \eta_{mln}] A_m(T_2) \\ &\times \bar{A}_l(T_2) \exp(i(\omega_m - \omega_l)T_0) \left. \right\} + \text{к. с.} \end{aligned} \quad (30)$$

Частное решение (30) ищется в виде

$$\begin{aligned} M_n^{(2)}(T_0, T_2, \dots) &= \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ \lambda_{mln}^{(+)} A_m(T_2, \dots) A_l(T_2, \dots) \right. \\ &\times \exp[i(\omega_m + \omega_l)T_0] + \lambda_{mln}^{(-)} A_m(T_2, \dots) \bar{A}_l(T_2, \dots) \\ &\times \exp[i(\omega_m - \omega_l)T_0] + \text{к. с.} \left. \right\}, \\ \lambda_{mln}^{(\pm)} &= \frac{\gamma_{mln} \pm \omega_n \omega_l \eta_{mln}}{\omega_n^2 - (\omega_m \pm \omega_l)^2}. \end{aligned} \quad (31)$$

Общее решение неоднородного дифференциального уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} M_0^{(2)}(T_0, T_2, \dots) &= - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left\{ A_n(T_2, \dots) \bar{A}_n(T_2, \dots) \right. \\ &+ [A_n(T_2, \dots)]^2 \exp(i2\omega_n T_0) + \text{к. с.} \left. \right\}, \\ M_0^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \left\{ c_n(T_2, \dots) \exp(id_n(T_1, \dots)) \right. \\ &\times \exp(i\omega_n T_0) + \text{к. с.} \left. \right\} + N_n(T_0, T_2, \dots), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_n(T_0, T_2, \dots) &\equiv \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left\{ \lambda_{mln}^{(+)} A_m(T_2, \dots) A_l(T_2, \dots) \right. \\ &\times \exp[i(\omega_m + \omega_l)T_0] + \lambda_{mln}^{(-)} A_m(T_2, \dots) \bar{A}_l(T_2, \dots) \\ &\times \exp[i(\omega_m - \omega_l)T_0] + \text{к. с.} \left. \right\}. \end{aligned} \quad (32)$$

В решении (32) $c_n(T_1, \dots)$ и $d_n(T_1, \dots)$ — неизвестные функции времени, которые не зависят от временного масштаба T_0 . Чтобы завершить рассмотрение задачи в квадратичном приближении, следует как это делалось в линейном приближении неизвестные величины a_n, b_n, c_n, d_n положить не зависящими от времени, т.е. равными константам, значения которых определяются начальными условиями (13), (14), поскольку справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} a_n &\approx a_n^{(0)} + O(T_2), & b_n &\approx b_n^{(0)} + O(T_2), \\ c_n &\approx c_n^{(0)} + O(T_1), & d_n &\approx d_n^{(0)} + O(T_1). \end{aligned}$$

В этом случае разложение (20) для функции, описывающей искажение формы поверхности жидкого слоя, принимает вид

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) &\approx \varepsilon \varepsilon^{(1)}(\theta, T_0, a_n^{(0)}, b_n^{(0)}) \\ &+ \varepsilon^2 \xi^{(2)}(\theta, T_0, a_n^{(0)}, b_n^{(0)}, c_n^{(0)}, d_n^{(0)}) + O(\varepsilon^3 t). \end{aligned} \quad (33)$$

Выражение (33) справедливо на временном интервале $t \leq O(1)$ с ошибкой $\sim \varepsilon^3$. На временном интервале $O(1) \leq t \leq O(\varepsilon^{-1})$ величина ошибки сравнима со вторым слагаемым (с поправкой второго порядка малости), и следовательно, в выражении (33) справедливым останется лишь первый член, соответствующий линейному приближению. Таким образом, приближенное линейное решение (26) задачи применимо (равномерно пригоден) на временном интервале $t \leq O(\varepsilon^{-1})$.

Подставим разложение (33) в начальные условия (13), (14) и приравняв друг другу величины одного порядка малости, с учетом (20) получим следующие соотношения ($t = 0$):

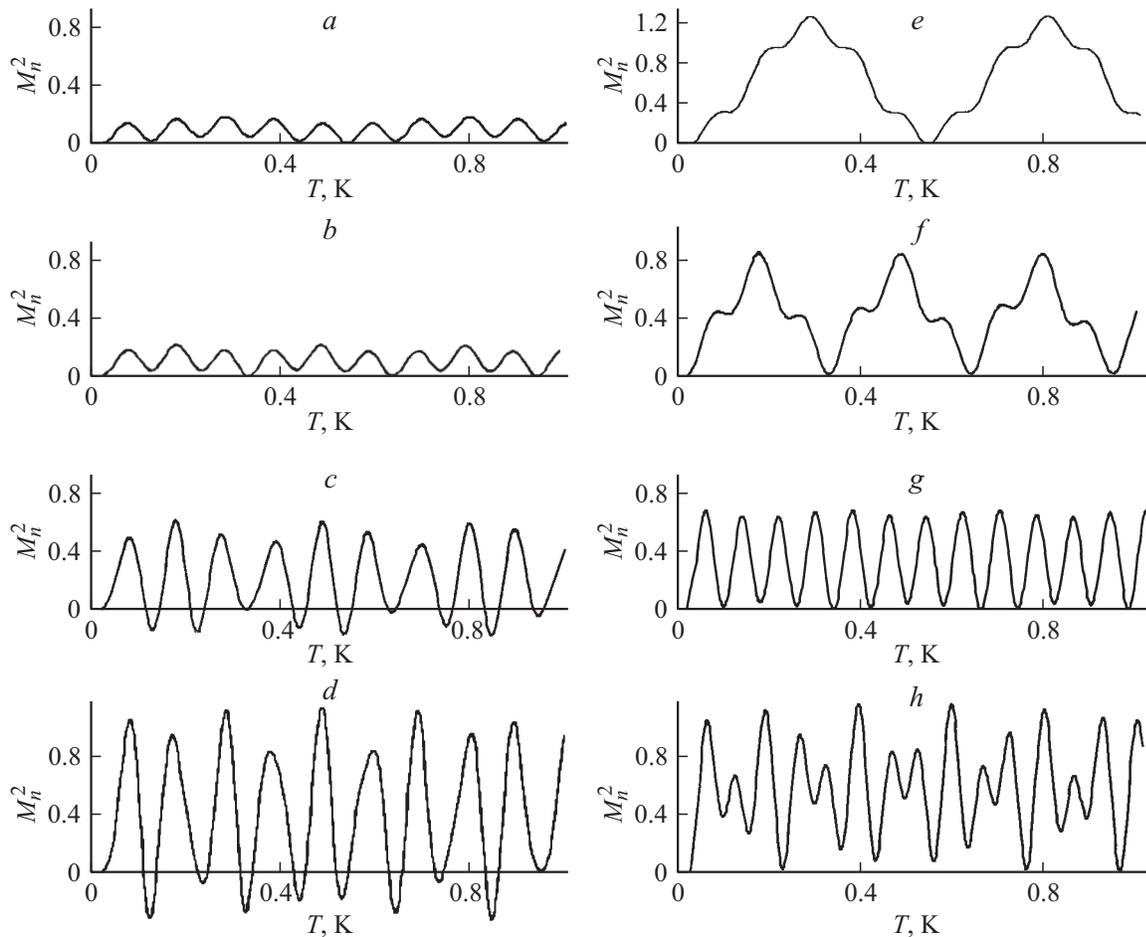
$$M_n^{(1)} = \delta_{nk}, \quad M_n^{(2)} = \frac{\delta_{n0}}{2k+1},$$

$$\frac{\partial M_n^{(1)}}{\partial T_0} = 0, \quad \frac{\partial M_n^{(2)}}{\partial T_0} + \frac{\partial M_n^{(1)}}{\partial T_1} = 0,$$

из которых, используя выражения (23) и (32), определим неизвестные константы $a_n^{(0)}, b_n^{(0)}, c_n^{(0)}, d_n^{(0)}$:

$$a_n^{(0)} = \frac{1}{2} \delta_{nk}, \quad b_n^{(0)} = 0,$$

$$c_n^{(0)} = -\frac{1 - \delta_{n0}}{2} N \quad (t = 0), \quad d_n^{(0)} = 0.$$



Зависимости от безразмерного времени безразмерных амплитудных коэффициентов $M_n^{(2)}(t)$ мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия во втором порядке малости при начальной деформации, определяющейся модой с $k = 10$, рассчитанные при $h = 0.1, W = 1$: (a–d) — без учета расклинивающего давления; (e–h) — с его учетом при $A = 0.001$. Значения параметра n : 6 (a, e), 8 (b, f), 18 (c, g), 20 (d, h).

В итоге решения (23) и (32) для коэффициентов $M_n^{(m)}(t)$ примут окончательный вид

$$M_n^{(1)}(t) = \delta_{nk} \cos(\omega_n t), \quad M_0^{(2)}(t) = \frac{1}{2(2k+1)} [1 + \cos(\omega_k t)],$$

$$M_1^{(2)}(t) = 0, \quad M_n^{(2)}(t) = N_n(0) \cos(\omega_n t) + N_n(t) \quad (n \geq 2),$$

$$N_n(t) = \frac{1}{2} (\lambda_{kkn}^{(-)} + \lambda_{kkn}^{(+)} \cos(2\omega_k t)). \quad (34)$$

Несложно заметить, что коэффициенты $M_n^{(2)}(t)$ пропорциональны величинам $\lambda_{kkn}^{(\pm)}$, которые, согласно обозначениям, введенным в (28) и (31), пропорциональны коэффициентам Клебша–Гордана C_{m0j0}^{n0} и $C_{m(-01)j(1)}^{n0}$ и, следовательно, отличны от нуля только для $n = 2j$ ($j = 0, \dots, k$).

Подставив (20) и (34) в (33), получим, что изменение во времени формы поверхности жидкого слоя с точностью до слагаемых второго порядка малости будет

описываться функцией

$$\begin{aligned} \xi(\theta, t) \approx & \varepsilon \cos(\omega_k t) P_k(\mu) - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2k+1} [1 + \cos(2\omega_k t)] \right. \\ & + \sum_{j=1}^k \left[(\lambda_{kk2j}^{(-)} + \lambda_{kk2j}^{(+)}) \cos(\omega_{2j} t) \right. \\ & \left. \left. - (\lambda_{kk2j}^{(-)} + \lambda_{kk2j}^{(+)} \cos(2\omega_k t)) \right] P_{2j}(\mu) \right\} + O(\varepsilon^3 t). \quad (35) \end{aligned}$$

Из (35) видно, что начальное возмущение любой k -й (четной либо нечетной) одиночной моды капиллярных колебаний приводит к возбуждению во втором порядке малости только четных мод с номерами, лежащими в диапазоне $[0; 2k]$.

Коэффициенты в разложениях (19) для потенциала поля скорости $\psi^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ и электростатического потенциала $\Phi^{(m)}(\mathbf{r}, t)$ связаны с решениями (23) и (32) следующими

соотношениями:

$$\begin{aligned}
 D_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{1}{n(1 - (1-h)^{2n+1})} \\
 &\times \left\{ \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left[v_m K_{mln} - \frac{\alpha_{mln}}{m\chi_m} \right] \right. \\
 &\times \left. \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_2, \dots)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0, T_2, \dots) \right\}, \\
 G_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= \frac{(1-h)^{2n+1}}{(n+1)(1 - (1-h)^{2n+1})} \\
 &\times \left\{ \frac{\partial M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots)}{\partial T_0} - \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} \left[v_m K_{mln} - \frac{\alpha_{mln}}{m\chi_m} \right] \right. \\
 &\times \left. \frac{\partial M_n^{(1)}(T_0, T_2, \dots)}{\partial T_0} M_l^{(1)}(T_0, T_2, \dots) \right\}, \\
 F_0^2(T_0, T_1, \dots) &= 0, \\
 F_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) &= Q \left\{ M_n^{(2)}(T_0, T_1, \dots) \right. \\
 &+ \left. \sum_{m=2}^{\infty} \sum_{l=2}^{\infty} m K_{mln} M_m^{(1)}(T_0, T_2, \dots) M_l^{(1)}(T_0, T_2, \dots) \right\}.
 \end{aligned}$$

6. Анализ полученных результатов

На рисунке приведены рассчитанные по (34) зависимости от безразмерного времени безразмерных амплитудных коэффициентов $M_n^{(2)}(t)$ мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия во втором порядке малости, при начальной деформации свободной поверхности жидкого слоя, определяющейся одной модой, с учетом или без учета расклинивающего давления. Проведенные расчеты, проиллюстрированные рисунком, подтверждают ранее обнаруженный в тонких слоях жидкости в отсутствие влияния расклинивающего давления [16] феномен увеличения амплитуд нелинейно возбуждающихся во втором порядке малости мод с высокими номерами за счет перекачки энергии из мод с низкими номерами. Учет действия в тонких слоях жидкости расклинивающего давления приводит к росту амплитуд всех нелинейно возбуждающихся во втором порядке малости мод. Кроме того, выяснилось, что при наличии расклинивающего давления при начальном возбуждении k -й моды частоты мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия, с номерами, меньшими k , снижаются, а мод с номерами, большими k , наоборот, увеличиваются. Интересно, что при наличии расклинивающего давления знак нелинейных амплитудных коэффициентов мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия, всегда положителен, хотя величина самих коэффициентов периодически меняется со временем, тогда как в отсутствие расклинивающего давления знак амплитудных коэффициентов периодически меняется со временем.

Из выражения (35) можно видеть, что наличие расклинивающего давления скажется и на форме поверхности, в окрестности которой происходят нелинейные осцилляции жидкого слоя. Эта поверхность определяется слагаемыми (35), не зависящими от времени, и имеет вид

$$r(\theta) = 1 - \varepsilon^2 \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2k+1} - \sum_{j=1}^k \lambda_{kk2j}^{(-)} P_{2j}(\mu) \right] + O(\varepsilon^3 t).$$

Поскольку коэффициенты $\lambda_{kk2j}^{(-)}$ зависят от расклинивающего давления, то от него будет зависеть и форма поверхности $r(\theta)$.

Из выражения (22) для квадрата частоты видно, что наличие расклинивающего давления повышает устойчивость жидкого слоя на поверхности градины по отношению к собственному заряду, как об этом сообщалось в [9–11]. Важное геофизическое следствие этого обстоятельства сводится к тому, что в грозовом облаке на уровне таяния снежной крупы и сухих градин должен существовать слой облака толщиной ~ 100 – 1000 м, в котором водяная пленка на тающих градинах и снежинках достаточно тонка (< 100 нм) и устойчива по отношению к собственному заряду и внешнему полю. В этом слое облака накопление на отдельных градинах весьма больших одноименных зарядов не будет лимитироваться феноменом рэлеевской неустойчивости водяного слоя. По-видимому, такой слой облака может быть ассоциирован с уровнем „мокрого роста града“, на котором, собственно, и идут основные процессы разделения электрических зарядов, т.е. процессы организованной внутриоблачной электризации. Температуры, характерные для уровня „мокрого роста града“ — ≈ 250 – 260 К, т.е. вода в водяной пленке на поверхности градины находится в переохлажденном состоянии, следовательно, процессы агрегационного роста града должны в этом слое облака идти с большой скоростью, что и обеспечит образование крупных сильно заряженных градин. Сброс собственного электрического заряда градины может иметь место при заигании коронного разряда на заострениях рельефа жидкого слоя при нелинейном росте амплитуды осцилляций.

Заключение

Получено аналитическое асимптотическое решение задачи о нелинейных осцилляциях заряженного тонкого слоя электропроводной жидкости на поверхности твердого сферического ядра при учете влияния расклинивающего давления (флуктуационных сил). Выяснилось, что расклинивающее давление приводит к повышению устойчивости слоя жидкости по отношению к собственному заряду и к изменению амплитуд и частот мод, возбуждающихся за счет нелинейного взаимодействия.

Работа выполнена при поддержке гранта № 06-01-00066-а.

Список литературы

- [1] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 5. С. 6–14.
- [2] Grigor'ev A.I., Shiryayeva S.O. // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
- [3] Золотой Н.Б., Карпов Г.В., Скурлат В.Е. // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 2. С. 315–323.
- [4] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 8. С. 162–170.
- [5] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 12. С. 9–20.
- [6] Григорьев А.И., Морозов В.В. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 10. С. 33–40.
- [7] Лазарянец А.Э., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 6. С. 29–36.
- [8] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 9. С. 8–13.
- [9] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Коромыслов В.А., Муничев М.И. // Письма в ЖТФ. 1996. Вып. 10. С. 23–29.
- [10] Григорьев А.И., Муничев М.И. // ЭОМ. 1992. № 4. С. 26–30.
- [11] Grigor'ev A.I., Municodev M.I., Shiryayeva S.O. // J. Coll. Int. Sci. 1994. N 166. P. 267–274.
- [12] Дерягин Б.В. Теория устойчивости коллоидов и тонких пленок. М.: Наука, 1986. 405 с.
- [13] Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкости. М.: Наука, 1975. 592 с.
- [14] Найфе А. Методы возмущений. М.: Мир, 1983. 455 с.
- [15] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
- [16] Коромыслов В.А. Аналитическое асимптотическое исследование нелинейных осцилляций заряженных капель, движущихся относительно среды. Автореф. докт. дис. М., 2006. 32 с.