

01;04

Принцип зарядово-массовой инвариантности движения и возможность стационарных уединенных электростатических волн в почти симметричной плазме

© В.А. Гордиенко, А.Е. Дубинов

Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607190 Саров, Нижегородская область, Россия
e-mail: dubinov-ae@yandex.ru

(Поступило в Редакцию 8 мая 2007 г.)

Рассмотрена квазинейтральная почти симметричная плазма, т.е. плазма, в которой частицы противоположных знаков заряда имеют одинаковые величины отношений заряда к массе, но разные массы. Для такой плазмы строго доказана возможность существования стационарных уединенных электростатических волн в плазме. Эта возможность связана с нарушением принципа зарядово-массовой инвариантности движения частиц в почти симметричной плазме, которое, в свою очередь, обязано силам неэлектромагнитной природы $(1/n_{\pm})\partial P_{\pm}/\partial x$.

PACS: 52.27.Er, 52.35.Fp.

1. Принцип зарядово-массовой инвариантности движения

Известно, что если две частицы имеют различные заряды $q_1 \neq q_2$ и массы $m_1 \neq m_2$, но равные их отношения $q_1/q_2 = m_1/m_2 = \lambda$, то нерелятивистские движения таких частиц в одном и том же электромагнитном поле механически неразличимы. Этот факт непосредственно следует из уравнения движения заряженной частицы

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}{c} \right) \quad (1)$$

и представляет собой принцип зарядово-массовой инвариантности движения. Если на частицу действуют дополнительно силы неэлектромагнитной природы, такие как гравитационная сила, сила трения и т.п., то указанный принцип не выполняется, т.е. механические параметры движения частиц будут различными. Аналогичный принцип имеет место и для совокупности заряженных частиц (плазмы).

Рассмотрим бесстолкновительную холодную плазму, на частицы которой не действуют силы неэлектромагнитной природы. Тогда ее движение определяется обычными уравнениями гидродинамики. Мысленно мгновенно поменяем все частицы одной из компонент (сорта 1) плазмы на некоторое количество других частиц (сорта 2) так, чтобы сохранилось соотношение $q_1/q_2 = m_1/m_2 = \lambda$ и чтобы выполнялось условие квазинейтральности плазмы. Тогда механические движения обеих плазм будут неразличимы. Например, циклотронные и плазменные частоты в новой плазме

$$\Omega = \frac{q_1 B}{m_1 c} = \frac{q_2 B}{m_2 c}; \quad \omega = \sqrt{\frac{4\pi q_1^2 n_1}{m_1}} = \sqrt{\frac{4\pi q_2^2 n_2}{m_2}} \quad (2)$$

останутся прежними (последняя — с учетом соблюдения условия квазинейтральности). Однако если пред-

положить возможность действия в плазме сил неэлектромагнитной природы, то принцип зарядово-массовой инвариантности будет нарушаться.

Эти рассуждения являются тривиальными и сами по себе уже не требуют специального упоминания. Тем не менее до сих пор продолжают появляться работы, где условия справедливости и нарушения принципа зарядово-массовой инвариантности движения игнорируются.

2. „Невозможные“ процессы в симметричной плазме

В последнее время в связи с успехами в получении в лаборатории симметричной плазмы, т.е. плазмы с компонентами, имеющими $m_- = m_+$ и $q_- = -q_+$ (например, электрон-позитронная [1,2] или кластерная фуллереновая [3,4] плазма), активизировалось развитие теории волновых процессов в ней.

Получила широкое распространение точка зрения, что многие процессы, присущие обычной электрон-ионной плазме, в симметричной плазме, с учетом ее квазинейтральности, невозможны. К числу невозможных процессов в симметричной плазме относят: заряженные пристеночные слои [3], двойные электрические слои [3], стационарные уединенные электростатические волны [5] в немагнитной плазме и нижнегибридные моды [6], вистлеры [6] и геликоны [7], а также фарадеевское вращение [6,8] в замагнитной плазме. Обратим внимание на то, что [3,5–8] — работы разных авторов и почти все вышли совсем недавно. Это позволяет сделать вывод, что в настоящее время господствует убеждение о невозможности указанных процессов и других подобных в симметричной плазме.

Анализ указанных и более ранних работ показал, что данное убеждение основано на рассмотрении либо

изотермической ($T_- = T_+$), либо абсолютно холодной ($T_{\pm} = 0$) симметричной плазмы. Однако если допустить наличие в симметричной плазме каких-либо факторов асимметрии, то все перечисленные процессы могут быть обнаружены.

К числу таких факторов можно отнести следующие:
 — неравенство начальных температур компонент ($T_- \neq T_+$);
 — различия в степени анизотропии температур компонент (например, $T_-^{\perp} = T_+^{\perp}$, но $T_-^{\parallel} \neq T_+^{\parallel}$, или наоборот);
 — неравенство показателей адиабат ($\gamma_+ \neq \gamma_-$) для адиабатических процессов при равенстве начальных температур и др.

В рамках первого предположения в [9,10] было показано, что в симметричной плазме возможны стационарные уединенные электростатические волны, в [11] — что возможны заряженные пристеночные слои, которые при некоторых условиях могут иметь структуру двойных электрических слоев, а в [12] показано, что возможно фарадеевское вращение. Кроме этого, в [13] было показано, что стационарные уединенные электростатические волны возможны в симметричной плазме и в случае выполнения третьего предположения.

Возникает вопрос, а могут ли в симметричной плазме с компонентами $q_- \neq -q_+$ и $m_- \neq m_+$, но при этом $-q_-/q_+ = m_-/m_+ = \lambda \neq 1$ (а такую плазму в некотором смысле можно назвать почти симметричной) даже при $T_- = T_+$ и $\gamma_- = \gamma_+$ существовать указанные выше „невозможные“ процессы? Примеры почти симметричных плазм — ионные плазмы типа $D^- - He^{2+}$ или $O^- - S^{2+}$, которые могут быть получены путем инжекции соответствующих ионных пучков в ловушку.

Наиболее показательной в этом смысле является работа [5], в которой делается попытка ответа на этот вопрос. В ней „строго“ доказано, что в симметричной плазме с $m_- = m_+$ и $q_- = -q_+$ стационарные уединенные электростатические волны невозможны. Доказательство основано на исследовании стационарных волновых решений системы уравнений газовой динамики компонент плазмы, уравнений их непрерывности и уравнений электромагнитного поля при помощи техники псевдопотенциала Сагдеева [14]. При этом в уравнения динамики компонент в газодинамические слагаемые подставлялись уравнения состояния обеих компонент плазмы в виде адиабатических законов с равными коэффициентами пропорциональности и показателями степени в силу одинаковости свойств частиц. Справедливость доказательства работы [5] не вызывает сомнений. Однако вывод о „невозможности“ стационарных уединенных волн там необоснованно распространен и на случай почти симметричной плазмы с компонентами, имеющими $-q_-/q_+ = m_-/m_+ = \lambda \neq 1$ (см. выводы к работе [5]). Поскольку в уравнения динамики компонент входили силы неэлектромагнитной природы типа $(1/n_{\pm})\partial P_{\pm}/\partial x$, где P_{\pm} — давления компонент, то указанное обобщение является ошибочным вследствие нарушения принципа зарядово-массовой инвариантности движения.

Ниже мы покажем, что в такой плазме стационарные уединенные электростатические волны возможны вопреки выводам [5]. Более того, можно сделать обобщающий вывод о том, что если процесс в почти симметричной плазме описывается уравнениями, не допускающими зарядово-массовой инвариантности движения, то такие процессы возможны даже при одинаковых начальных температурах и показателях адиабаты компонент.

3. Стационарные электростатические уединенные волны в почти симметричной плазме

Рассмотрим почти симметричную однородную бесстолкновительную плазму с $\lambda \neq 1$. Будем исходить из следующих стандартных уравнений: непрерывности

$$\frac{\partial n_{\pm}}{\partial t} + \frac{\partial(n_{\pm}u_{\pm})}{\partial x} = 0, \quad (3)$$

динамики

$$m_{\pm} \left(\frac{\partial u_{\pm}}{\partial t} + u_{\pm} \frac{\partial u_{\pm}}{\partial x} \right) = q_{\pm} \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{1}{n_{\pm}} \frac{\partial P_{\pm}}{\partial x} \quad (4)$$

и уравнения Пуассона

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -4\pi(q_-n_- + q_+n_+). \quad (5)$$

Поскольку для доказательства существования уединенных волн достаточно указать лишь один пример, рассмотрим самую простую ситуацию — волну как изотермический процесс. Для этого дополним систему уравнений (3)–(5) уравнениями состояния компонент, считая, что обе компоненты имеют одинаковые показатели адиабаты $\gamma_{\pm} = 1$ и изначально одинаковые температуры $T_{0\pm} = T_0$:

$$P_{\pm} = kT_0 n_{\pm}. \quad (6)$$

Придадим плазме волновое возмущение, движущееся со скоростью V . Будем искать решение системы в виде стационарной волны, для чего введем новую автономную переменную

$$\xi = x - Vt, \quad \frac{\partial}{\partial t} = -V \frac{d}{d\xi}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{d}{d\xi}. \quad (7)$$

Тогда система уравнений (3)–(5) с учетом (6) и (7) запишется как

$$-V \frac{dn_{\pm}}{d\xi} + \frac{d}{d\xi} (n_{\pm}u_{\pm}) = 0; \quad (8)$$

$$(u_{\pm} - V) \frac{du_{\pm}}{d\xi} = \frac{q_{\pm}}{m_{\pm}} \frac{d\varphi}{d\xi} - \frac{kT_0}{m_{\pm}n_{\pm}} \frac{dn_{\pm}}{d\xi}; \quad (9)$$

$$\frac{d^2 \varphi}{d\xi^2} = -4\pi(q_-n_- + q_+n_+). \quad (10)$$

Решения уравнений непрерывности с начальными условиями $n_+ = n_0$ и $n_- = n_0/\lambda$ при $u_{\pm} = 0$ есть

$$u_+ = V \left(1 - \frac{n_0}{n_+} \right), \quad u_- = V \left(1 - \frac{n_0}{\lambda n_-} \right), \quad (11)$$

а уравнений движения с начальными условиями $n_+ = n_0$, $n_- = n_0/\lambda$, $\varphi = 0$ при $u_{\pm} = 0$:

$$\frac{u_+^2}{2} - Vu_+ = \frac{q_+\varphi}{m_+} + \frac{kT_0}{m_+} \ln \frac{n_0}{n_+},$$

$$\frac{u_-^2}{2} - Vu_- = \frac{q_-\varphi}{m_-} + \frac{kT_0}{m_-} \ln \frac{n_0}{\lambda n_-}. \quad (12)$$

Подставив (11) в (12), а затем решив (12) относительно n_{\pm} , получим

$$n_+ = n_0 \sqrt{-\frac{m_+ V^2}{kT_0} \frac{1}{W_{0,-1} \left[-\frac{m_+ V^2}{kT_0} \exp\left(-\frac{m_+ V^2 + 2q_+\varphi}{kT_0}\right) \right]}}, \quad (13)$$

$$n_- = \frac{n_0}{\lambda} \sqrt{-\frac{m_- V^2}{kT_0} \frac{1}{W_{0,-1} \left[-\frac{m_- V^2}{kT_0} \exp\left(-\frac{m_- V^2 + 2q_-\varphi}{kT_0}\right) \right]}}. \quad (14)$$

В (13) и (14): $W_0(x)$ — основная (верхняя) ветвь „0“ и $W_{-1}(0)$ — отрицательная (нижняя) ветвь „-1“ W -функции Ламберта, разделяемые точкой сопряжения с координатами $(-1/e, 1)$ [15–17].

Отбросить нефизичные корни (лишние ветви W -функции) в решениях (13), (14) можно, воспользовавшись условием квазинейтральности для невозмущенной плазмы. В выражении (13) только одна ветвь проходит через точку $n_+(\varphi) = n_0$ при $\varphi = 0$, и именно эта ветвь может удовлетворять условию квазинейтральности. Аналогично в выражении (14) только одна ветвь проходит через точку $n_-(\varphi) = n_0/\lambda$ при $\varphi = 0$, и именно эта ветвь может удовлетворять этому условию. Однако при различных значениях параметров задачи возможны разные комбинации номеров физически „верных“ ветвей из (13) и (14). Так, например, на показанных на рис. 1, *a* зависимостях $n_{\pm}(\varphi)$ из (13) оставлены ветви „0“ для положительных частиц и „-1“ для отрицательных, а на рис. 2, *a* — „-1“ для положительных частиц и „0“ для отрицательных из (14) (отброшенные ветви везде показаны пунктиром). Ниже станет ясным такой выбор примеров.

Анализ (13) и (14) показал, что для положительно заряженных частиц при $\alpha_+ = m_+ V^2/kT_0 > 1$ необходимо брать основную ветвь „0“ W -функции Ламберта, а при $\alpha_- = m_- V^2/kT_0 = \lambda \alpha_+ > 1$ необходимо брать основную ветвь „0“ и для отрицательно заряженных частиц. В противоположных случаях $\alpha_{\pm} < 1$ соответствующие отрицательные ветви „-1“ удовлетворяют условию квазинейтральности плазмы.

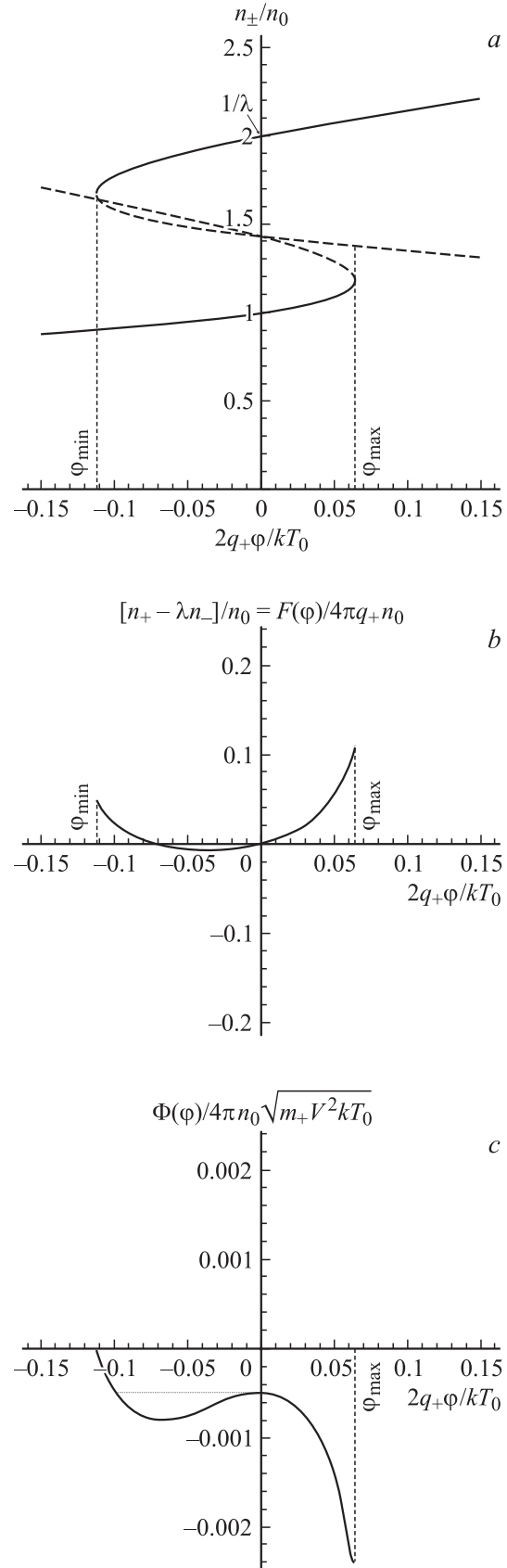


Рис. 1. Графики зависимостей для режима с $\alpha_+ = 1.4$ и $\alpha_- = 0.7$ ($\lambda = 1/2$): *a* — $n_{\pm}(\varphi)$, отбрасываемые нефизичные ветви показаны пунктиром; *b* — $F(\varphi)$; *c* — $\Phi(\varphi)$.

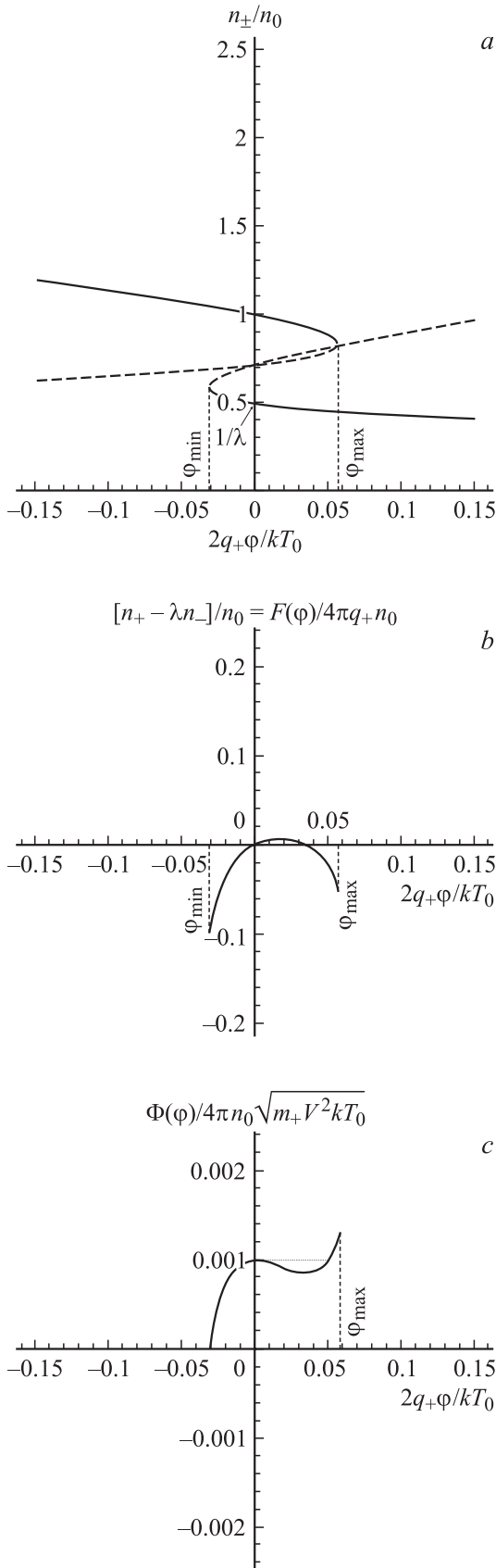


Рис. 2. Графики зависимостей для режима с $\alpha_+ = 0.7$ и $\alpha_- = 1.4$ ($\lambda = 2$): *a* — $n_{\pm}(\varphi)$, отбрасываемые нефизические ветви показаны пунктиром; *b* — $F(\varphi)$; *c* — $\Phi(\varphi)$.

Структура полученных решений (13), (14) такова, что концентрация отрицательных частиц $n_-(\varphi)$ определена только при $\varphi \geq \varphi_{\min}$, а положительных $n_+(\varphi)$ — только при $\varphi \leq \varphi_{\max}$. Таким образом, плотность пространственного заряда, т.е. разность $n_+(\varphi) - n_-(\varphi)$, определена на отрезке $[\varphi_{\min}, \varphi_{\max}]$, концы которого легко определить как точки сопряжения ветвей W -функции Ламберта соответствующих аргументов (в точке сопряжения ее аргумент должен быть равен $-\exp(-1)$):

$$\varphi_{\max, \min} = \frac{1}{2q_{\pm}} \left[m_{\pm} V^2 - kT_0 \left(1 + \ln \frac{m_{\pm} V^2}{kT_0} \right) \right]. \quad (15)$$

Для примеров, соответствующих рис. 1 и 2, из (15) получим следующие численные значения:

$$\varphi_{\min} \approx -0.1133kT_0/2q_+,$$

$$\varphi_{\max} \approx 0.0635kT_0/2q_+ \quad (\text{для рис. 1}),$$

$$\varphi_{\min} \approx -0.0318kT_0/2q_+,$$

$$\varphi_{\max} \approx 0.0567kT_0/2q_+ \quad (\text{для рис. 2}). \quad (16)$$

Положения границ φ_{\max} и φ_{\min} на рис. 1 показаны пунктиром.

Графики нормированной разности

$$[n_+(\varphi) - \lambda n_-(\varphi)]/n_0 = F(\varphi)/4\pi q_+ n_0,$$

которая пропорциональна величине пространственного заряда, показаны на рис. 1, *b* и рис. 2, *b*. Обратим внимание на то, что эти графики немонотонны и имеют по две точки смены знака, т.е. по две точки, в которых выполняется условие квазинейтральности.

Далее подставим выражения (13) и (14) в уравнение Пуассона (10), получив в итоге нелинейное дифференциальное уравнение 2-го порядка относительно $\varphi(\xi)$

$$\begin{aligned} \frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = F(\varphi) = & -4\pi n_0 \left\{ \frac{q_-}{\lambda} \right. \\ & \times \sqrt{\frac{-\frac{m_- V^2}{kT_0}}{W_{0,-1}\left[-\frac{m_- V^2}{kT_0} \exp\left(-\frac{m_- V^2 + 2q_- \varphi}{kT_0}\right)\right]}} \frac{1}{W_{0,-1}\left[-\frac{m_- V^2}{kT_0} \exp\left(-\frac{m_- V^2 + 2q_- \varphi}{kT_0}\right)\right]}} \\ & \left. + q_+ \sqrt{\frac{-\frac{m_+ V^2}{kT_0}}{W_{0,-1}\left[-\frac{m_+ V^2}{kT_0} \exp\left(-\frac{m_+ V^2 + 2q_+ \varphi}{kT_0}\right)\right]}} \frac{1}{W_{0,-1}\left[-\frac{m_+ V^2}{kT_0} \exp\left(-\frac{m_+ V^2 + 2q_+ \varphi}{kT_0}\right)\right]}} \right\}. \quad (17) \end{aligned}$$

Решение этого уравнения можно записать в квадратурах:

$$\begin{aligned} \xi + c_2 &= (4\pi n_0 \sqrt{m_+ V^2 k T_0})^{-1/2} \\ &\times \int_{\psi=\varphi} \left\{ \sqrt{-\frac{1}{\lambda W_{0,-1} \left[-\frac{\lambda m_- V^2}{k T_0} \exp\left(-\frac{\lambda m_- V^2 - 2\lambda q_- \psi}{k T_0}\right) \right]}} \right. \\ &- \sqrt{-\frac{1}{\lambda} W_{0,-1} \left[-\frac{\lambda m_- V^2}{k T_0} \exp\left(-\frac{\lambda m_- V^2 - 2\lambda q_- \psi}{k T_0}\right) \right]} \\ &- \sqrt{-W_{0,-1} \left[-\frac{m_+ V^2}{k T_0} \exp\left(-\frac{m_+ V^2 + 2q_+ \psi}{k T_0}\right) \right]} \\ &\left. + \sqrt{-\frac{1}{W_{0,-1} \left[-\frac{m_+ V^2}{k T_0} \exp\left(-\frac{m_+ V^2 + 2q_+ \psi}{k T_0}\right) \right]}} \right\}^{-1/2} d\psi, \end{aligned} \quad (18)$$

где c_2 — постоянная интегрирования.

Внешний вид решения (18) достаточно громоздок и неполно нагляден, поэтому для анализа свойств решения уравнения (17) воспользуемся техникой псевдопотенциала Сагдеева [14,18,19]: будем рассматривать (17) как уравнение движения псевдочастицы в потенциальном поле $\Phi(\varphi)$, при этом функция $F(\varphi) = -d\Phi/d\varphi$ играет роль псевдосилы, потенциал φ — роль координаты псевдочастицы, а координата ξ — роль псевдовремени. В этом заключается метод псевдопотенциала (метод механической аналогии), впервые примененный в [14,18] в нелинейной теории ионно-звуковых волн в обычной электрон-ионной плазме.

Уравнение Пуассона (17) после однократного интегрирования принимает вид уравнения сохранения энергии псевдочастицы

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\varphi}{d\xi} \right)^2 + \Phi(\varphi) = c_1, \quad (19)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\varphi) &= 4\pi n_0 \sqrt{m_+ V^2 k T_0} \\ &\times \left\{ \sqrt{-\frac{1}{\lambda W_{0,-1} \left[-\frac{\lambda m_- V^2}{k T_0} \exp\left(-\frac{\lambda m_- V^2 - 2\lambda q_- \varphi}{k T_0}\right) \right]}} \right. \\ &- \sqrt{-\frac{1}{\lambda} W_{0,-1} \left[-\frac{\lambda m_- V^2}{k T_0} \exp\left(-\frac{\lambda m_- V^2 - 2\lambda q_- \varphi}{k T_0}\right) \right]} \\ &- \sqrt{-W_{0,-1} \left[-\frac{m_+ V^2}{k T_0} \exp\left(-\frac{m_+ V^2 + 2q_+ \varphi}{k T_0}\right) \right]} \\ &\left. + \sqrt{-\frac{1}{W_{0,-1} \left[-\frac{m_+ V^2}{k T_0} \exp\left(-\frac{m_+ V^2 + 2q_+ \varphi}{k T_0}\right) \right]}} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

и постоянную c_1 можно выбрать так, чтобы $\Phi(\varphi_{\min}) = 0$.

На рис. 1, с и 2, с показаны полученные по (20) профили псевдопотенциала $\Phi(\varphi)$ такие, что на них

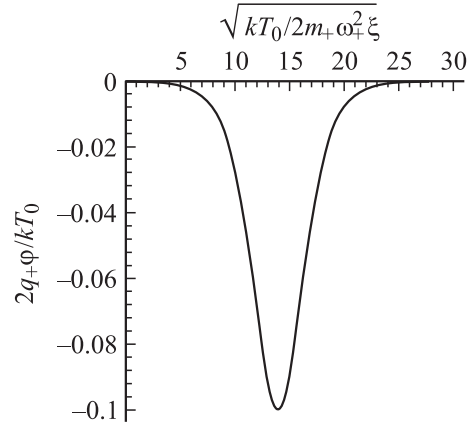


Рис. 3. График профиля электростатического потенциала $\varphi(\xi)$ в уединенной волне при $\alpha_+ = 1.4$ и $\alpha_- = 0.7$ ($\lambda = 1/2$); ω_+ — плазменная частота положительной компоненты плазмы.

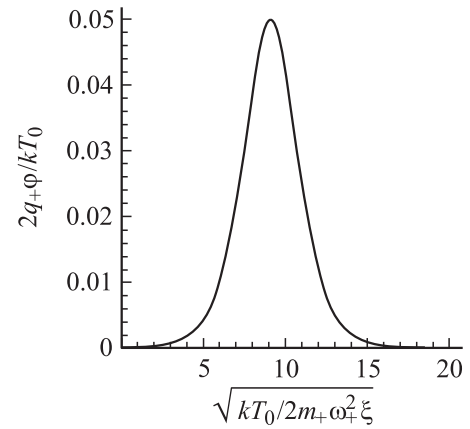


Рис. 4. График профиля электростатического потенциала $\varphi(\xi)$ в уединенной волне при $\alpha_+ = 0.7$ и $\alpha_- = 1.4$ ($\lambda = 2$).

имеются локальные максимум и минимум. Критический уровень псевдоэнергии (показан горизонтальным отрезком прямой), проходящий через максимум, определяет сепаратрису на фазовом портрете псевдоосциллятора и соответствует уединенной волне в плазме. Таким образом, наличие критического уровня псевдоэнергии доказывает существование уединенных волн в рассматриваемой почти симметричной плазме, чем решается основная задача данной работы.

Данное заключение проиллюстрируем рассчитанными профилями электростатического потенциала уединенной волны (см. рис. 3 и 4) для параметров задачи, соответствующих примерам рис. 1 и 2. Эти профили, в частности, показывают, что если более тяжелыми являются положительно заряженные частицы, то всплеск потенциала в волне является отрицательным, и наоборот — если более тяжелыми являются отрицательно заряженные частицы, то всплеск потенциала в волне является положительным.

4. Вывод

Таким образом, в данной работе строго доказано, вопреки выводам работы [5], что если квазинейтральная плазма состоит из таких заряженных частиц, что выполняется $-q_-/q_+ = m_-/m_+ = \lambda \neq 1$, то в ней могут существовать стационарные уединенные электростатические волны. Этот вывод связан с нарушением принципа зарядово-массовой инвариантности движения частиц в почти симметричной плазме, которое, в свою очередь, обязано силам неэлектромагнитной природы $(1/n_{\pm})\partial P_{\pm}/\partial x$.

Список литературы

- [1] Greaves R.S., Surko C.M. // Phys. Rev. Lett. 1995. Vol. 75. N 21. P. 3846.
- [2] Surko C.M., Greaves R.G. // Phys. Plasmas. 2004. Vol. 11. N 5. P. 2333.
- [3] Oohara W., Hatakeyama R. // Phys. Rev. Lett. 2003. Vol. 91. N 20. P. 205005.
- [4] Oohara W., Date D., Hatakeyama R. // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 95. N 17. P. 175003.
- [5] Verheest F. // Nonlinear Processes in Geophysics. 2005. Vol. 12. P. 569.
- [6] Kakati H., Goswami K.S., Bujarbarua S. // Phys. Plasmas. 1999. Vol. 6. N 11. P. 4215.
- [7] Iwamoto N. // Phys. Rev. E. 1993. Vol. 47. N 1. P. 604.
- [8] Hall J.O., Shukla P.K. // Phys. Plasmas. 2005. Vol. 12. N 8. P. 084507.
- [9] Гордиенко В.А., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е. // Физика плазмы. 2006. Т. 32. № 11. С. 987.
- [10] Dubinov A.E., Dubinova I.D., Gordienko V.A. // Phys. Plasmas. 2006. Vol. 13. N 8. P. 082111.
- [11] Альтеркоп Б.А., Дубинова И.Д., Дубинов А.Е. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 7. С. 63.
- [12] Dubinov A.E. // Phys. Plasmas. 2006. Vol. 13. N 5. P. 054701.
- [13] Гордиенко В.А., Дубинов А.Е. // ТВТ. 2007. Т. 45. № 6. С. 814.
- [14] Сагдеев Р.З. Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1964. № 4. С. 20.
- [15] Дубинов А.Е., Дубинова И.Д., Сайков С.К. W-функция Ламберта: таблица интегралов и другие математические свойства. Саров: СарФТИ, 2004.
- [16] Дубинова И.Д. // Физика плазмы. 2004. Т. 30. № 10. С. 937.
- [17] Dubinov A.E., Dubinova I.D. // J. Plasma Phys. 2005. Vol. 71. N 5. P. 715.
- [18] Веденов А.А., Велихов Е.П., Сагдеев Р.З. // Ядерный синтез. 1961. Т. 1. С. 82.
- [19] Дубинов А.Е., Дубинова И.Д. // ВАНТ: теоретическая и прикладная физика. 2006. № 1. С. 3.