

01;07

Круговой фурье-анализ мод оптических волноводов при критических и закритических условиях

© А.Б. Сотский,¹ Л.И. Сотская²

¹ Могилевский государственный университет им. А.А. Кулешова,
212022 Могилев, Белоруссия

e-mail: AB_Sotsky@mail.ru

² Могилевский государственный университет продовольствия,

212027 Могилев, Белоруссия

e-mail: mgynis@mail.ru

(Поступило в Редакцию 17 апреля 2007 г.)

Представлена формулировка метода кругового фурье-анализа поля моды, позволяющая получить последовательно уточняемое решение скалярной волноводной задачи для трехмерных оптических волноводов. Исследованы критические частоты прямоугольных и эллиптических волноводов, а также характеристики вытекающих мод микроструктурных оптических волокон, образованных воздушными каналами эллиптического сечения.

PACS: 42.81.Dp, 42.81.Qb, 42.82.Et

Введение

Вычисление постоянных распространения и полей мод оптических волноводов играет важную роль в современной оптической технологии. Особый интерес с точки зрения проектирования одномодовых волноводов и повышения чувствительности оптических волноводных датчиков представляет анализ модовых характеристик при критических и закритических условиях (т.е. при наличии вытекания излучения из волновода). Однако большинство из существующих методов расчета оптических волноводов при указанных условиях сталкиваются с определенными трудностями. В частности, распространенные вариационные методы [1] становятся неприменимыми при нарушении условия квадратичной интегрируемости поля моды. Методы, основанные на разностных схемах, по своей природе приспособлены к расчету оптических полей в замкнутых областях пространства и поэтому требуют введения искусственных границ, поглощающих выходящие из волновода поля [1]. Но полностью поглотить электромагнитное поле могут только плоские анизотропные слои [2], которыми, строго говоря, нельзя ограничить реальный трехмерный волновод.

Отмеченные трудности стимулировали разработку подходов, специально приспособленных к расчету критических частот мод [3–5]. В [4] использован метод Галеркина с базисными функциями, строго удовлетворяющими граничным условиям на критической частоте, а в [3,5] представлена комбинация методов конечных элементов и интегрального уравнения. В данных работах количественно исследованы однородные волноводы прямоугольного и эллиптического сечений, образованные непоглощающими средами.

Более универсальным является метод интегрального уравнения [6]. Он позволяет исследовать взаимное

преобразование собственных и несобственных мод в окрестности критических условий. При этом волноводы могут быть неоднородными и иметь комплексную диэлектрическую проницаемость. Недостатком данного метода является его трудоемкость, ибо он сводит дело к исследованию однородных алгебраических систем значительной ($\sim 1000 \times 1000$) размерности с плотными матрицами.

В настоящей работе представлен не менее универсальный, но гораздо более простой подход. В его основе лежит идея кругового фурье-анализа поля моды, высказанная в [7,8]. Следует отметить, что в своей исходной формулировке данная идея сталкивается с проблемой выхода вычисляемых значений определителей матриц однородных алгебраических систем относительно амплитуд фурье-разложений за пределы разрядной сетки компьютера (переполнение) [8]. В результате авторами работ [7,8] были рассчитаны только собственные моды волноводов, находящиеся при условиях, удаленных от критических.

Ниже выполнено развитие кругового анализа поля моды, позволяющее преодолеть указанное ограничение. Исследованы критические условия для прямоугольных, эллиптических и неоднородных канальных волноводов. Корректность расчетов подтверждена сопоставлением их результатов с данными независимых методов. Получено обобщение подхода на случай микроструктурных оптических волокон (МОВ). Исследовано влияние степени эллиптичности воздушных каналов в кварцевом стекле на характеристики вытекающих мод МОВ.

Круговой фурье-анализ

Волноводы оптического диапазона в большинстве случаев являются слабонаправляющими, т.е. характеризуются близкими по величине значениями диэлектриче-

ской проницаемости в своей внутренней области и окружающей среде [9,10]. Ключевым в теории таких волноводов является скалярное уравнение [10]

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + V^2[f(\xi, \eta) - b] \right\} \psi = 0, \quad (1)$$

где под ψ понимается поперечная компонента электрического поля волноводной моды. При записи (1) использовано представление диэлектрической проницаемости вида

$$\varepsilon(x, y) = \varepsilon_s + \Delta \varepsilon f(\xi, \eta),$$

где ε_s и $\Delta \varepsilon$ — соответственно комплексная и вещественная константы; $f(\xi, \eta)$ — комплексная функция профиля диэлектрической проницаемости волновода, удовлетворяющая условию $f(\xi, \eta) \rightarrow 0$ при $\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \rightarrow \infty$; $\xi = xM^{-1}$, $\eta = yM^{-1}$, M — масштабный фактор, характеризующий поперечный размер волновода. В (1) фигурируют также параметры

$$V = k_0 M \sqrt{\Delta \varepsilon},$$

где $k_0 = 2\pi\lambda^{-1}$ — волновое число вакуума и

$$b = (\beta^2 k_0^{-2} - \varepsilon_s)(\Delta \varepsilon)^{-1},$$

где β — постоянная распространения моды. Уравнение (1) должно решаться при граничных условиях

$$\psi = O[\rho^{-0.5} \exp(-i\chi\rho)] \quad \text{при } \rho \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где $\chi = V\sqrt{-b}$, причем $\text{Im } \chi < 0$ для собственных мод и $\text{Im } \chi > 0$ — для несобственных [6].

Приближенное решение задачи (1), (2) будем искать в виде полинома Фурье

$$\bar{\Psi}(\rho, \varphi) = \sum_{v=-m}^m C_v(\rho) \exp(iv\varphi), \quad (3)$$

где использованы полярные координаты ρ и φ . Подставив разложение (3) в уравнение (1), записанное в полярных координатах

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + V^2[f(\rho, \varphi) - b] \right\} \psi = 0 \quad (4)$$

($\xi = \rho \cos \varphi$, $\eta = \rho \sin \varphi$), и учитывая соотношения ортогональности для экспонент, приходим к системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\rho^2} C_v + \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} C_v - \frac{v^2}{\rho^2} C_v - V^2 b C_v \\ + V^2 \sum_{\mu=-m}^m \langle f \rangle_{v\mu} C_\mu = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

где $v = 0, \pm 1, \dots, \pm m$,

$$\langle f \rangle_{v\mu} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\rho, \varphi) \exp[i(\mu - v)\varphi] d\varphi. \quad (6)$$

Предположим, что волновод может быть заключен в некоторый цилиндр радиуса A , вне которого среда является однородной. Тогда при $\rho > A'$ ($A' = AM^{-1}$) интегралы (6) обращаются в нуль и система (5) распадается на $2m + 1$ независимых уравнений Бесселя. В соответствии с асимптотикой (2) решения этих уравнений задаются функциями Ханкеля второго рода

$$C_v(\rho) = D_v H_v^{(2)}(\chi\rho), \quad (7)$$

где D_v — некоторые коэффициенты.

Покажем, что при $m \rightarrow \infty$ имеет место равенство $\psi(\rho, \varphi) = \bar{\psi}(\rho, \varphi)$. Допустим, что при некотором m найдено решение задачи (5)–(7). Непосредственной подстановкой можно убедиться, что в этом случае функция $\bar{\psi}(\rho, \varphi)$ будет точным решением задачи (1), (2) для волновода с функцией профиля диэлектрической проницаемости

$$\begin{aligned} f'(\rho, \varphi) = [2\pi \bar{\psi}(\rho, \varphi)]^{-1} \\ \times \int_0^{2\pi} \bar{\psi}(\rho, \varphi') f(\rho, \varphi') \sum_{v=-m}^m \exp[iv(\varphi - \varphi')] d\varphi'. \end{aligned}$$

В силу свойства

$$\sum_{v=-\infty}^{\infty} \exp[iv(\varphi - \varphi')] = 2\pi \delta(\varphi - \varphi')$$

($\delta(\varphi - \varphi')$ — дельта-функция Дирака) имеет место предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} f'(\rho, \varphi) = f(\rho, \varphi).$$

Следовательно, при $m \rightarrow \infty$ выражения (5)–(7) определяют точное решение задачи (1), (2) для исходного волновода.

Для практического интегрирования системы (5) в случае произвольного волновода преобразуем ее в систему $2(2m + 1)$ дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d}{d\rho} C'_v = -\frac{1}{\rho} C'_v + \left(V^2 b + \frac{v^2}{\rho^2} \right) C_v - V^2 \sum_{\mu=-m}^m \langle f \rangle_{v\mu} C_\mu, \quad (8)$$

$$\frac{d}{d\rho} C_v = C'_v. \quad (9)$$

Допустим, что в некоторой области $\rho < c$ ($c < A'$; для неоднородного волновода $c \rightarrow 0$) справедливо равенство

$$f(\rho, \varphi) = f_0 = \text{const.}$$

Согласно (6), система (5) в указанной области распадается на независимые уравнения Бесселя. Следовательно, ввиду конечности поля моды в начале координат

$$C_v(\rho) = E_v J_v(V\rho\sqrt{f_0 - b}) \quad \text{при } \rho < c, \quad (10)$$

где E_ν — некоторые коэффициенты, $J_\nu(\dots)$ — функция Бесселя. Учитывая теперь вытекающее из (5) условие непрерывности функций

$$C_{\nu(\rho)}, \quad C'_\nu(\rho) \quad (11)$$

и соотношение

$$\frac{d}{dz} Z_\nu(z) = \frac{1}{2} [Z_{\nu-1}(z) - Z_{\nu+1}(z)], \quad (12)$$

справедливое для любой цилиндрической функции $Z_\nu(z)$ [11], имеем

$$C_\nu(c) = E_\nu J_\nu(Vc\sqrt{f_0-b}), \quad (13)$$

$$C'_\nu(c) = 0.5E_\nu V\sqrt{f_0-b} \left[J_{\nu-1}(Vc\sqrt{f_0-b}) - J_{\nu+1}(Vc\sqrt{f_0-b}) \right]. \quad (14)$$

Решение задачи Коши (8), (9), (13), (14) может быть записано в виде [12]

$$C_\nu(\rho) = \sum_{\mu=-m}^m E_\mu C_\nu^{(\mu)}(\rho), \quad (15)$$

$$C'_\nu(\rho) = \sum_{\mu=-m}^m E_\mu C_\nu^{(\mu)'}(\rho), \quad (16)$$

где $C_\nu^{(\mu)}(\rho)$ и $C_\nu^{(\mu)'}(\rho)$ — решение задачи (8), (9), (13), (14) при условии

$$E_\nu = \delta_{\nu\mu}, \quad (17)$$

где $\delta_{\nu\mu}$ — символ Кронекера.

Из (12), (15), (16) и непрерывности функций (11) следует, что

$$D_\nu = [H_\nu^{(2)}(\chi A')]^{-1} \sum_{\mu=-m}^m E_\mu C_\nu^{(\mu)}(A'), \quad (18)$$

$$\sum_{\mu=-m}^m N_{\nu\mu} E_\mu = 0, \quad (19)$$

где $\nu = 0, \pm 1, \dots, \pm m$,

$$N_{\nu\mu} = 2H_\nu^{(2)}(\chi A') C_\nu^{(\mu)'}(A') - \chi [H_{\nu-1}^{(2)}(\chi A') - H_{\nu+1}^{(2)}(\chi A')] C_\nu^{(\mu)}(A'). \quad (20)$$

Условие существования нетривиального решения алгебраической системы (19)

$$\det N = 0 \quad (21)$$

представляет собой дисперсионное уравнение относительно нормированной постоянной распространения моды b . После решения этого уравнения поле моды может быть рассчитано на основании выражений (3), (7), (15), (18).

Ключевым элементом описанного алгоритма является вычисление матрицы N , которое сводится к решению $2m+1$ задач Коши (8), (9), (13), (14), (17). Численное интегрирование этих задач может быть выполнено различными способами [13]. В настоящей работе мы использовали метод Рунге–Кутты четвертого порядка точности [13].

Следует, однако, отметить, что при решении уравнений, подобных (21), в случае достаточно больших m ($m > 10$) возникает проблема выхода вычисляемых значений $\det N$ за разрядную сетку компьютера [8], которая обусловлена перемножением множества функций Ханкеля. Чтобы избежать этой трудности, нужна формулировка дисперсионного уравнения, не требующая вычисления определителя матрицы N . С этой целью запишем систему уравнений (19) в виде

$$\sum_{j \neq k} N_{\nu j} (E_j E_k') = -N_{\nu k} \quad (\nu \neq k), \quad (22)$$

$$\sum_{j=-m}^m N_{kj} (E_j E_k^{-1}) = 0, \quad (23)$$

где k — номер одного из уравнений (19). Отвлекаясь от тривиального случая осесимметричного волновода, когда матрица N диагональна и возможно вырождение мод [14], будем считать, что система уравнений (22) относительно неизвестных $E_j E_k^{-1}$ имеет единственное решение. Тогда после вычисления указанных отношений из (22) выражение (23) приобретает смысл дисперсионного уравнения. Его численное решение не вызывает принципиальных затруднений. Поле моды находится затем из (3), (7), (10), (15), (18), где неопределенную постоянную E_k можно рассматривать как амплитуду моды.

Заметим, что при отсутствии в сечении волновода элементов симметрии выбор номера k в выражениях (22) и (23) произволен, поэтому для определенности можно положить $k = 0$. Но если в сечении волновода имеется ось симметрии, то моды распадаются на четные и нечетные, причем для последних $E_0 = 0$ [15]. Поэтому в данном случае целесообразно использовать $k = 0$ и $k = 1$ для четных и нечетных мод соответственно.

Расчет мод вблизи критических условий

Эффективность описанного алгоритма проверена нами для ряда волноводов. В частности, были рассчитаны характеристики мод неоднородных канальных волноводов, исследованных ранее в [6] методом интегрального уравнения. При этом подтвердились все особенности перехода собственных мод в несобственные при наличии поглощения в средах, установленные в [6]. Так, решение уравнения (23) вблизи критических частот привело к дисперсионным кривым, полностью совпавшим с кривыми, приведенными в [6] на рис. 2.

Обратимся теперь к вычислению нормированных критических частот (V_c) при отсутствии поглощения в средах, т.е. когда $b(V_c) = 0$. Заметим, что в силу непрерывной зависимости начальных условий (13), (14) и коэффициентов уравнений (8), (9) от параметра b функции $C_v^{(\mu)}(\rho)$ и $C_v^{(\mu)'}(\rho)$ имеют конечные пределы при $b \rightarrow 0$ [12]. Однако функции Ханкеля $H_v^{(2)}(\chi\rho)$ в этом пределе становятся сингулярными. Представив данные функции в виде рядов [11] и сократив затем в (19) сингулярные множители, в пределе при $b \rightarrow 0$ получаем систему алгебраических уравнений вида (19) с матрицей

$$N_{\nu\mu} = C_v^{(\mu)}(A') + |\nu|(A')^{-1}C_v^{(\mu)'}(A'),$$

где величины $C_v^{(\mu)}(A')$ и $C_v^{(\mu)'}(A')$ вычисляются при $b = 0$. В этом случае корнями уравнения (23) являются нормированные критические частоты мод V_c .

Результаты расчетов критических частот для первой высшей моды LP_{21} однородных прозрачных волноводов прямоугольного и эллиптического сечений представлены на рис. 1 и в табл. 1 и 2. Здесь под Φ понимается формат волновода ($\Phi = 2g/2h$, где $2g$ и $2h$ — длины сторон прямоугольника либо осей эллипса). При расчетах начало координат $\rho = 0$ помещалось в центр волновода и выбирались значения $f_0 = 1$, $M = h$, $c = 1$, а также $A' = \sqrt{1 + \Phi^2}$ и $A' = \Phi$ для прямоугольного и эллиптического волноводов соответственно. Для рассматриваемых волноводов интегралы $\langle f \rangle_{\nu\mu}$ вычислялись в элементарных функциях.

Рис. 1 иллюстрирует зависимость решений уравнения (23) от порядка полинома (3). Здесь через $V_c^{(1)}$ обозначена критическая частота, соответствующая $m = 1$. Согласно рис. 1, сходимость решения замедляется с ростом Φ . Это объясняется усложнением угловой струк-

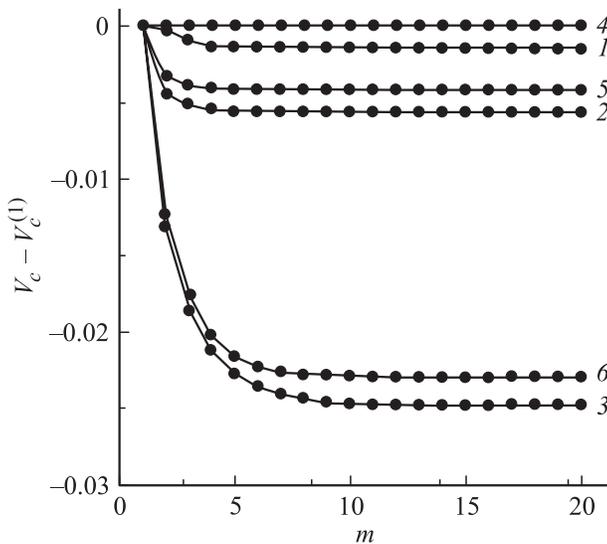


Рис. 1. Сходимость результатов вычисления критических частот первой высшей моды прямоугольного (1, 2, 3) и эллиптического (4, 5, 6) волноводов. Кривые 1, 4 соответствуют форматам $\Phi = 1$; 2, 5 — $\Phi = 2$; 3, 6 — $\Phi = 10$.

Таблица 1. Критические частоты V_c первой высшей моды прямоугольного волновода при различных форматах Φ

Φ	V_c	V_c [4]	V_c [5]
1	2.13623	2.1364	2.13479
2	1.28382	1.2838	1.28372
5	0.71107	—	0.71107
10	0.47642	0.4763	0.47636

Таблица 2. Критические частоты V_c первой высшей моды эллиптического волновода при различных форматах Φ

Φ	V_c	V_c [4]	V_c [5]
1	2.404826	2.4048	2.404630
2	1.468475	1.4684	1.468461
5	0.823791	0.8237	0.823733
10	0.554747	0.5544	0.554447

туры поля моды при $\rho \rightarrow A'$, которое сопровождается увеличением формата волновода [5].

Значения V_c , приведенные в табл. 1 и 2, соответствуют $m \geq 15$. Они хорошо согласуются с данными независимых методов [4,5].

Расчет микроструктурных волокон

В последнее время проводятся интенсивные исследования микроструктурных оптических волокон, волноводные области которых образованы наборами микроскопических (в большинстве случаев воздушных) каналов в однородной среде. Внимание к данным волокнам обусловлено их уникальными дисперсионными и нелинейными свойствами [16]. Особый интерес представляет создание одномодовых МОВ с каналами возможно большего диаметра [17]. Однако поскольку все моды МОВ являются вытекающими, данные волокна могут быть только квазиодномодовыми при условии, что потери на вытекание для основной моды много меньше потерь на вытекание для остальных мод [17]. В результате проектирование одномодовых МОВ требует вычисления мнимых частей постоянных распространения вытекающих мод. Подобные исследования для МОВ с воздушными каналами кругового сечения выполнены в [17]. Вместе с тем при вытяжке МОВ из макроскопической заготовки, составленной из капилляров кругового сечения, происходит деформация капилляров, вследствие которой их поперечное сечение становится эллиптическим. Максимально этот эффект выражен для ближайших к волноведущей области воздушных каналов [18]. Таким образом, актуальна оценка влияния степени эллиптичности воздушных каналов в МОВ на эффект вытекания мод.

Чтобы выполнить соответствующие расчеты, заметим, что МОВ включают среды со значительно различающимися диэлектрическими проницаемостями (например,

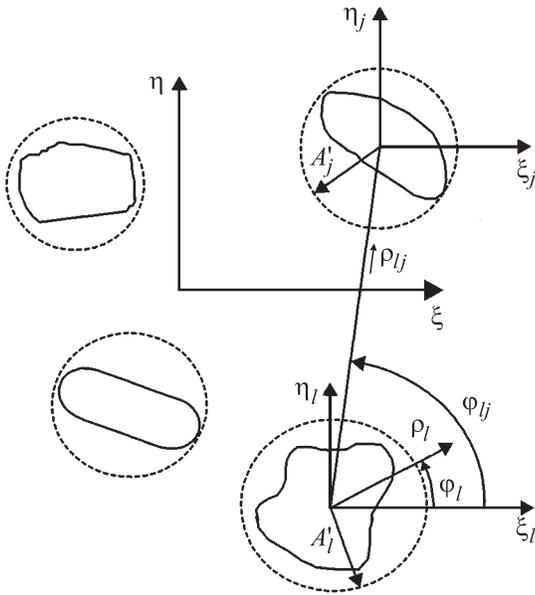


Рис. 2. Поперечное сечение исследуемых МОВ.

это могут быть кварцевое стекло и воздух), поэтому возможность использования скалярного приближения (1) на первый взгляд выглядит сомнительной. Однако для распространенных МОВ, в которых излучение локализовано преимущественно вне образующих его каналов, скалярное приближение (1) оказывается корректным. Его применимость следует из известной теории возмущений [14] и подтверждена исследованиями различных МОВ в [18,19].

Заметим также, что непосредственное применение изложенного выше метода к исследованию вытекающих мод МОВ не позволяет найти их коэффициенты затухания с приемлемой точностью. В частности, для волокон, исследованных в [17], он дал значения $\text{Im}\beta$, на порядки отличающиеся от точных. Качественно это расхождение объясняется тем, что при расчете указанных мод мы сталкиваемся с проблемой туннелирования излучения из волноводной области в окружающую среду сквозь толстый буферный слой с пониженной эффективной диэлектрической проницаемостью. В пределах данного слоя выполняется неравенство

$$\text{Re}[\langle f \rangle_{\mu\mu} - b] < 0.$$

В результате имеет место экспоненциальный рост погрешности вычисления левой части уравнения (23) при увеличении радиуса A [12], что существенно ограничивает точность расчета $\text{Im}\beta$.

В методе интегральных уравнений [17,20] указанная проблема устраняется за счет использования локальных систем координат в каждом из каналов. Но данный метод был разработан только для каналов кругового сечения. Получим обобщение этого метода на случай МОВ с каналами, имеющими произвольную форму сечения.

Поперечное сечение исследуемых МОВ представлено на рис. 2. В нем имеется k включений произвольной

формы (поперечных сечений каналов), окруженных однородных средой. Предполагается, что l -е включение ($l = 1, 2, \dots, k$) может быть заключено в некоторую окружность радиуса A_l , причем окружности различных включений не пересекаются. Таким образом, мы рассматриваем модель МОВ с круговыми включениями (их границы отмечены на рис. 2 штриховыми линиями), внутри которых диэлектрическая проницаемость может быть произвольной функцией координат.

Интегральное уравнение, эквивалентное задаче (1), (2) для описанного МОВ, имеет вид [20]

$$\psi(\xi, \eta) = -\frac{i}{4} V^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int d\xi' d\eta' H_0^{(2)}(\chi r) f(\xi', \eta') \psi(\xi', \eta'), \quad (24)$$

где $r = \sqrt{(\xi' - \xi)^2 + (\eta' - \eta)^2}$, а функция $f(\xi', \eta')$ отлична от нуля только в пределах указанных окружностей.

Представим уравнение (24) в форме

$$\psi(\xi, \eta) = \sum_{l=1}^k \Omega_l(\xi, \eta), \quad (25)$$

где слагаемое $\Omega_l(\xi, \eta)$ равно вкладу в правую часть уравнения (24) l -го включения. Для задания явного вида функции $\Omega_l(\xi, \eta)$ перейдем в локальную систему координат l -го включения (рис. 2) и при $\rho_l > A_l'$ ($A_l' = A_l M^{-1}$) определим некоторую функцию $\psi_l(\xi_l, \eta_l)$, которая удовлетворяет соотношениям

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_l^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_l^2} - V^2 b \right) \psi_l = 0 \text{ при } \rho_l > A_l', \quad (26)$$

$$\psi_l(\xi_l, \eta_l) = \psi(\xi_l, \eta_l) \text{ при } \rho_l = A_l', \quad (27)$$

$$\psi_l(\rho_l, \eta_l) = O[\rho_l^{-0.5} \exp(-i\chi\rho_l)] \text{ при } \rho_l \rightarrow \infty, \quad (28)$$

где ρ_l, φ_l — полярные координаты (рис. 2). Учтем также уравнения

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial \xi_l^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_l^2} + V^2 [f(\xi_l, \eta_l) - b] \right\} \psi = 0, \quad (29)$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial \xi_l^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta_l^2} + \chi^2 \right) H_0^{(2)}(\chi r_l) = -4i\delta(\xi_l' - \xi_l)\delta(\eta_l' - \eta_l), \quad (30)$$

где $r_l = \sqrt{(\xi_l' - \xi_l)^2 + (\eta_l' - \eta_l)^2}$.

Проинтегрировав уравнения (26), (29), умноженные на функцию $H_0^{(2)}(\chi r_l)$, и уравнение (30), умноженное на функции $\psi(\xi_l', \eta_l')$ и $\psi_l(\xi_l', \eta_l')$, и применив к полученным соотношениям теорему Грина [21], получим

$$\Omega_l(\rho_l, \varphi_l) = \psi(\rho_l, \varphi_l) + I_l(\rho_l, \varphi_l) \text{ при } \rho_l < A_l', \quad (31)$$

$$\Omega_l(\rho_l, \varphi_l) = \psi_l(\rho_l, \varphi_l) + I_l(\rho_l, \varphi_l) \text{ при } \rho_l > A_l', \quad (32)$$

$$I_l(\rho_l, \varphi_l) = \frac{i}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi_l' \left[H_0^{(2)}(\chi r_l) \left(\frac{\partial}{\partial \rho_l'} \psi - \frac{\partial}{\partial \rho_l'} \psi_l \right) \right]_{\rho_l' = A_l'}. \quad (33)$$

Очевидно, что для функции $\psi(\rho_l, \varphi_l)$ может быть использовано приближение (3), (15), где $\rho = \rho_l, \varphi = \varphi_l$. Тогда из (26)–(28) найдем, что

$$\psi(\xi_l, \eta_l) = \bar{\psi}(\xi_l, \eta_l),$$

где последняя функция определяется выражениями (3), (7), (18) при $\rho = \rho_l, \varphi = \varphi_l, A' = A'_l$. Подставив указанные ряды в (31)–(33) и приняв во внимание тождество [11]

$$H_0^{(2)}(\chi r_l) = \sum_{\mu=-\infty}^{\infty} \exp[i\mu(\varphi_l - \varphi'_l)] \times \begin{cases} H_\mu^2(\chi\rho') J_{\mu(\chi\rho)} & \text{при } \rho < \rho', \\ J_\mu(\chi\rho') H_\mu^{(2)}(\chi\rho) & \text{при } \rho > \rho', \end{cases}$$

приходим к выражениям

$$\Omega_l(\rho_l, \varphi_l) = \psi(\rho_l, \varphi_l) + \sum_{v=-m}^m J_v(\chi\rho_l) \exp(iv\varphi_l) \times \sum_{\mu=-m}^m R_{v\mu l} E_{\mu l} \quad \text{при } \rho_l < A'_l, \quad (34)$$

$$\Omega_l(\rho_l, \varphi_l) = \sum_{v=-m}^m H_v^{(2)}(\chi\rho_l) \exp(iv\varphi_l) \times \sum_{\mu=-m}^m S_{v\mu l} E_{\mu l} \quad \text{при } \rho_l > A'_l, \quad (35)$$

$$R_{v\mu l} = B_l [H_v^{(2)}(\chi A'_l) C_{vl}^{(\mu)}(A'_l) - L_{v\mu l}],$$

$$S_{v\mu l} = [H_v^{(2)}(\chi A'_l)]^{-1} [C_{vl}^{(\mu)}(A'_l) - 0.5 B_l L_{v\mu l} J_v(\chi A'_l)]$$

$$+ B_l J_v(\chi A'_l) C_{vl}^{(\mu)}(A'_l),$$

$$L_{v\mu l} = 0.5 \chi [H_{v-1}^{(2)}(\chi A'_l) - H_{v+1}^{(2)}(\chi A'_l)] C_{vl}^{(\mu)}(A'_l),$$

$$B_l = 0.5 i \pi A'_l.$$

Здесь под $E_{\mu l}, C_{vl}^{(\mu)}, C_{vl}^{\prime(\mu)}$ понимаются определенные выше величины $E_\mu, C_v^{(\mu)}, C_v^{\prime(\mu)}$, отнесенные к l -му включению.

После подстановки (34) и (35) в уравнение (25) и поочередного приведения полученных рядов к локальным координатным системам каждого из включений на основании теоремы сложения цилиндрических функций Графа [11] получим однородную алгебраическую систему

$$\sum_{\mu=-m}^m \sum_{l=1}^k N_{vq\mu l} E_{\mu l} = 0, \quad (36)$$

где $q = 1, 2, \dots, k; v = 0, \pm 1, \dots, \pm m;$

$$N_{vq\mu l} = \sum_{\sigma=-m}^m H_{\sigma-v}^{(2)}(\chi\rho_{lq}) S_{\sigma\mu l} \exp[i(\sigma - v)\varphi_{lq}] \quad \text{при } q \neq l,$$

$$N_{vl\mu l} = R_{v\mu l} \quad \text{при } q = l,$$

ρ_{lq} и φ_{lq} — координаты начала координат q -го включения в системе координат l -го включения (рис. 2).

Выражение (36) обобщает результаты [17,20], относящиеся к МОВ с однородными круговыми включениями. При предельном переходе к таким МОВ оно полностью согласуется с соотношениями указанных работ, взятыми в скалярном приближении.

Для решения системы (36) можно использовать описанный выше алгоритм. С этой целью следует определить комбинированные индексы $[v, q], [\mu, l]$ и привести (36) к виду (22), (23). После вычисления постоянной распространения моды b и коэффициентов $E_{\mu l}$ поле моды внутри включений находится путем интегрирования задач Коши (8), (9), (13), (14), а вне включений оно рассчитывается по формулам (25), (35).

Заметим, что для корректного вычисления значения $\text{Im} \beta$ в случае слабого затухания моды эту величину целесообразно находить через отношение поперечного и продольного потоков энергии [22]. В рассматриваемом скалярном приближении надлежащая формула получается в результате интегрирования уравнения (1) с использованием теоремы Грина и имеет вид

$$\text{Im} \beta = G' \left[2M^2 \text{Re} \beta \int_0^{G'} d\rho \rho \int_0^{2\pi} d\varphi |\psi|^2 \right]^{-1} \times \int_0^{2\pi} d\varphi \text{Im} \left(\psi^* \frac{\partial}{\partial \rho} \psi \right)_{\rho=G'}, \quad (37)$$

где $G' = GM^{-1}, G$ — радиус произвольной окружности, содержащей в себе все включения МОВ, а звездочка означает взятие комплексного сопряжения. Величины в правой части (37) рассчитываются по указанной выше схеме.

Применение изложенного метода к исследованию вытекающих мод МОВ иллюстрируется на рис. 3 и 4. Представленные данные относятся к МОВ, сформированном из n гексагональных колец воздушных каналов в кварцевом стекле [20]. Период гексагональной решетки равен Λ (рис. 3). Поперечное сечение каждого из каналов внутреннего гексагонального кольца ($l = 1, 2, \dots, 6$) представляет собой эллипс с полуосями g и h . Большая полуось эллипса (g) ортогональна радиус-вектору, проведенному из геометрического центра волокна к центру эллипса. Прочие воздушные каналы ($l > 6$) имеют круговое сечение радиуса d . Площадь сечения всех воздушных каналов одинакова ($gh = d^2$). Расчеты выполнены при $f_0 = 1, \epsilon_s = 2.1025, M = k_0^{-1}, V = 1.05, k_0 d = 10.74755, k_0 \Lambda = 41.33675, c = k_0 h, A_l = g$ ($l = 1, 2, \dots, 6$), $A_l = d$ ($l > 6$), $n = 2$ и $n = 3$. Графики на рис. 3 и 4 соответствуют порядкам полинома Фурье (3) $m \geq 8$.

На рис. 3 представлены четверти симметричных распределений интенсивности основной моды МОВ. Эти распределения относятся к $n = 2$ и 3 (в масштабе рис. 3 изолинии интенсивности при обоих значениях n неразличимы, что объясняется преимущественной локализацией

поля моды в пределах внутреннего гексагонального кольца каналов). Сравнение рис. 3, *a* и 3, *b* позволяет заключить, что эллиптические воздушные каналы обеспечивают более плавное распределение интенсивности основной моды МОВ по сравнению с круговыми.

Рис. 4 дает возможность судить о влиянии степени эллиптичности воздушных каналов на затухание мод МОВ, вызванное эффектом вытекания. Представленные зависимости относятся к основной и первой высшей модам МОВ (первая высшая мода МОВ, являющаяся аналогом TE_{01} -моды однородного кругового волокна, имеет наименьший среди высших мод коэффициент затухания [23]). Они рассчитаны на основании (37) при выборе $G = n\Lambda + d$. Согласно рис. 4, увеличение отношения g/h сопровождается заметным снижением затухания мод (при $g/h \rightarrow 1$ представленные кривые

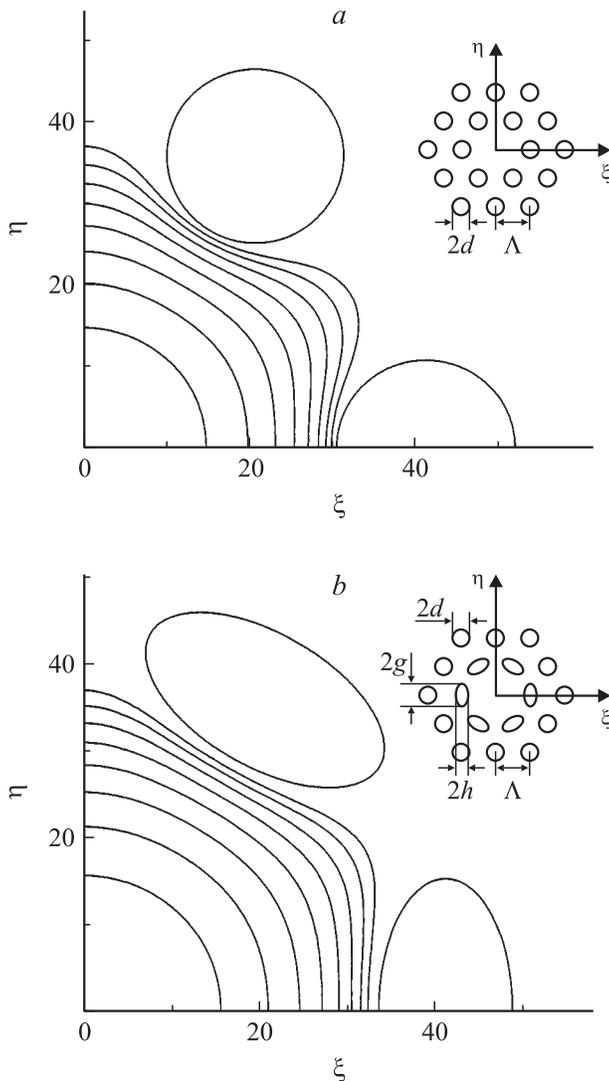


Рис. 3. Изолинии интенсивности $\ln[|\psi|_{\max}^2/|\psi(\rho, \varphi)|^2] = 0.5, 1, 1.5, \dots, 4$ основной моды МОВ с круговыми (*a*) и эллиптическими ($g/h = 2$) (*b*) каналами. На вставках изображены поперечные сечения МОВ с числом гексагональных колец $n = 2$.

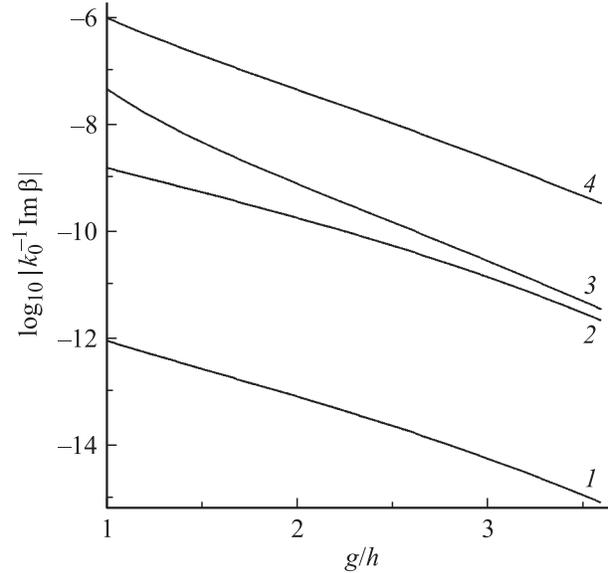


Рис. 4. Зависимость коэффициентов затухания основной (кривые 1, 2) и первой высшей (3, 4) мод МОВ от степени эллиптичности воздушных каналов. Кривые 1 и 3 соответствуют числу гексагональных колец каналов $n = 3, 2$ и 4 — $n = 2$.

находятся в согласии с данными [17]). Более резко этот эффект выражен для первой высшей моды, что приводит к сближению коэффициентов затухания данной и основной моды. Эта особенность должна учитываться при проектировании квазиодномодовых МОВ.

Заключение

Представленный вариант метода кругового фурье-анализа поля моды позволяет получить последовательно уточняемое решение скалярной волноводной задачи. Он эффективен для исследования характеристик собственных и несобственных мод трехмерных оптических волноводов в окрестности критических условий и для расчета критических частот мод. При использовании локальных систем координат данный метод может быть применен к анализу вытекающих мод микроструктурных оптических волокон, образованных каналами с произвольной формой поперечного сечения. Предложенные алгоритмы вычислений сводят дело к решению задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и легко реализуются с использованием стандартных компьютерных программ. Развитый подход допускает естественное обобщение на случай векторных волноводных задач.

Список литературы

- [1] Kawano K., Kitoh T. Introduction to optical waveguide analysis. N. Y.: John Wiley & Sons Inc., 2001. 273 p.
- [2] Sacks Z.S., Kingsland D.M., Lee R., Lee J. // IEEE Trans. Antennas Propagat. 1995. Vol. 43. N 12. P. 1460–1463.

- [3] Рожнев А.Г., Маненков А.Б. // Р и Э. 1997. Т. 42. № 7. С. 785–792.
- [4] Wang Y.H. // Opt. and Quant. Electron. 2000. Vol. 32. N 1. P. 31–42.
- [5] Елисеев М.В., Рожнев А.Г., Маненков А.Б. // Р и Э. 2004. Т. 49. № 46. С. 656–664.
- [6] Сотская Л.И., Сотский А.Б. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 12. С. 1–8.
- [7] Wang Y.H., Vassallo C. // Opt. Lett. 1989. Vol. 14. N 24. P. 1377–1379.
- [8] Vassallo C. // J. Lightwave Technol. 1990. Vol. 8. N 11. P. 1723–1729.
- [9] Hutcheson L.D. Integrated optical circuits and components. N. Y.: Marcel Dekker Inc., 1987. 397 p.
- [10] Снайдер А., Лав Дж. Теория оптических волноводов. М.: Радио и связь, 1987. 656 с.
- [11] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.
- [12] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: ИЛ, 1951. 828 с.
- [13] Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырский П.И. Вычислительные методы. Т. II. М.: Наука, 1977. 399 с.
- [14] Войтович Н.Н., Каценеленбаум Б.З., Сивов А.Н., Шатров А.Д. // Р и Э. 1979. Т. 24. № 7. С. 1245–1263.
- [15] Сотский А.Б., Сотская Л.И. // Опт. и спектр. 2000. Т. 88. № 3. С. 465–472.
- [16] Monro T.M., Belardi W., Furusawa K. et al. // Meas. Sci. Technol. 2001. Vol. 12. P. 854–858.
- [17] Minkovich V.P., Kir'yanov A.V., Sotsky A.B. et al. // J O. S. A. B. 2004. Vol. 21. N 6. P. 1161–1169.
- [18] Minkovich V.P., Villatoro J., Sotsky A.B. et al. // J. Lightwave Technol. 2006. Vol. 24. N 11. P. 4319–4328.
- [19] Monro T.M., Richardson D.J., Broderick N.G.R. et al. // J. Lightwave Technol. 1999. Vol. 17. N 6. P. 1093–1102.
- [20] Сотский А.Б., Сотская Л.И. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 18. С. 37–45.
- [21] Корн Г., Корн Т. Справочник по математике. М.: Наука, 1977. 831 с.
- [22] Sotsky A.B., Sotskaya L.I. // Opt. Commun. 2004. Vol. 230. P. 67–79.
- [23] Kuhlmeiy B.T., McPhedran R.C., De Sterke C.M. et al. // Opt. Express. 2002. Vol. 10. N 22. P. 1285–1290.