01;03

Нелинейный анализ равновесной формы заряженной капли в стенке воронки смерча

© С.О. Ширяева, А.И. Григорьев, П.В. Мокшеев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 4 июня 2007 г.)

Из условия баланса давлений на свободной поверхности заряженной капли электропроводной жидкости найдено аналитическое выражение для равновесной формы капли в поле центробежных сил, действующих в стенке смерча, в квадратичном по малому параметру (отношению амплитуды деформации к радиусу исходной сферической формы капли) приближении. Определено, что в линейном приближении по амплитуде деформации форма капли совпадает со сфероидом, сплюснутым в направлении, перпендикулярном оси смерча. Квадрат эксцентриситета такого сфероида пропорционален квадрату угловой скорости и третьей степени радиуса капли. В квадратичном приближении появляются отличия равновесной формы капли от сфероидальной.

PACS: 47.55.dd

Введение

Исследование равновесных форм заряженных капель во внешних силовых полях различной природы (электрических, гравитационных, акустических, инерционных, аэродинамических и т. п.) представляет интерес в связи с изучением процессов в грозовых облаках, воронках смерчей и в других заряженных жидко-капельных системах естественного и искусственного происхождения [1–10], а также в связи с разработкой методов бесконтактного определения физико-химических характеристик жидкостей [11]. Знание равновесных форм капель в различных силовых полях необходимо также для понимания физических закономерностей временнóй эволюции неустойчивых капель, механизмов реализации их неустойчивости и закономерностей распада при силовых воздействиях, а также для проведения аналитических асимптотических и численных расчетов нелинейных осцилляций подобных капель [12–16].

В настоящей работе в аналитической асимптотической процедуре по методике, ранее использованной в [8–10], рассчитана равновесная форма заряженной капли в поле центробежных сил, действующих в стенке смерча. Такая задача представляет интерес в связи с изучением электрических явлений, связанных со смерчами, феноменом еще менее изученным, чем сами смерчи, хотя данных наблюдений в естественных условиях накоплено достаточно много [12,17,18].

Постановка задачи

Пусть имеется сферическая капля радиуса R идеальной электропроводной несжимаемой жидкости с массовой плотностью ρ и коэффициентом поверхностного натяжения свободной поверхности σ, несущая заряд Q, вращающаяся с постоянной угловой скоростью Ω вокруг оси смерча, как это схематически изображено на рис. 1.

Будем полагать, что центр масс капли неподвижен относительно стенки смерча. Расстояние от оси смерча до центра масс капли обозначим L, а до произвольной точки на поверхности капли как $L - z = L - R\cos\theta$, где ось z берет начало в центре масс капли и идет вдоль перпендикуляра, опущенного из центра масс на ось смерча (см. рис. 1). Расчеты будем проводить в неинерциальной системе отсчета, связанной с центром масс капли, в сферической системе координат, полярный угол которой отсчитывается от положительного направления оси z.

Зададимся целью вывести аналитическое выражение для равновесной поверхности капли в описанной системе с точностью до слагаемых второго порядка малости по отношению амплитуды деформации капли в поле

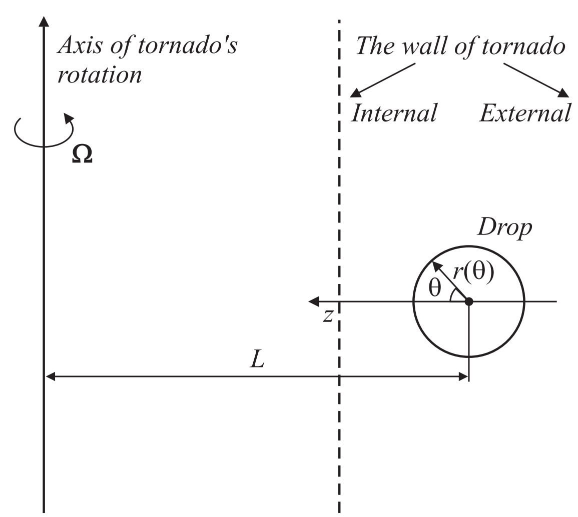

Рис. 1. Схематическое изображение капли в стенке воронки смерча.

центробежных сил и поле сил давления среды в стенке смерча к радиусу равновеликой сферы.

Из общефизических соображений очевидно, что равновесная поверхность капли будет обладать симметрией относительно оси x, поэтому будем искать форму капли в сферической системе координат в виде разложения по полиномам Лежандра:

$$r(\theta) = R + \xi^{(1)}(\theta) + \xi^{(2)}(\theta)$$
$$\equiv R + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} P_n(\mu) + \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(2)} P_n(\mu); \qquad (1)$$

$$\left|\frac{\xi^{(1)}(\theta)}{R}\right| \ll 1; \qquad \left|\frac{\xi^{(2)}(\theta)}{\xi^{(1)}(\theta)}\right| \ll 1; \qquad \mu \equiv \cos(\theta),$$

где функции $\xi^{(1)}(\theta)$ и $\xi^{(2)}(\theta)$ описывают малые отклонения формы капли от сферической (первого и второго порядков малости соответственно). Малый параметр, характеризующий равновесную деформацию капли, определим следующим образом:

$$\varepsilon = \frac{|\xi^{(1)}(\theta)|}{R}; \qquad \varepsilon^2 = \frac{|\xi^{(1)}(\theta)\,\xi^{(1)}(\theta)|}{R^2} \sim \frac{\xi^{(2)}(\theta)|}{R}.$$

Необходимо также потребовать, чтобы выписанная равновесная форма удовлетворяла условиям неизменности объема и неподвижности центра масс капли при деформировании ее поверхности

$$\iiint_V dV = 2\pi \int_{-1}^{1} \int_{0}^{r(\theta)} r^2\, dr\, d\mu = \frac{4}{3}\pi;$$

$$\iiint_V \mathbf{r}\, dV = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{1} \int_0^{r(\theta)} \mathbf{e}_r r^3\, dr\, d\mu\, d\varphi = 0.$$

Выписанные условия позволяют найти ограничения снизу на спектр мод, принимающих участие в формировании равновесной формы свободной поверхности капли. В условии неподвижности центра масс капли распишем орт радиальной переменной в виде разложения по ортам прямолинейной декартовой системы координат

$$\mathbf{e}_r = \cos\theta\, \mathbf{e}_z + \sin\theta \cos\varphi\, \mathbf{e}_x + \sin\theta \sin\varphi\, \mathbf{e}_y$$

и, взяв проекции на орты $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$, $\mathbf{e}_z$, получим три интегральных соотношения, из которых первые два (содержащие $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$) будут равны нулю тождественно в силу правил интегрирования по азимутальному углу φ, а третье примет вид

$$\int_{-1}^{1} \int_0^{r(\theta)} \mu r^3\, dr\, d\mu = 0.$$

Подставим в условия неизменности объема и неподвижности центра масс капли разложение (1) для $r(\theta)$ и, ограничиваясь учетом слагаемых первого порядка малости (т. е. сохраняя значения $\sim (|\xi^{(1)}(\theta)|/R)$ и отбрасывая величины большего порядка малости), придем к следующим равенствам:

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \int_{-1}^{1} P_n(\mu)\, d\mu = 0; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(1)} \int_{-1}^{1} P_n(\mu) \mu\, d\mu = 0.$$

Из первого выписанного соотношения в силу ортогональности полиномов Лежандра следует, что амплитуды $A_0^{(1)} = 0$; из второго — что $A_1^{(1)} = 0$. В итоге в выражении (1) для поправки первого порядка малости к сферической поверхности суммирование начинается с индекса $n = 2$:

$$\xi^{(1)}(\theta) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)} P_n(\mu). \qquad (2)$$

Аналогичные расчеты, выполненные во втором порядке малости, позволяют определить амплитуды нулевой и первой мод второго порядка малости

$$A_0^{(2)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left(A_n^{(1)}\right)^2;$$

$$A_1^{(2)} = -\sum_{n=2}^{\infty} \frac{9(n+1)}{(2n+1)(2n+3)} A_n^{(1)} A_{n+1}^{(1)}.$$

Описание математической процедуры

В отсутствие вращения капли вокруг оси смерча ее равновесная форма принимается сферической. Возможным влиянием на форму капли поля сил тяжести и внешнего электрического поля пренебрегаем. Наличие вращения с угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$ вокруг смерча приводит к возникновению центробежных сил, действующих на каплю, появлению дополнительного давления на поверхность капли, обусловленного этими силами p_Ω, а также перепада давлений среды, действующего на переднюю и заднюю части капли p_γ, и как следствие, к деформации ее сферической формы. В безразмерных переменных, в которых $R = \rho = \sigma = 1$, безразмерная амплитуда деформации капли, обусловленной давлением центробежных сил, будет иметь такой же порядок малости, что и вызвавшее его безразмерное давление p_Ω (см. [10], где этот вопрос детально разобран для капли, вращающейся вокруг оси симметрии, проходящей через центр масс капли).

В состоянии равновесия на поверхности капли должно выполняться условие баланса давлений

$$p - p_\gamma + p_\Omega + p_Q = p_\sigma. \qquad (3)$$

Здесь p — давление жидкости внутри капли; p_γ — давление среды в стенке смерча; p_Ω, p_Q и p_σ — давления на поверхность капли центробежных, электростатических и капиллярных сил соответственно.

Условие (3) позволяет определить амплитуды $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ в разложении (1) в результате следующей процедуры. Представим входящие в (3) давления в виде формальных разложений по степеням малого параметра ε, сохранив слагаемые до второго порядка малости включительно

$$p \approx p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)} + O(\varepsilon^3);$$

$$p_\Omega \approx p_\Omega^{(0)} + p_\Omega^{(1)} + p_\Omega^{(2)} + O(\varepsilon^3);$$

$$p_Q \approx p_Q^{(0)} + p_Q^{(1)} + p_Q^{(2)} + O(\varepsilon^3);$$

$$p_\sigma \approx p_\sigma^{(0)} + p_\sigma^{(1)} + p_\sigma^{(2)} + O(\varepsilon^3);$$

$$p_\gamma \approx p_\gamma^{(0)} + p_\gamma^{(1)} + p_\gamma^{(2)} + O(\varepsilon^3). \tag{4}$$

В выражениях (4) верхний индекс указывает порядок малости соответствующей величины. Подставив разложения (4) в уравнение (3) и собрав вместе слагаемые одного порядка малости, потребуем выполнения баланса давлений для каждого из порядков в отдельности. Нулевой порядок малости определит баланс давлений на поверхности заряженной сферической капли в отсутствие вращения. Баланс давлений первого и второго порядка малости позволит рассчитать амплитуды $A_n^{(1)}$ и $A_n^{(2)}$ в выражении (1).

Разложение по малому параметру давлений, действующих на поверхность заряженной капли в стенке смерча

Получим отдельно для каждого из входящих в (3) давлений явные выражения в виде суперпозиции компонент различных порядков малости.

Характерной особенностью анализируемой проблемы является присутствие в ее формулировке разных масштабов. Так, вращение системы приводит к формированию смерча как целого и появлению градиента давления среды в его стенке — это крупномасштабные проявления вращения, связанные с наличием линейного масштаба L. С другой стороны, вращение смерча приводит к появлению центробежных сил, действующих на каждую каплю в его стенке и обусловливающих деформацию капель, — это мелкомасштабные следствия вращения, связанные с наличием существенно меньшего линейного масштаба R. При проводимом асимптотическом анализе желательно разделить крупно- и мелкомасштабные явления. Для достижения этой цели выпишем аналитические выражения для давления центробежных сил и сил давления среды и рассмотрим результат совместного действия на каплю с учетом требования ее неподвижности относительно стенки смерча. Слагаемые, возникшие вследствие крупномасштабного проявления вращения, должны компенсировать друг друга, поскольку центробежные силы и силы давления среды действуют на каплю в противоположных направлениях. Мелкомасштабные слагаемые из выписанных давлений будут характеризовать деформацию капли.

Давление центробежных сил, вызванное вращением капли вокруг оси смерча, определяется известным выражением

$$\begin{aligned} p_\Omega &= \int\limits_{r(\theta)}^{r(\theta)\cos\theta} \rho\Omega^2(L-x)\,dx \\ &= \rho\Omega^2 L(R+\xi^{(1)}+\xi^{(2)})(\cos\theta-1) \\ &+ \frac{1}{2}\rho\Omega^2\left(R+\xi^{(1)}+\xi^{(2)}\right)^2\sin^2\theta. \end{aligned} \tag{5}$$

Давление среды на поверхность капли найдем исходя из следующих соображений: на границы стенок смерча (внутреннюю и внешнюю) действуют разные давления, причем на внутренней стенке смерча давление существенно меньше, чем на наружной. В итоге в стенке смерча существует градиент давлений, так что разность давлений на внутреннюю и внешнюю (по отношению к оси смерча) стороны капли компенсируют действие центробежных сил инерции, стремящихся выкинуть каплю на периферию. Распределение давления среды в окрестности капли $p_\gamma(z)$ будем искать, обозначив давление в стенке смерча на расстоянии L от его оси (в плоскости симметрии капли $z=0$) как p_L и используя линейную аппроксимацию:

$$\nabla p_\gamma = -\gamma\,\mathbf{e}_z,$$

где γ — перепад давления на единицу расстояния, а $\mathbf{e}_z$ — орт нормали оси z (рис. 1). Проинтегрировав, найдем

$$p_\gamma = -\gamma z + C. \tag{6}$$

Из граничного условия при $z=0$ (на расстоянии L от оси смерча) найдем константу в (6): $C = p_L$. В итоге получим

$$\begin{aligned} p_\gamma &= p_L - \gamma z = p_L - \gamma r(\theta)\cos\theta \\ &= p_L - \gamma(R+\xi^{(1)}+\xi^{(2)})\cos\theta. \end{aligned} \tag{7}$$

Условие равенства центробежной силы и силы, возникающей из-за перепада давлений в среде, действующих на каплю и обеспечивающих неподвижность ее центра масс, позволяет выразить неизвестную константу γ через определяемые параметры задачи ρ, Ω, L.

Центробежная сила, действующая на каплю массой $m \equiv \rho 4\pi R^3/3$, центр масс которой вращается с угловой скоростью Ω по окружности радиуса L, определится известным выражением

$$F_\Omega = \rho 4\pi R^3\Omega^2 L/3.$$

Сила, действующая на каплю в противоположном направлении, возникающая из-за перепада давлений на диаметре капли, определится интегралом

$$F_\gamma = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} p_\gamma \cos\theta \cdot dS$$

$$\equiv \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (p_L - \gamma R\cos\theta)\cos\theta R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi = \frac{4\pi}{3}\gamma R^3.$$

Приравняв F_Ω и F_γ найдем

$$\gamma = \rho\Omega^2 L.$$

Подставив это соотношение в (7), получим

$$p_\gamma = p_L - \rho\,\Omega^2 L\big(R + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}\big)\cos\theta. \tag{8}$$

Баланс давления центробежных сил и сил давления окружающей среды определим следующим образом. Вычтя из (5) выражение (8), избавимся от влияния крупномасштабных эффектов и сможем сосредоточиться на основном предмете проводимого исследования искажения формы капли

$$\begin{aligned} p_\Omega - p_\gamma = &-\rho\Omega^2 L\big(R + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}\big)(\cos\theta - 1) \\ &+ \frac{1}{2}\rho\Omega^2\big(R + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}\big)^2\sin^2\theta \\ &- \big[p_L - \rho\Omega^2 L(R + \xi^{(1)} + \xi^{(2)})\cos\theta\big] \\ &= \rho\Omega^2 L\big(R + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}\big) - p_L \\ &+ \frac{1}{2}\rho\Omega^2\big(R + \xi^{(1)} + \xi^{(2)}\big)^2\sin^2\theta \\ &\approx \left[\rho\Omega^2 LR\left(1 + \frac{\xi^{(1)}}{R} + \frac{\xi^{(2)}}{R}\right) - p_L\right] \\ &+ \rho\Omega^2 R^2\left(\frac{1}{2} + \frac{\xi^{(1)}}{R} + \frac{\xi^{(2)}}{R}\right)\sin^2\theta = 0. \end{aligned} \tag{9}$$

В этом выражении первые слагаемые, заключенные в квадратные скобки, содержат величины, характеризующие крупномасштабные эффекты. Величина наименьшего из них, $\rho\Omega^2 L\xi^{(2)}$, не менее чем на два порядка превышает величину наибольшего из слагаемых, стоящих в круглых скобках $\rho\Omega^2 R^2$. Следовательно, приравняв нулю выражение, стоящее в квадратных скобках, можно определить по порядку величины давление p_L в стенке смерча на расстоянии L от его оси, при котором капля радиуса R будет находиться в равновесии по отношению к смещению вдоль оси z:

$$p_L \approx \rho\Omega^2 LR.$$

Из полученного выражения видно, что крупные капли должны концентрироваться под действием центробежных сил на периферии смерча, на внешней стороне его стенки, там, где противодавление среды максимально, а мелкие капельки будут располагаться в окрестности внутренней стенки смерча. Учтем, что, согласно существующем представлениям [19], в грозовых облаках средние размеры разноименно заряженных капель различны: отрицательно заряженные капли в среднем крупней положительно заряженных. Массивные отрицательно заряженные капли будут выноситься на периферию смерча, к внешней границе его стенки, тогда как более мелкие положительно заряженные останутся в окрестности внутренней границы стенки смерча. Как уже упоминалось, в результате действия центробежных сил давление в окрестности оси вращения (во внутренней полости смерча) понизится, а в стенке смерча появится градиент давления, перпендикулярный оси вращения, действие которого стабилизирует при некоторых значениях величин процесс центробежной седиментации капель разных размеров. В стенке смерча установится квазиравновесное макроскопическое разделение электрических зарядов с осевой симметрией. Области концентрации положительно и отрицательно заряженных капель будут цилиндрическими с характерными расстояниями до оси вращения L_1 и L_2 (рис. 2). Появившееся в итоге электрическое поле, подобное полю цилиндрического конденсатора, будет создаваться областью концентрации мелких положительно заряженных капель, а его напряженность может достигать предпробойных величин $\sim 10^4$ V/cm, поскольку очевидцы часто сообщают об электрических разрядах в стенках смерчей [17,18]. Кроме разрядов молний со смерчами связаны и более редкие и непонятные световые эффекты, которые также ассоциируются с электрическими явлениями в атмосфере: светящиеся пятна и кольца, вращающиеся вместе с воронкой; пульсирующие сияния, освещающие ее; сплошные свечения воронки в течение десятков минут. Имеются фотографии светящихся воронок смерчей [17,20].

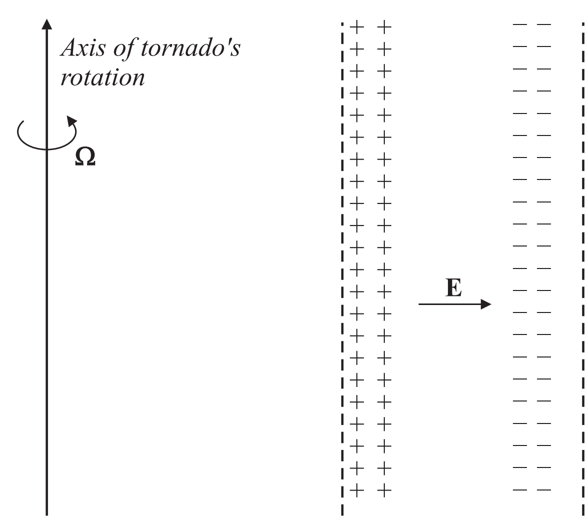

Рис. 2. Схематическое изображение расположения электрических зарядов в стенке воронки смерча.

В (9) слагаемым первого порядка малости, определяющим деформацию капли в поле центробежных сил следует считать $\rho\Omega^2R^2\sin^2\theta/2$; тогда слагаемым второго порядка малости будет $\rho\Omega^2R\xi^{(1)}\cos^2\theta$. Последнее слагаемое в (9) будет иметь третий порядок малости, которое в проводимом с точностью до малых второго порядка рассмотрении следует опустить, в итоге получим

$$(p_\Omega - p_\gamma)^{(1)} = -\frac{1}{2}\rho\Omega^2R^2\sin^2\theta \equiv \frac{1}{3}\rho\Omega^2R^2\big[P_2(\mu) - P_0(\mu)\big];$$

$$(p_\Omega - p_\gamma)^{(2)} = \rho\Omega^2R\xi^{(1)}\cos^2\theta \equiv -\frac{4}{3}\rho\Omega^2R\Bigg[\frac{A_2^{(1)}}{5}P_0(\mu) + \frac{9}{35}A_3^{(1)}P_1(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty}\bigg(A_{n+2}^{(1)}K_{2(n+2)n} + \Big(K_{2nm} - \frac{7}{3}\Big)A_n^{(1)} + A_{n-2}^{(1)}K_{2(n-2)n}\bigg)P_n(\mu)\Bigg];$$

$$K_{jnk} \equiv \big(C_{j0\,n0}^{k0}\big)^2, \tag{10}$$

где $C_{j0\,n0}^{k0}$ — коэффициенты Клебша–Гордона [17]. При выводе этого соотношения использованы рекуррентные формулы для разложения произведения полиномов Лежандра, приведенные в Приложении А.

Давление сил поверхностного натяжения определяется через орт нормали $\mathbf{n}$ к свободной поверхности капли

$$r = r(\theta): \qquad p_\sigma = \sigma\,\mathrm{div}\,\mathbf{n}; \qquad \mathbf{n} = \nabla\big(r - r(\theta)\big)\big/\big|\nabla\big(r - r(\theta)\big)\big|.$$

Выражение для орта нормали к поверхности капли, заданной соотношением (1), имеет вид

$$\mathbf{n} = \mathbf{e}_r\left[1 - \frac{1}{2R^2}\Big(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta}\Big)^2\right] - \frac{\mathbf{e}_\theta}{R}\left[\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta} + \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial\theta} - \frac{\xi^{(1)}}{R}\,\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\theta}\right].$$

Тогда для давления сил поверхностного натяжения во втором порядке малости получим выражение [10]:

$$p_\sigma = \frac{2\sigma}{R} - \frac{\sigma}{R^2}[2 + \Delta_\theta]\xi^{(1)} - \frac{\sigma}{R^2}[2 + \Delta_\theta]\xi^{(2)} + 2\frac{\sigma}{R^3}\xi^{(1)}[1 + \Delta_\theta]\,\xi^{(1)}.$$

Подставив в это выражение разложения по полиномам Лежандра для $\xi^{(1)}(\theta)$ и $\xi^{(2)}(\theta)$, окончательно получим

$$p_\sigma = \frac{2\sigma}{R} + \frac{\sigma}{R^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+2)A_n^{(1)}P_n(\mu) + \frac{\sigma}{R^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+2)A_n^{(2)}P_n(\mu) - \frac{2\sigma}{R^3}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}(k^2+k-1)K_{lkn}A_l^{(1)}A_k^{(1)}\Bigg]P_n(\mu)$$

или

$$p_\sigma^{(0)} = \frac{2\sigma}{R}; \qquad p_\sigma^{(1)} = \frac{\sigma}{R^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+2)\,A_n^{(1)}P_n(\mu);$$

$$p_\sigma^{(2)} = \frac{\sigma}{R^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+2)\,A_n^{(2)}P_n(\mu) - \frac{2\sigma}{R^3}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{k=2}^{\infty}(k^2+k-1)K_{lkn}A_l^{(1)}A_k^{(1)}\Bigg]P_n(\mu). \tag{11}$$

Давление электрического поля собственного заряда на равновесную поверхность капли, описываемую соотношением (1), согласно Приложению В, может быть разложено на порядки малости следующим образом:

$$p_Q^{(0)} = \frac{Q^2}{8\pi R^4}; \qquad p_Q^{(1)} = \frac{Q^2}{4\pi R^5}\sum_{n=2}^{\infty}A_n^{(1)}(n-1)P_n(\mu);$$

$$p_Q^{(2)} = \frac{Q^2}{4\pi R^5}\sum_{n=2}^{\infty}A_n^{(2)}(n-1)P_n(\mu) + \frac{Q^2}{8\pi R^6}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k,l=2}^{\infty}A_k^{(1)}A_l^{(1)}\big(10 + (l+1)(k+1) - 2(l+4)(l+1) + 2l(n+1)\big)K_{kln}P_n(\mu) + \frac{Q^2}{8\pi R^6}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k,l=2}^{\infty}A_k^{(1)}A_l^{(1)}\alpha_{kln}P_n(\mu). \tag{12}$$

Расчет равновесной формы капли из условия баланса давлений

Коэффициенты $A_n^{(j)}$ в выражении для формы равновесной поверхности (1) вычислим, подставив полученные выражения для компонент давлений (10)–(12) с учетом (4) в условие баланса давлений (3), приравняв слагаемые одинакового порядка малости и используя ортогональность полиномов Лежандра.

В нулевом порядке получим равенство, описывающее баланс давлений на поверхности заряженной сферической капли в отсутствие вращения и позволяющее определить равновесное давление внутри капли

$$p^{(0)} = \frac{2\sigma}{R} - \frac{Q^2}{8\pi R^4}.$$

Баланс давлений на поверхности капли, выписанный в первом порядке малости, имеет вид

$$p_\sigma^{(1)} = p^{(1)} + p_Q^{(1)} + (p_\Omega - p_\gamma)^{(1)}.$$

После подстановки в него выражений (10)–(12) получим

$$\frac{\sigma}{R^2}\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)(n+2)A_n^{(1)}P_n(\mu) = p^{(1)}P_0(\mu)$$

$$+\frac{Q^2}{4\pi R^5}\sum_{n=2}^{\infty}A_n^{(1)}(n-1)P_n(\mu)+\frac{1}{3}\rho\Omega^2R^2\left[P_2(\mu)-P_0(\mu)\right].$$

Собрав слагаемые при полиномам Лежандра одинакового порядка и приравняв каждую из таких сумм нулю, в силу ортогональности функций $P_n(\mu)$ получим при $n = 0$ поправку к давлению внутри капли, возникающую вследствие действия центробежных сил

$$p^{(1)} = \rho\Omega^2R^2/3,$$

а при $n \geq 2$ — коэффициенты $A_n^{(1)}$ в разложении (4):

$$\frac{A_2^{(1)}}{R} = \frac{E}{3(1-W)}; \qquad F \equiv \frac{\rho\Omega^2R^3}{4\sigma};$$

$$W \equiv \frac{Q^2}{16\pi\sigma R^3}; \qquad A_n^{(1)} = 0, \quad (n > 2);$$

где W — параметр Рэлея, равный отношению давления электрического поля собственного заряда капли к лапласовскому давлению под сферической поверхностью и характеризующий устойчивость поверхности капли по отношению к собственному заряду (критическое для развития неустойчивости значение параметра W равно единице); F — отношение давления центробежных сил к лапласовскому давлению.

Согласно полученным соотношениям, первый порядок малости имеет лишь коэффициент при полиноме Лежандра $P_2(\mu)$, в то время как коэффициенты при всех остальных полиномах равны 0. В результате равновесия форма поверхности капли в первом порядке малости запишется в виде

$$r(\theta) \approx R\left(1 - \frac{F}{3(1-W)}P_2(\mu)\right). \tag{13}$$

Из сравнения выражения (13) с разложением в ряд по эксцентриситету e уравнения сфероидальной поверхности, выписанного в сферических координатах

$$r_{\text{sph}} = R\Bigg\{\left(1 - \frac{1}{45}e^4\right)P_0(\mu) - \left(\frac{1}{3}e^2 + \frac{11}{63}e^4\right)P_2(\mu)$$

$$+\frac{3}{35}P_4(\mu)e^4 + O(e^6)\Bigg\}, \tag{14}$$

следует, что равновесную форму поверхности заряженной капли, вращающейся вокруг оси смерча с постоянной угловой скоростью Ω, можно считать вытянутым сфероидом с точностью до пренебрежения слагаемыми $\sim e^4$. Эксцентриситет такого сфероида связан с зарядом капли и со скоростью вращения смерча соотношением

$$e^2 = \frac{F}{1-W}. \tag{15}$$

Поскольку квадрат эксцентриситета пропорционален отношению давления центробежных сил, имеющему первый порядок малости, к давлению капиллярных сил под сферической поверхностью, имеющему нулевой порядок малости, то он, согласно сказанному выше, имеет первый порядок малости и пропорционален величине деформации капли, т. е.

$$e^2 \sim A_2^{(1)}/R \sim \xi^{(1)}/R \sim (p_\Omega - p_\gamma)^{(1)}/p_\sigma^{(1)}.$$

Из соотношения (15) видно, что как увеличение скорости вращения, так и увеличение заряда приводит к росту эксцентриситета, т. е. к увеличению сфероидальной деформации равновесной поверхности капли. Область применимости полученного выражения определяется условием

$$e^2 \equiv \frac{F}{1-W} \ll 1. \tag{16}$$

Соотношение (16) накладывает ограничение на величины угловой скорости вращения, заряд и радиус капли, при которых ее форму можно считать близкой к сплюснутому сфероиду. Поскольку в грозовых облаках, порождающих смерчи [17,18], радиусы капель изменяются в диапазоне от десятка до сотни микрометров, а угловые скорости вращения смерча можно оценить как $\Omega^2 \sim 10^3 - 10^4\,\text{s}^{-2}$, то условие (16) выполняется при любых достижимых в естественных условиях зарядах капель, которые обычно обеспечивают удовлетворение неравенства: $W \ll 1$ [19]. Более того, в указанном диапазоне размеров и зарядов капель и угловых скоростей вращения смерча значение квадрата эксцентриситета вытянутой сфероидальной капли будет весьма мало ($e^2 \leq 10^{-4}$), и только для весьма крупных капель с $R \sim 0.1\,\text{cm}$ сфероидальная деформация будет заметной. Условие (16) будет выполняться и в этом случае. Однако возможность появления в стенке смерча крупных капель нуждается в комментарии.

Во внутренней полости смерча давление по сравнению с внешним, атмосферным, понижено примерно на несколько десятков процентов [17,18]. Поэтому вода, попадающая при перемещении смерча из внешней среды внутрь воронки, будет интенсивно испаряться, а водяной пар — конденсироваться на мелких капельках внутренней поверхности стенки воронки. При конденсации, а также вследствие коагуляции капель во внутренней части стенки будет происходить их укрупнение. Соответственно будет увеличиваться и действующая на них центробежная сила, которая будет выносить капли на периферию смерча.

Во втором порядке малости имеем

$$p_\sigma^{(2)} = p^{(2)} + p_Q^{(2)} + (p_\Omega - p_\gamma)^{(2)}.$$

Подставив сюда выражения для поправок второго порядка малости к давлениям и учитывая, что, поскольку $A_n^{(1)}$ отлично от нуля только при $n = 2$, то во втором порядке малости будут отличны от нуля коэффициенты только при $P_0(\mu)$, $P_2(\mu)$ и $P_4(\mu)$; тогда получим

$$\frac{A_2^{(2)}}{R} = -\frac{25 - 17W}{63(1 + W)}\, e^4; \qquad \frac{A_4^{(2)}}{R} = -\frac{18 - 34W}{35(9 + 2W)}\, e^4.$$

Окончательный аналитический вид уравнения образующей вращающейся заряженной капли с сохранением слагаемых второго порядка малости будет следующим:

$$r(\theta) = R\left\{\left(1 - \frac{1}{45}\, e^4\right)P_0(\mu) - \left(\frac{1}{3}\, e^2 + \frac{25 - 17W}{63(1+W)}\, e^4\right)P_2(\mu) + \frac{2}{35}\, \frac{9 - 17W}{9 + 2W}\, e^4 P_4(\mu)\right\}. \qquad (17)$$

Сравнив это выражение с разложением в ряд по эксцентриситету e уравнения сплюснутого сфероида (14), несложно убедиться, что в квадратичном приближении равновесная форма капли несколько отклоняется от сфероидальной.

Комментарии к полученным результатам

В проведенном выше рассмотрении использовалось условие неподвижности капли в стенке смерча относительно смещений в радиальном направлении (перпендикулярном оси смерча), но не затрагивался вопрос об обеспечении ее неподвижности в направлении, параллельном оси смерча, поскольку в работе предполагалось исследовать возможные деформации капли в поле центробежных сил. В реальности в стенке смерча капля находится в обдувающем ее потоке газа, она подвержена действию электрического и гравитационного полей, и все эти факторы, с одной стороны, приводят к дополнительной деформации капли, а с другой — подбор противоположно направленных силовых воздействий на каплю в вертикальном направлении может обеспечить ее неподвижность, которая и использовалась в проведенном анализе. Теоретический анализ условий подвешивания и деформации капли во внешних силовых полях проведен в [8], экспериментально подвес заряженной капли в суперпозиции гравитационного, электрического и аэродинамического полей реализован в [21]. Для полноты освещения возможной деформации капли в стенке смерча в совокупности всех силовых воздействий отметим, что в линейном приближении капля в ламинарно обтекающем ее потоке среды с плотностью ρ_* и скоростью $\mathbf{U}$ деформируется к сплюснутому вдоль потока сфероиду с эксцентриситетом [22]:

$$e^2 = \frac{9}{16}\, \frac{We}{(1 - W)}; \qquad We \equiv \frac{\rho_* U^2 R}{\sigma},$$

где We — число Вебера. Здесь уместно отметить, что капли воды с радиусами, меньшими сотни микрометров, свободно падающие в воздухе под действием силы тяжести, характеризуются числами Рейнольдса, меньшими десяти [23], и следовательно, их обтекание потоком воздуха реализуется в ламинарном режиме. В однородном электростатическом поле напряженностью $\mathbf{E}$ капля деформируется к вытянутому сфероиду с эксцентриситетом [3]:

$$e^2 = \frac{9}{16\pi}\, \frac{w}{(1 - W)}; \qquad w = \frac{E^2 R}{\sigma}.$$

Наличие гравитационного поля в линейном приближении на форме капли не сказывается, но уже в приближении $\sim \varepsilon^{3/2}$ его влияние приводит к появлению асимметрии относительно плоскости, перпендикулярной оси смерча [8].

Заключение

Под действием центробежных сил заряженная капля в стенке смерча деформируется к фигуре, совпадающей в линейном приближении по амплитуде деформации со сфероидом, сплюснутым в направлении действия центробежных сил. Величина эксцентриситета такой фигуры увеличивается с ростом заряда и размера капли. В диапазоне размеров капель от десятка до сотни μm значение сфероидальной деформации весьма мало, но с увеличением радиуса капли растет пропорционально его третьей степени. При расчетах в квадратичном приближении по величине деформации имеет место отклонение равновесной формы капли от сфероидальной.

Приложение A

В соответствии с [24,25] выпишем рекуррентные соотношения для преобразования бесконечных сумм, содержащих произведения двух полиномов Лежандра, и сумм, содержащих произведения двух первых производных от полиномов Лежандра по полярному углу, в ряды по этим же полиномам.

1. Разложение для $\sum\limits_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)} P_2(\mu) P_n(\mu)$:

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)}\big(P_2(\mu)P_n(\mu)\big) = \sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)}\Big\{K_{2n(n-2)}P_{n-2}(\mu) + K_{2nn}P_n(\mu) + K_{2n(n+2)}P_{n+2}(\mu)\Big\}, \qquad (\text{A}.1)$$

где

$$K_{jnk} = \left(C_{j0\,n0}^{k0}\right)^2,$$

а $C_{j0\,n0}^{k0}$ — коэффициенты Клебша–Гордана [24]; $|j - n| \le k \le j + n$; $j + k + n$ — четное.

Перепишем в несколько иной форме первую и третью суммы в (A.1), переходя от $P_{n\pm2}(\mu)$ к $P_n(\mu)$. В сумме

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)} K_{2n(n-2)} P_{n-2}(\mu)$$

сделаем замену $n-2=j$ и просуммируем по j, в итоге получим

$$\sum_{j=0}^{\infty} A_{j+2}^{(1)} K_{2(j+2)} j P_j(\mu).$$

Сделаем еще одну замену $j=n$ и начнем суммирование с $n=2$, тогда

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{n+2}^{(1)} K_{2(n+2)n} P_n(\mu) = \frac{1}{5} A_2^{(1)} P_0(\mu) + \frac{9}{35} A_3^{(1)} P_1(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} A_{n+2}^{(1)} K_{2(n+2)n} P_n(\mu).$$

В сумме

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)} K_{2n(n+2)} P_{n+2}(\mu)$$

сделаем замену $n+2=j$ и просуммируем по j, получим

$$\sum_{j=4}^{\infty} A_{j-2}^{(1)} K_{2(j-2)j} P_j(\mu).$$

Сделаем теперь замену $j=n$ и начнем суммирование с $n=2$, в итоге получим

$$\sum_{j=4}^{\infty} A_{n-2}^{(1)} K_{2(n-2)n} P_n(\mu) = \sum_{n=2}^{\infty} (1-\delta_{n2}-\delta_{n3}) A_{n-2}^{(1)} K_{2(n-2)n} P_n(\mu),$$

где δ_{nm} — символ Кронекера.

В результате вместо (A.1) после перемножения полиномов второй и n-й степени получим

$$\sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)} \big(P_2(\mu) P_n(\mu)\big) = \frac{1}{5} A_2^{(1)} P_0(\mu) + \frac{9}{35} A_3^{(1)} P_1(\mu) + \sum_{n=2}^{\infty} \big(A_{n+2}^{(1)} K_{2(n+2)n} + A_n^{(1)} K_{2nn} + (1-\delta_{n2}-\delta_{n3}) A_{n-2}^{(1)} K_{2(n-2)n}\big) P_n(\mu).$$

2. Разложение для $\sum\limits_{k,l=2}^{\infty} A_k^{(1)} A_l^{(1)} P_k(\mu) P_l(\mu)$ получаем в результате сходных рассуждений в виде

$$\sum_{k,l=2}^{\infty} A_k^{(1)} A_l^{(1)} P_k(\mu) P_l(\mu) = \sum_{k,l=2}^{\infty} A_k^{(1)} A_l^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} K_{kln} P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=2}^{\infty} A_k^{(1)} A_l^{(1)} K_{kln} P_n(\mu).$$

3. Разложение для $\sum\limits_{k,l=2}^{\infty} A_k^{(1)} A_l^{(1)} \frac{\partial P_k(\mu)}{\partial\theta} \frac{\partial P_l(\mu)}{\partial\theta}$. Согласно [25], имеем

$$\sum_{k,l=2}^{\infty} A_k^{(1)} \frac{\partial P_k(\mu)}{\partial\theta} A_l^{(1)} \frac{\partial P_l(\mu)}{\partial\theta} = \sum_{k,l=2}^{\infty} A_k^{(1)} A_l^{(1)} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{kln} P_n(\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k,l=2}^{\infty} A_k^{(1)} A_l^{(1)} \alpha_{kln} P_n(\mu);$$

$$\alpha_{kln} = -C_{k0l0}^{n0} C_{k(-1)l1}^{n0} \sqrt{k(k+1)l(l+1)}.$$

Приложение B

Давление электрического поля собственного заряда на равновесную поверхность капли выражается через потенциал электрического поля φ:

$$p_Q = -\frac{1}{8\pi} E^2 = \frac{1}{8\pi} (\nabla\varphi)^2. \qquad (B.1)$$

Для нахождения явного вида p_Q необходимо решить краевую задачу для электростатического потенциала φ, состоящую из уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi = 0,$$

условия убывания решения на бесконечности и условия эквипотенциальности поверхности капли

$$r \to \infty: \quad \varphi \to 0; \qquad r = r(\theta): \quad \varphi = \varphi_S,$$

а также условия неизменности заряда капли

$$2\pi \int_{-1}^{1} \left[\frac{(\mathbf{n}\nabla\varphi)}{(\mathbf{e}_r\, \mathbf{n})} r^2 \right]_{r=r(\theta)} d\mu = -4\pi Q,$$

где φ_S — потенциал поверхности электропроводной капли.

Подставив в сформулированную красную задачу для нахождения потенциала φ асимптотическое разложение

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \varphi^{(1)} + \varphi^{(2)} + O(\varepsilon^2),$$

получим краевые задачи для определения каждой из составляющих φ.

Задача нулевого порядка малости имеет вид

$$\Delta\varphi^{(0)} = 0;$$

$$r \to \infty: \quad \varphi^{(1)} \to 0; \qquad r = R: \quad \varphi^{(0)} = \varphi_S^{(0)};$$

$$r = R: \qquad \int_{-1}^{1} \frac{d\varphi^{(0)}}{dr} R^2 d\mu = -2Q. \qquad (B.2)$$

Задача первого порядка малости запишется в виде

$$\Delta\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = 0;$$

$$r \to \infty: \qquad \varphi^{(1)}(\mathbf{r}) \to 0;$$

$$r = R: \qquad \varphi^{(1)}(\mathbf{r}) + R\,\frac{\partial \varphi^{(0)}(\mathbf{r})}{\partial r}\,\xi^{(1)}(\theta) = \varphi_S^{(1)};$$

$$r = R: \int_{-1}^{1}\left[\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} + \left(2\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r} + R\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial r^2}\right)\xi^{(1)}(\theta)\right]R^2 d\mu = 0. \tag{B.3}$$

Задача второго порядка малости запишется в виде

$$\Delta\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = 0;$$

$$r \to \infty: \qquad \varphi^{(2)}(\mathbf{r}) \to 0;$$

$$r = R: \quad \varphi^{(2)} + \xi^{(1)}\,\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} + \xi^{(2)}\,\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r} + \frac{1}{2}\left(\xi^{(1)}\right)^2 R\,\frac{\partial^2 \varphi^{(0)}}{\partial r^2} = \varphi_S^{(2)};$$

$$\int_{-1}^{1}\Bigg\{R^2\left[\frac{\partial \varphi^{(2)}}{\partial r} + \xi^{(1)}\,\frac{\partial^{(2)} \varphi^{(1)}}{\partial r^2} + \xi^{(2)}\,\frac{\partial^{(2)} \varphi^{(0)}}{\partial r^2} + \frac{1}{2}\left(\xi^{(1)}\right)^2\frac{\partial^{(3)} \varphi^{(0)}}{\partial r^3}\right] + 2R\left[\xi^{(1)}\,\frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r} + \left(\xi^{(1)}\right)^2\frac{\partial^{(2)} \varphi^{(0)}}{\partial r^2} + \xi^{(2)}\,\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r}\right] - \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial \theta}\,\frac{\partial \xi^{(1)}(\theta)}{\partial \theta} + \left(\xi^{(1)}\right)^2\frac{\partial \varphi^{(0)}}{\partial r}\Bigg\}d\mu = 0. \tag{B.4}$$

Согласно (B.2)–(B.4), потенциалы $\varphi^{(j)}(\mathbf{r})$ являются убывающими на бесконечности решениями уравнений Лапласа в сферических координатах и, следовательно, их следует искать в виде

$$\varphi^{(0)}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n r^{-(n+1)} P_n(\mu);$$

$$\varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} D_n r^{-(n+1)} P_n(\mu);$$

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n r^{-(n+1)} P_n(\mu). \tag{B.5}$$

Постоянные коэффициенты B_n, D_n и C_n в разложениях (B.5) определяются из граничных условий краевых задач (B.2), (B.3) и (B.4). Решения задач (B.2)–(B.4) запишутся (с учетом рекуррентных соотношений, приведенных в Приложении A) в виде

$$\varphi^{(0)}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{r}; \qquad \varphi^{(1)}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{R}\sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)}\left(\frac{R}{r}\right)^{(n+1)} P_n(\mu);$$

$$\varphi^{(2)}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{A_n^{(2)}}{R} + \sum_{k,l=2}^{\infty} lK_{kln}\,\frac{A_k^{(1)}}{R}\,\frac{A_l^{(1)}}{R}\right]\left(\frac{R}{r}\right)^{n+1} P_n(\mu). \tag{B.6}$$

Давление электростатического поля на поверхность капли (B.1) после подстановки в него асимптотического разложения для потенциала электрического поля и выражения для формы равновесной поверхности (1) во втором порядке малости может быть представлено в виде

$$p_Q \approx p_Q^{(0)} + p_Q^{(1)} + p_Q^{(2)} = \frac{1}{8\pi}\left(\frac{d\varphi^{(0)}}{dr}\right)^2 + \frac{1}{4\pi}\left[\frac{d\varphi^{(0)}}{dr}\left(\xi^{(1)}\,\frac{d^2\varphi^{(0)}}{dr^2} + \frac{\partial \varphi^{(1)}}{\partial r}\right)\right] + \frac{1}{8\pi}\Bigg\{2\xi^{(2)}\,\frac{d\varphi^{(0)}}{dr}\,\frac{d^2\varphi^{(0)}}{dr^2} + \left(\xi^{(1)}\right)^2\left(\left(\frac{d^2\varphi^{(0)}}{dr^2}\right)^2 + \frac{d^3\varphi^{(0)}}{dr^3}\,\frac{d\varphi^{(0)}}{dr}\right) + \left(\frac{d\varphi^{(1)}}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{d\varphi^{(1)}}{dr}\right)^2 + 2\,\frac{d\varphi^{(2)}}{dr}\,\frac{d\varphi^{(0)}}{dr} + 2\xi^{(1)}\left(\frac{d^2\varphi^{(0)}}{dr^2}\,\frac{d\varphi^{(1)}}{dr} + \frac{d^2\varphi^{(1)}}{dr^2}\,\frac{d\varphi^{(0)}}{dr}\right)\Bigg\}. \tag{B.7}$$

Подставим в (B.7) выражения (B.6) для потенциалов $\varphi^{(0)}(\mathbf{r})$, $\varphi^{(1)}(\mathbf{r})$, $\varphi^{(2)}(\mathbf{r})$ и для давления электрического поля окончательно получим

$$p_Q = \frac{Q^2}{8\pi R^4}\left[1 + \frac{2}{R}\sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(1)}(n-1)P_n(\mu) + \frac{2}{R}\sum_{n=2}^{\infty} A_n^{(2)}(n-1)P_n(\mu)\right] + \frac{Q^2}{8\pi R^6}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k,l=2}^{\infty} A_k^{(1)}A_l^{(1)}\Big[\big(10 + (l+1)(k-2l-7) + 2l(n+1)(1-\delta_{n0})\big)K_{kln} + \alpha_{kln}\Big]P_n(\mu).$$

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00066-а.

Список литературы

[1] *Brown R.A., Scriven L.E.* // Proc. R. Soc. London. 1980. Vol. A371. P. 331–357.
[2] *Beard K.V., Feng J.Q., Chuang C.* // J. Atm. Sci. 1989. Vol. 46. N 15. P. 2404–2418.
[3] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белавина Е.И.* // ЖТФ. 1989. Т. 59. Вып. 6. С. 27–34.
[4] *Basaran O.A., Scriven L.E.* // Phys. Fluids. 1989. Vol. A1. N 5. P. 799–809.
[5] *Zholkovskij E.K., Masliyah J.N., Czarnecki J.* // J. Fluid Mech. 2002. Vol. 472. P. 1–27.
[6] *Sadhal S.S., Rednikov A., Ohsaka K.* // Ann. N.Y. Acad. Sci. 2004. N 1027. P. 447–463.

[7] *Duchemin L., Lister J.R., Lange U.* // J. Fluid Mech. 2005. Vol. 533. P. 161–170.
[8] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 10. С. 32–40.
[9] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 11. С. 36–42.
[10] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Мокшеев П.В.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 4. С. 32–40.
[11] *Won-Kyu Rhim, Ishikava T.* // Rev. Sci. Instr. 2001. Vol. 72. N 9. P. 3572–3575.
[12] *Григорьев А.И., Синкевич О.А.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 10. С. 1985–1987.
[13] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
[14] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 6. С. 93–95.
[15] *Коромыслов В.А., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 5. С. 16–24.
[16] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 6. С. 44–54.
[17] *Наливкин Д.В.* Ураганы, бури, смерчи. Л.: Наука, 1969. 487 с.
[18] *Сноу Дж.* // В мире науки. 1984. № 6. С. 44–56.
[19] *Мучник В.М.* Физика грозы. Л.: Гидрометеоиздат, 1974. 350 с.
[20] *Барри Дж.* Шаровая молния и четочная молния. М.: Мир, 1983. 286 с.
[21] *Roulleau M., Desbois M.* // J. Atmosph. Sci. 1972. Vol. 29. N 4. P. 565–569.
[22] *Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 12. С. 91–96.
[23] *Мазин И.П., Шметер С.М.* Облака. Строение и физика образования. Л.: Гидрометеоиздат, 1983. 160 с.
[24] *Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К.* Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 439 с.
[25] *Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 9. С. 20–26.