

## Статистическая кинетика квазихрупкого разрушения

© А.И. Малкин,<sup>1</sup> Ф.А. Куликов-Костюшко,<sup>2</sup> Т.А. Шумихин<sup>3</sup>

<sup>1</sup> Институт физической химии и электрохимии им. А.Н. Фрумкина РАН,  
119991 Москва, Россия  
e-mail: mlkn@list.ru

<sup>2</sup> Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,  
119992 Москва, Россия  
e-mail: scaevola@nm.ru

<sup>3</sup> Институт прикладной механики РАН,  
119991 Москва, Россия  
e-mail: tish2002@mail.ru

(Поступило в Редакцию 28 марта 2006 г. В окончательной редакции 15 мая 2007 г.)

Обсуждаются статистические закономерности разрушения в условиях статической усталости и нагружения с постоянной скоростью. На основе феноменологических моделей роста трещин проведен теоретический анализ статистики квазихрупкого разрушения твердых тел, для которых имеет место статическая усталость и экспериментально измеряемая прочность которых определяется кинетическими факторами. Построены распределения прочности и долговечности, правильно отражающие основные эмпирические закономерности. Показано, что часто наблюдаемые общие особенности статистики квазихрупкого разрушения обусловлены, по-видимому, качественным сходством в асимптотическом поведении статистики тепловых флуктуаций и „опасных“ дефектов структуры твердого тела: экспоненциальным распределением времени ожидания сильных тепловых флуктуаций, большим количеством статистически равноценных опасных дефектов в образце и резким снижением вероятности существования дефектов с размерами, превышающими некоторое предельное значение. Полученные результаты позволяют сделать вывод, что общепринятая теоретическая интерпретация статистики Вейбулла, по-видимому, нуждается в пересмотре. При квазихрупком разрушении предположение о степенной асимптотике распределения размеров трещиноподобных дефектов не согласуется с эмпирическими данными по статической усталости.

PACS: 62.20.Mk, 02.50.-r, 05.20.Dd

### Введение

Большинство статистических моделей механики разрушения основано на широко распространенной концепции „слабого звена“ и термодинамических критериях разрушения типа Гриффитса [1,2]. В рамках этих моделей статистические характеристики прочности определяются исключительно случайной структурой твердого тела. Кинетические аспекты разрушения предполагаются несущественными.

Если измеряемая в эксперименте прочность обусловлена потерей термодинамической устойчивости при нагружении твердого тела, такой подход, безусловно, оправдан. Если же кинетические затруднения в развитии процесса разрушения существенны, термодинамическое рассмотрение нельзя признать удовлетворительным. С физико-химической точки зрения различие между этими двумя ситуациями связано с высотой энергетических барьеров, препятствующих росту трещин. При достаточно высоких барьерах, скорость термофлуктуационного преодоления которых мала, нагруженное твердое тело может в течение длительного времени существовать в термодинамически неравновесном (метастабильном) состоянии. В этом случае разрушение следует рассматривать как термоактивированный процесс, а статистические характеристики прочности и дол-

говечности будут определяться статистикой тепловых флуктуаций и высот барьеров [3,4].

При микроскопически хрупком разрушении барьеры связаны с так называемым решеточным захватом [5,6]. Для реалистичных межатомных потенциалов высота таких барьеров мала (при нормальных условиях соизмерима с  $kT$ ), и заметные кинетические затруднения отсутствуют. Однако микроскопически хрупкое разрушение встречается сравнительно редко. Значительно чаще разрушение имеет квазихрупкий характер, когда рост трещины сопряжен с относительно быстрыми релаксационными процессами в окрестности ее вершины. Роль кинетических факторов при квазихрупком разрушении может быть весьма существенной [3–9].

Создание последовательной статистической теории разрушения „из первых принципов“ вряд ли возможно в обозримом будущем. Существует, однако, ряд надежно установленных эмпирических закономерностей, таких как формула долговечности Журкова [3]

$$t_l = t_p \exp\left(\frac{E_a - v_a \sigma}{kT}\right) \quad (1.1)$$

или конкурирующая с ней степенная зависимость долговечности от нагрузки [3,7]

$$t_l = t_p \left(\frac{\sigma}{\sigma_p}\right)^{-n} \exp\left[\frac{E'_a}{kT}\right]. \quad (1.2)$$

Соотношения (1.1) и (1.2) представляют собой выборочное среднее значение долговечности в испытаниях на статическую усталость и являются прямым доказательством длительного существования твердого тела в сильно неравновесном состоянии вдали от границы термодинамической устойчивости [3–5].

Естественными аналогами соотношений (1.1), (1.2) являются эмпирические уравнения для скорости роста трещин [5,7–10]

$$v_c = v_e \exp\left(-\frac{E_a - bK_I}{kT}\right), \quad (1.3)$$

$$v_c = v_e \left(\frac{K_I}{K_S}\right)^n \exp\left(-\frac{E'_a}{kT}\right), \quad (1.4)$$

где  $K_I \equiv K_I(L, \sigma)$  — коэффициент интенсивности напряжений (КИН), вычисляемый в рамках линейной теории упругости. Соотношения вида (1.3), (1.4) часто с хорошей точностью аппроксимируют экспериментальные данные на стадии ускоряющегося роста трещин.

Рост трещин на начальной стадии, как правило, имеет характер скачкообразного случайного процесса. Длительные периоды статического существования трещины перемежаются быстрыми перемещениями фронта в новое положение. Характерный шаг роста при этом много больше межатомного расстояния в твердом теле. Такой характер роста подтверждается как прямыми наблюдениями, так и исследованиями статистики импульсов акустической эмиссии. Соотношения (1.3), (1.4) применимы на грубых масштабах длины и времени, и лишь при условии, что имеет смысл кинематическое усреднение. Последнее требует существования макроскопически малых отрезков, на которых можно пренебречь изменением правых частей (1.3), (1.4) и флуктуациями времени перемещения вершины в сравнении со средним временем.

Другой характерной статистической особенностью разрушения макроскопически хрупких твердых тел является распределение Вейбулла [1,2,7]

$$P(\sigma) = 1 - \exp\left[-\left(\sigma/\sigma_0\right)^n\right]. \quad (1.5)$$

Распределение (1.5) во многих случаях хорошо описывает статистику прочности в условиях испытаний с постоянной скоростью нагружения. Общепринятая теоретическая интерпретация распределения Вейбулла основана на концепции „слабого звена“ и термодинамических аргументах. Однако параметр  $\sigma_0$  в (1.5), вообще говоря, зависит от скорости деформации. Для дальнейшего важно также, что теоретическая интерпретация статистики Вейбулла существенно опирается на предположение о степенном характере асимптотики распределения размеров трещиноподобных опасных дефектов [1,2].

Еще одной общей чертой является масштабный эффект, т.е. зависимость прочности и долговечности от размеров тела и размеров элементов его надатомной структуры. Природа масштабных эффектов в прочности

и долговечности многократно обсуждалась в литературе [1,2,4,7,10]. Здесь отметим лишь, что распределению Вейбулла (1.5) отвечает степенное снижение средней прочности с увеличением размеров образца.

Перечисленные статистические закономерности наблюдались для множества твердых тел различного строения и надатомной структуры. Важно, что для сходных по составу и структуре твердых тел (например, для силикатных стекол [5,7–9]) наблюдались как зависимости долговечности вида (1.1), (1.2), так и распределение прочности Вейбулла (1.5). Последнее обстоятельство ставит под сомнение широко распространенную теоретическую трактовку распределения Вейбулла по отношению к квазихрупкому разрушению. Не вполне ясны и причины универсальности кинетических закономерностей (1.1), (1.2), отражающих термофлуктуационную природу начальной стадии разрушения и статистические характеристики дефектной структуры твердого тела. Ясно, однако, что само существование общих статистических закономерностей обусловлено сходством в асимптотическом поведении статистики опасных дефектов и тепловых флуктуаций в различных твердых телах.

В связи с этим возникает несколько принципиальных вопросов. Во-первых, какими именно общими свойствами статистики опасных дефектов и тепловых флуктуаций обусловлены общие статистические закономерности разрушения? Во-вторых, каковы причины частого появления распределения Вейбулла в статистических экспериментах? Является ли это распределение следствием термодинамических условий или особенностей кинетики квазихрупкого разрушения? Наконец, в каком соотношении находятся распределения долговечности (в испытаниях на статическую усталость) и прочности (в испытаниях с постоянной скоростью нагружения)? В частности, как связаны температурные зависимости прочности и долговечности?

Ниже эти вопросы рассматриваются на основе феноменологических моделей роста трещин [11,12]. Рассмотрение ограничено часто встречающейся ситуацией, когда измеряемые в эксперименте прочность и долговечность определяются стадией подрастания невзаимодействующих друг с другом трещин. Основная цель настоящей работы состоит в установлении связи статистических характеристик прочности и долговечности с характеристиками кинетики роста трещин, в выяснении возможных причин существования общих статистических закономерностей разрушения и условий их проявления в эксперименте.

## Кинетические модели роста трещин

В исходных феноменологических моделях [12] рост изолированной трещины рассматривается как скачкообразный случайный процесс. Эволюционная задача о

росте трещины имеет вид

$$\frac{\partial V(L, t|L_0)}{\partial t} = -Z(L, \sigma)V + \int_0^{L-L_0} w(l)Z(L-l, \sigma)V(L-l, t|L_0)dl, \\ V(L, 0|L_0) = \delta_+(L-L_0). \quad (2.1)$$

Здесь  $V(L, t|L_0)$  — плотность распределения размеров трещин при начальном размере  $L_0$ ,  $Z^{-1}(L, \sigma)$  — среднее время ожидания элементарного акта роста трещины (скачка),  $w(l)$  — плотность распределения длин скачков. Для функции  $Z(L, \sigma)$  в [11,12] предложены соотношения

$$Z(L, \sigma) = Z_0 \left( \frac{bK_I}{kT} \right)^m \exp \left( -\frac{E_a - bK_I}{kT} \right), \quad (2.2)$$

$$Z(L, \sigma) = Z_0 \left( \frac{K_I}{K_S} \right)^m \exp \left( -\frac{E'_a}{kT} \right), \quad (2.3)$$

отвечающие эмпирическим зависимостям (1.3), (1.4). Нетрудно показать, что при кинематическом усреднении эмпирические зависимости для средней скорости роста трещин вытекают из выражений (2.2), (2.3). Произвольная степенная зависимость предэкспоненциального множителя в (2.2) от коэффициента интенсивности напряжений и температуры введена из-за низкой точности экспериментального определения величины  $v_e$  в (1.3). Предполагается также, что показатель степени в соотношении (2.3)  $m > 2$ .

Физическое содержание модели (2.1) состоит в следующем. При квазихрупком разрушении элементарный акт роста трещины представляет собой сложный многостадийный процесс. Для его описания в общем случае необходим учет релаксационных процессов, протекающих после каждого скачка. Это требует введения дополнительных статистических переменных, характеризующих состояние материала в окрестности фронта трещины.

Если, однако, время релаксации мало в сравнении с характерным временем ожидания скачка, то при вычислении распределения времени ожидания состояния материала в зоне предразрушения можно считать стационарным. При условии стационарности естественно предположить, что кинетическая предыстория роста не влияет на статистические характеристики элементарного акта.

В этих предположениях элементарный акт роста квазихрупкой трещины эквивалентен хрупкому разрушению тела, подвергнутого предварительной пластической деформации, что обеспечивает применимость общей схемы построения кинетических моделей [11,12] к квазихрупким трещинам с выраженной зоной пластичности.

Модель (2.1) основана на предположении об экспоненциальном распределении времени ожидания акта роста. Основанием для этого являются хорошо известные асимптотические теоремы о выбросах случайных

процессов, применимые в случаях, когда энергия активации много больше  $kT$ . Что касается плотности распределения длин скачков  $w(l)$ , детали ее поведения, по-видимому, не очень существенны в контексте настоящей работы. Важно, что  $w(l)$  должна достаточно быстро обращаться в нуль при  $l \rightarrow \infty$  не зависит от КИН. В частности, если стационарное состояние трещины обусловлено захватом ее вершины внутренними границами твердого тела, вид  $w(l)$  должен отражать статистику размеров и формы элементов надатомной структуры твердого тела.

Ниже для исследования статистической кинетики роста трещин используется модельная функция

$$w(l) = 1/\langle l \rangle \exp(-1/\langle l \rangle), \quad (2.4)$$

предложенная в [12] и позволяющая провести подробное аналитическое исследование.

## Кинетика роста трещин и условное распределение долговечности

Прежде чем перейти к исследованию задачи (2.1) и вычислению статистических распределений времени жизни тела, необходимо сделать замечания относительно долговечности. Во-первых, здесь рассматривается условная долговечность по отношению к росту изолированной трещины с заданной начальной длиной. Эта величина не является, вообще говоря, непосредственным аналогом экспериментально измеряемой долговечности. Даже в том случае, когда можно пренебречь взаимодействием в ансамбле растущих трещин, необходимо еще построить распределение минимума из множества условных долговечностей. Построение безусловного распределения нуждается в привлечении дополнительных соображений и приведено в следующем разделе.

Во-вторых, определение статистических свойств условной долговечности представляет собой хорошо известную задачу о первом достижении границ марковским случайным процессом. Существенное упрощение связано с тем, что вследствие одномерности задачи и пренебрежении залечиванием — процессом, обратным росту, — вершина трещины пересекает любую заданную границу  $L = L_b$  единственный раз. Поэтому интегральное распределение времени пересечения границы определяется простым соотношением

$$P(t|L_b, L_0) = 1 - \int_{L_0}^{L_b} V(L, t|L_0)dL. \quad (3.1)$$

Важно, что величина  $P(t|L_b, L_0)$  совсем не обязательно равна интегралу от  $V(L, t|L_0)$  в пределах от  $L_b$  до  $\infty$ . Последнее будет иметь место только при сохранении

нормировочного интеграла в задаче (2.1). Проинтегрировав (2.1) в пределах от  $L_0$  до  $L_b$ , имеем с учетом (3.1):

$$\frac{\partial P(t|L_b, L_0)}{\partial t} = \int_{L_0}^{L_b} dL Z(L, \sigma) V(L, t|L_0) \int_{L_b-L}^{\infty} w(l) dl. \quad (3.2)$$

Если предел интеграла в (3.2) при  $L_b \rightarrow \infty$  существует и не равен нулю, то нормировочный интеграл монотонно убывает со временем. Легко видеть, что при  $L_b \rightarrow \infty$  правая часть (3.2) представляет собой поток вероятности на бесконечность, а левая является плотностью распределения времени жизни полубесконечного образца. Таким образом, несохранение нормировочного интеграла означает, что в любой конечный момент времени существует отличная от нуля вероятность обнаружить тело полностью разрушенным. Именно такая ситуация реализуется в рассматриваемой задаче. Это обусловлено быстрым возрастанием функции  $Z(L, \sigma)$  с увеличением  $L$  и пренебрежением в исходной модели временем перемещения вершины трещины между двумя последовательными состояниями в сравнении с временем ожидания скачка. В результате характерное время ухода вершины трещины на бесконечность оказывается конечным. Отметим, что долговечность практически всегда определяется начальной стадией эволюции трещины, так что пренебрежение конечностью скорости роста трещины на быстрой стадии не вносит сколько-нибудь существенной ошибки в распределение долговечности.

Таким образом, в условиях достаточно быстрого возрастания функции  $Z(L, \sigma)$  с длиной трещины плотность распределения условной долговечности можно определить как

$$\varphi_c(t|L_0) = -\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} V(L, t|L_0) dL. \quad (3.3)$$

В модели (2.1), (2.4) при  $\sigma = \text{const}$  нетрудно получить точное выражение для преобразования Лапласа по переменной  $t$  от плотности распределения длин трещины:

$$\begin{aligned} \tilde{V}(L, p|L_0) &= \frac{\delta_+(L - L_0)}{p + Z(L, \sigma)} \\ &+ \frac{Z(L_0, \sigma)}{\langle l \rangle [p + Z(L_0, \sigma)] [p + Z(L, \sigma)]} \\ &\times \exp \left[ -\frac{p}{\langle l \rangle} \int_{L_0}^L \frac{dL'}{p + Z(L', \sigma)} \right]. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Формула (3.4) справедлива для функции  $Z(L, \sigma)$  произвольного вида.

Из сходимости интеграла в (3.4) в пределе

$$L \rightarrow \infty \quad (\text{Re } p > -Z(L_0, \sigma))$$

следует утверждение о несохранении нормировочного интеграла, в чем легко убедиться после подстановки

(3.4) в преобразованное по Лапласу равенство (3.2). Преобразование Лапласа от плотности распределения долговечности есть

$$\tilde{\varphi}(p|L_0) = \frac{Z(L_0, \sigma)}{p + Z(L_0, \sigma)} \exp \left[ -\frac{p}{\langle l \rangle} \int_{L_0}^{\infty} \frac{dL}{p + Z(L, \sigma)} \right], \quad (3.5)$$

откуда для средней долговечности и дисперсии имеем следующие соотношения:

$$\langle t \rangle = Z^{-1}(L_0, \sigma) + \frac{1}{\langle l \rangle} \int_{L_0}^{\infty} \frac{dL}{Z(L, \sigma)}, \quad (3.6)$$

$$\langle \delta t^2 \rangle = Z^{-2}(L_0, \sigma) + \frac{2}{\langle l \rangle} \int_{L_0}^{\infty} \frac{dL}{Z^2(L, \sigma)}. \quad (3.7)$$

В общем случае плотность распределения условной долговечности не может быть получена из (3.5) в явном виде. Если, однако, основной вклад в интеграл в (3.5) вносит малая область вблизи нижнего предела, интеграл можно заменить его асимптотическим разложением. В пределе

$$\partial \ln Z(L, \sigma) / \partial \ln L \gg 1$$

с учетом только главного члена асимптотического разложения по степеням малого параметра  $(\partial \ln Z(L_0, \sigma) / \partial \ln L_0)^{-1}$  из (3.5) следует  $\Gamma$ -распределение:

$$\begin{aligned} \varphi_c(t|L_0) &\cong \frac{Z^{1+\kappa}(L_0, \sigma)}{\Gamma(1+\kappa)} t^{\kappa} \exp[-Z(L_0, \sigma)t], \\ \kappa &= \left( \langle l \rangle \frac{\partial \ln Z(L_0, \sigma)}{\partial L_0} \right)^{-1}. \quad (3.8) \end{aligned}$$

При малых значениях параметра  $\kappa$  распределение (3.8) близко к экспоненциальному, т.е. к распределению времени ожидания первого скачка. Это является следствием резкого снижения активационного барьера элементарного акта роста с увеличением длины трещины и обусловлено быстрым ускорением ее развития.

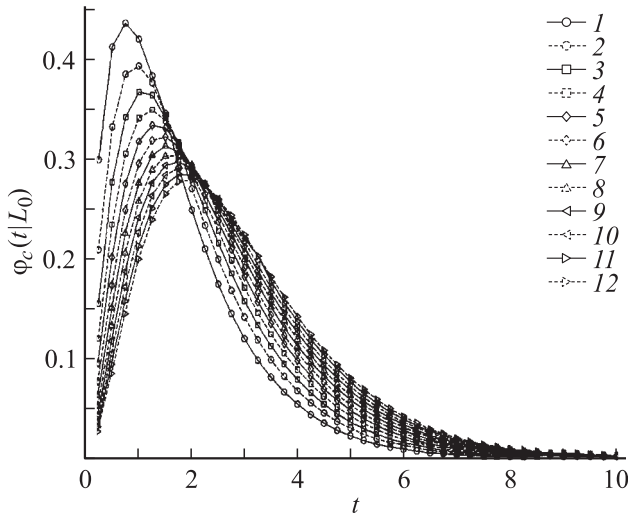
Из (3.6)–(3.8) ясно, что близость распределения (3.8) к экспоненциальному при малых значениях  $\kappa$  имеет место в области наиболее вероятных значений времени жизни тела. Аппроксимация распределения (3.8) экспоненциальным не является равномерно пригодной как при малых, так и при больших значениях долговечности.

Подчеркнем, что величина  $\kappa \equiv \kappa(L_0)$  не обязана быть малой по сравнению с единицей. Для применимости приближенного решения (3.8) необходима лишь малость параметра

$$(\partial \ln Z(L_0, \sigma) / \partial \ln L_0)^{-1},$$

отношение  $L_0 / \langle l \rangle$  может быть большим.

На рис. 1 представлены результаты численного расчета плотности распределения условной долговечности



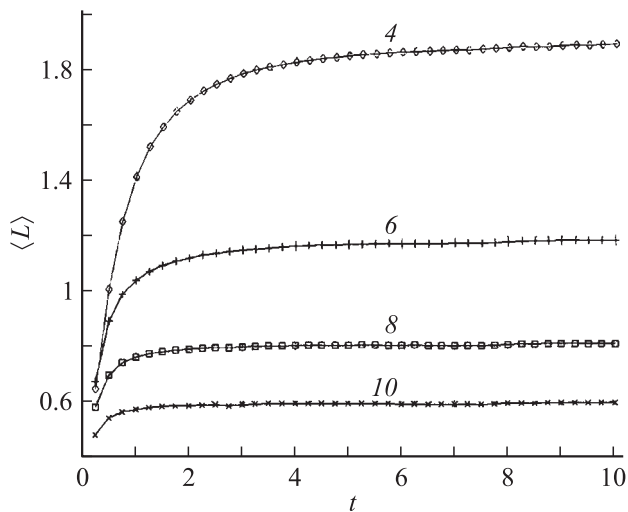
**Рис. 1.** Плотность распределения условных долговечностей  $\varphi_c(t|L_0)$  при  $bK_I(\langle l \rangle, \sigma)/kT = 4$  для тел с начальными трещинами  $L_0/\langle l \rangle = 1-12$  (кривые 1-12 соответственно).

в модели (2.1), (2.2), (2.4) при  $bK_I(\langle l \rangle, \sigma)/kT = 4$  и  $L_0/\langle l \rangle = 1-12$ . Как видно из приведенных графиков, даже в случае, отвечающем значению малого параметра  $\kappa$  порядка единицы, статистика условной долговечности хорошо аппроксимируется  $\Gamma$ -распределением.

Необходимо пояснить, что близость распределения условной долговечности к  $\Gamma$ -распределению при

$$\partial \ln Z(L, \sigma) / \partial \ln L \gg 1$$

не ограничена частным случаем экспоненциального распределения длин скачков (2.4). Такой характер распределения длин условной долговечности имеет место при различных функциях  $w(l)$ , хотя количественные



**Рис. 2.** Условная средняя длина трещины  $\langle L \rangle$  в зависимости от времени  $t$  при  $bK_I(\langle l \rangle, \sigma)/kT = 4, 6, 8, 10$ .

значения параметров при этом могут отличаться весьма существенно [12,13].

Рассмотрим особенности статистики длин трещин. С учетом изложенного выше плотность распределения длин следует вычислять при условии, что образец не разрушен полностью, поэтому условная плотность распределения есть

$$V_c(L, t|L_0) = \frac{V(L, t|L_0)}{1 - P(t|\infty, L_0)}. \quad (3.9)$$

На рис. 2 представлены зависимости от времени средней длины трещины, вычисленной по соотношению (3.9). Следует отметить, что на достаточно больших временах средние длины выходят на стационарное значение. То же имеет место для дисперсий и, на несколько больших временах, для коэффициентов асимметрии. Такое поведение моментов означает, что эволюция в статистическом ансамбле нагруженных образцов сводится, начиная с некоторого времени, к увеличению числа разрушенных элементов. Состояние оставшейся части, число элементов в которой убывает со временем, оказывается стационарным.

При экспоненциальном распределении длин скачков (2.4) предельное стационарное распределение длин трещин (3.9) нетрудно получить в явном виде. Пользуясь известными теоремами об асимптотике преобразования Лапласа, из (3.4) имеем

$$V_e(L, \infty|L_0) = \frac{1}{\langle l \rangle} \frac{Z(L_0, \sigma)}{Z(L, \sigma) - Z(L_0, \sigma)} \times \exp \left[ -\frac{Z(L_0, \sigma)}{\langle l \rangle} \int_L^\infty \frac{dL'}{Z(L', \sigma) - Z(L_0, \sigma)} \right]. \quad (3.10)$$

Хотя выход распределения (3.9) на стационарную асимптотику представляется несколько неожиданным, ясно, что это обусловлено быстрым снижением временного масштаба процесса роста с увеличением длины трещины. При этом оказывается выделенной область длин длительного существования системы. Последняя, как видно из рис. 2 и соотношения (3.10), при  $\partial \ln Z(L, \sigma) / \partial \ln L \gg 1$  невелика в сравнении с длиной исходной трещины, что, по-видимому, отвечает экспериментальной ситуации при испытаниях макроскопически хрупких образцов на длительную прочность.

Асимптотика предельного распределения длин имеет экспоненциальный или степенной характер в зависимости от вида функции  $Z(L, \sigma)$ . Для дальнейшего важно, что асимптотическое поведение распределения длин при  $L \rightarrow \infty$  не связано с видом распределения длин скачков. Нетрудно показать, что соотношение  $V_c \sim Z^{-1}(L, \sigma)$  имеет место для всех моделей (2.1), если функция  $w(l)$  не зависит от КИН.

## Статистика долговечности при статической усталости

Для вычисления распределения долговечности, наблюдаемого в экспериментах по статической усталости, положим, что параметры исходных трещин статистически независимы и трещины характеризуются одним и тем же распределением по размерам  $w_0(L_0)$ . Положим также, что расстояние между отдельными трещинами много больше их характерного размера, а общее число трещин в теле имеет пуассоновское распределение с математическим ожиданием  $N \gg 1$ . Поскольку взаимодействие трещин на начальной стадии несущественно, при вычислении распределения долговечности можно пренебречь упругим взаимодействием и слиянием трещин.

Общая схема вычисления распределения долговечности образца  $\varphi(t)$  состоит в следующем. Вначале из решения эволюционной задачи (2.1) рассчитывается условное распределение (3.3). Затем из набора условных распределений долговечности при заданных размерах и числе трещин строится распределение минимума. Наконец, последнее усредняется по числу и размерам трещин при условии, что в образце есть хотя бы одна трещина. Результат имеет вид

$$\varphi(t) = \frac{N\varphi_1}{1 - e^{-N}} \exp(-N\Phi_1),$$

$$\varphi_1(t) \equiv \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = \int_0^\infty \varphi_c(t|L_0)w_0(L_0)dL_0. \quad (4.1)$$

В пределе  $N \gg 1$  вид  $\varphi(t)$  определяется асимптотикой функции  $\varphi_1(t)$  при малых  $t$ , когда  $N\Phi_1 \lesssim 1$ .

В простейшем случае  $\kappa = 0$  условная долговечность (3.8) подчинена экспоненциальному распределению. Это отвечает ситуации, когда условная долговечность определяется временем первого скачка: последующая быстрая эволюция трещины не вносит существенного вклада в долговечность, поэтому при вычислении интеграла в (3.3) можно использовать грубое приближение

$$V(L, t|L_0) = \delta_+(L - L_0) \exp[-Z(L, \sigma)t]. \quad (4.2)$$

Такой предельно упрощенный подход рассматривался ранее в [14].

При больших  $N$  и достаточно быстро убывающих функциях  $w_0(L_0)$  из (4.1), (4.2) следует соотношение

$$\varphi(t) = N\langle Z \rangle \exp(-N\langle Z \rangle t),$$

$$\langle Z \rangle = \int_0^\infty Z(L_0, \sigma)w_0(L_0)dL_0, \quad (4.3)$$

справедливое, в частности, при условии сходимости интегралов  $\langle Z \rangle$ ,  $\langle Z^2 \rangle$  и  $N \gg \langle Z^2 \rangle / \langle Z \rangle^2$ .

Интегралы  $\langle Z \rangle$  и  $\langle Z^2 \rangle$ , по-видимому, должны сходиться в большинстве ситуаций. В противном случае функция  $\Phi_1(t)$  в (4.1) характеризуется аномально быстрым возрастанием при малых  $t$ , что приводит к неправдоподобно быстрому снижению долговечности с ростом  $N$ , т.е. к аномально сильному масштабному эффекту. Например, для функции  $Z(L, \sigma)$  вида (2.2) при степенной асимптотике плотности распределения начальных размеров трещин  $w_0(L_0)$  масштабный эффект имеет экспоненциальный характер.

Если функция  $Z(L, \sigma)$  задана соотношением (2.2), то средняя долговечность тела  $1/N\langle Z \rangle$  в (4.3) должна иметь вид уравнения долговечности Журкова (1.1), соответственно интеграл в (4.3) должен быть пропорционален  $\exp(\text{const} \cdot \sigma/kT)$ . Это накладывает существенные ограничения на вид функции  $w_0(L_0)$ . Поскольку формула Журкова выполняется для большого числа твердых тел различной структуры, детали поведения  $w_0(L_0)$  не могут быть слишком важны. Причиной общности уравнения долговечности Журкова должны быть общие особенности асимптотики распределения размеров исходных трещин. При неспецифичном виде функции  $w_0(L_0)$  существует, в принципе, две возможности.

Распределение долговечности будет иметь требуемый журковский вид при условии малого изменения функции  $Z(L, \sigma)$  в области наиболее вероятных размеров трещин. Однако выполнение такого условия для реальных материалов представляется совершенно невероятным. Например, для силикатных стекол [5,7] коэффициент вариации размеров исходных трещин должен был бы быть много меньшим  $10^{-2}$ .

Вторая — наиболее вероятная — возможность заключается в резком убывании функции  $w_0(L_0)$  при превышении некоторого предельного значения  $L_*$ . При условии  $b\sqrt{L_0}\sigma/kT \gg 1$  произведение функций  $w_0(L_0)$  и  $Z(L, \sigma)$  будет иметь острый пик в окрестности  $L_*$ , и эта окрестность будет вносить основной вклад в интеграл (4.3). Если изменение коэффициента интенсивности напряжений  $K_I(L_0)$  при этом невелико, т.е. соблюдается условие

$$\frac{bK_I(L_*)\delta L_*}{kTL_*} \ll 1 \quad (4.4)$$

(здесь  $\delta L_*$  — характерная ширина зоны, в которой значение  $w_0(L_0)$  попадает практически до нуля), то зависимость положения пика от температуры и напряжения будет слабой. В предельном случае  $w_0\{L_0 = L_*\} = w_*$ ,  $w_0\{L_0 > L_*\} = 0$  имеем

$$\langle Z \rangle = 2Z_0w_*L_* \left( \frac{bK_{I*}}{kT} \right)^{m-1} \exp \left[ -\frac{E_a - bK_{I*}}{kT} \right], \quad (4.5)$$

где  $K_{I*} = K_I(L_*)$ .

Таким образом, типичные „микроскопические“ черты уравнения (1.1) — линейная зависимость энергии активации от напряжения и аррениусовская температурная

зависимость (отсутствие зависимости эффективного активационного объема от температуры) — вызваны, по-видимому, вполне определенными особенностями статистики дефектов. Необходимыми условиями для этого являются большое число статистически эквивалентных трещин и наличие предельного размера исходных трещин, при превышении которого плотность распределения размеров резко падает.

При степенной зависимости функции  $Z(L, \sigma)$  от КИН (2.3) средняя долговечность имеет вид (1.2) просто в силу пропорциональности КИН внешней нагрузке.

Для более точного, по сравнению с (4.3), рассмотрения масштабного эффекта — зависимости средней по ансамблю долговечности от среднего числа трещин в образце — удобно воспользоваться соотношением

$$\langle t \rangle = \frac{e^{-N}}{1 - e^{-N}} \int_0^{\infty} (e^{-N(\Phi_1(t)-1)} - 1) dt, \quad (4.6)$$

которое следует из уравнения (4.1) без каких-либо дополнительных предположений и позволяет построить асимптотическое разложение при  $N \rightarrow \infty$  для функции  $Z(L, \sigma)$  общего вида. С точностью  $O(1/N^3)$  из (4.6) имеем

$$\langle t \rangle \cong \frac{1}{N\langle Z \rangle} \left( 1 + \frac{\langle Z^2 \rangle}{N\langle Z \rangle^2} \right). \quad (4.7)$$

Из (4.7) следует, что учет членов высшего порядка по степеням  $N^{-1}$  не влечет за собой изменений в зависимости долговечности от температуры и внешней нагрузки. Поправки сводятся к перенормировке постоянного множителя и, в случае экспоненциальной зависимости (1.1), эффективного активационного объема по формуле

$$v_a(N) = v_a(\infty) \left[ 1 - \frac{1}{4w_*L_*N} - O(N^{-2}) \right]. \quad (4.8)$$

Таким образом, изменение размеров образца не оказывает влияния на характер зависимостей (1.1), (1.2).

Распределение долговечности (4.3) и его следствия получены в грубом приближении (4.2) и соответственно не связаны с каким-либо конкретным распределением длин скачков в уравнении (2.1). В этом смысле полученные здесь результаты являются весьма общими.

Более точное по сравнению с (4.3) рассмотрение может быть проведено на основе приближенного выражения (3.8), отвечающего экспоненциальному распределению длин скачков (2.4). При подстановке (3.8) в (4.1) в пределе  $N \gg 1$  имеем

$$\varphi = -\frac{\partial}{\partial t} \exp \left[ -Nt \int_0^{\infty} w_0(L_0) dL_0 \frac{Z^{1+\kappa}(L_0, \sigma) t^\kappa}{(1+\kappa)\Gamma(1+\kappa)} \right]. \quad (4.9)$$

Ясно, что распределение (4.9) может существенно отличаться от экспоненциального при всех значениях долговечности, в том числе и в области наиболее вероятных значений.

Положим, как и при выводе (4.5), что функция  $w_0(L_0)$  финитна, и основной вклад в интеграл в (4.9) вносит малая область вблизи верхнего предела  $L_0 = L_*$ . Тогда соотношение (4.9), как легко убедиться, принимает вид распределения Вейбулла (1.5) с показателем  $n = 1 + \kappa(L_*)$ . Средняя долговечность в этом случае по-прежнему имеет вид (1.1) или (1.2) в зависимости от вида функции  $Z(L, \sigma)$ . Однако при подстановке в (4.9) экспоненциальной функции (2.2) показатель  $n$  оказывается зависящим от температуры и внешней нагрузки. Соответственно в предэкспоненциальном множителе в (1.1) появляется относительно слабая зависимость от этих параметров. Поскольку точность экспериментального определения предэкспоненциального множителя в формуле Журкова (1.1) низка [3], это обстоятельство, по-видимому, не является существенным.

Важное уточнение касается масштабного эффекта в средней долговечности. В отличие от (4.7) теперь  $\langle t \rangle \sim N^{1/n}$ , так что зависимость долговечности от размера образца оказывается более слабой.

Можно заключить, что эмпирические закономерности (1.1), (1.2) правильно воспроизводятся и при более точном по сравнению с приближением (4.2) рассмотрении, если выполнены сформулированные выше условия. Этот вывод относится к частной модели (2.1), (2.4). Однако качественное сходство распределений условной долговечности при различных распределениях длин скачков [12,13] позволяет надеяться на его более или менее общий характер.

Следует особо отметить, что условия, необходимые для воспроизведения эмпирических закономерностей статической усталости, не согласуются с общепринятой теоретической интерпретацией статистических закономерностей прочности. Интерпретация распределения Вейбулла (1.5) основана на гипотезе о степенной асимптотике плотности распределения „опасных“ дефектов по размерам [1,2]. Зависимость же средней долговечности от внешней нагрузки и температуры будет иметь вид (1.1) или (1.2) лишь при наличии предельного размера „опасных“ дефектов, при превышении которого плотность распределения падает чрезвычайно резко.

## Статистика прочности

При рассмотрении статистики прочности в приближении вида (4.2) в условиях нагружения с постоянной скоростью соотношения (4.2), (4.3) остаются в силе с тем лишь отличием, что функция  $Z(L_0, \sigma)$  зависит от времени, и в формулах (4.2), (4.3) содержится интеграл от  $Z(L_0, \sigma)$  по времени. Рассмотрим сначала функцию  $Z(L_0, \sigma)$  экспоненциального вида (2.2). Вычисление распределения прочности  $F(\sigma)$  не представляет труда в

двух предельных случаях. Пусть

$$u = \frac{kT \exp(-E_a/kT)}{v_a E_Y \dot{\epsilon} t_0} \ll 1, \quad (5.1)$$

где  $t_0 = 1/2Z_0 w_* L_* N$ ,  $E_Y$  — модуль Юнга,  $\dot{\epsilon}$  — скорость деформации,  $v_a \cong 0.8b\sqrt{\pi L_*}$  (множитель 0.8 отвечает поверхностной трещине в форме полуэллипса). Тогда распределение прочности есть [14]

$$F(\sigma) \approx 1 - \exp \left[ -u \left( \ln \frac{1}{u} \right)^{m-1} \left( \exp \left( \frac{v_a \sigma}{kT} \right) - 1 \right) \right]. \quad (5.2)$$

Средняя прочность образца имеет вид

$$\langle \sigma \rangle = \frac{E_a}{v_a} + \frac{kT}{v_a} \ln \left[ \frac{v_a E_Y \dot{\epsilon} t_0}{kT} \left( \frac{E_a}{kT} \right)^{m-1} \right]. \quad (5.3)$$

Противоположный предельный случай  $u \gg 1$  приводит к распределению Вейбулла, однако не имеет большого значения. Из количественных оценок следует, что для подавляющего большинства макроскопически хрупких материалов параметр  $u$  мал по сравнению с единицей.

Распределение Вейбулла естественным образом возникает в том случае, когда энергия активации не зависит от внешнего напряжения (или зависит логарифмически), что отвечает степенной зависимости функции  $Z$  от КИН (2.3). В этом случае из (4.1) следует

$$F(\sigma) \approx 1 - \exp(-u_s (\sigma/\sigma_s)^{m+1}),$$

$$u_s = \frac{NZ_0 \sigma_s}{(m+1)E_Y \dot{\epsilon}} \exp\left(-\frac{E_a}{kT}\right), \quad (5.4)$$

где параметр  $\sigma_s$  определяется соотношением

$$\sigma_s = \frac{5}{4\sqrt{\pi}} \langle L_0^{m/2} \rangle^{-1/m} K_S. \quad (5.5)$$

Средняя прочность при этом равна

$$\langle \sigma \rangle = \sigma_s \Gamma \left( \frac{m+2}{m+1} \right) \left[ \frac{(m+1)E_Y \dot{\epsilon}}{NZ_0 \sigma_s} \right]^{1/(m+1)}$$

$$\times \exp \left[ \frac{E_a}{(m+1)kT} \right]. \quad (5.6)$$

Важно, что распределение Вейбулла (5.4) получено из кинетических соображений в предположении о степенной зависимости функции  $Z(L, \sigma)$  от локальных напряжений. Дополнительным условием является существование статистического момента  $\langle L_0^{m/2} \rangle$ .

Параметр  $m$  в уравнении (5.4) может быть весьма большим; экспериментальные данные о скорости роста трещин в некоторых керамических материалах дают значения от 17.7 до 35.0 [8], соответственно плотность распределения начальных размеров трещин  $w_0(L_0)$  должна резко убывать с увеличением  $L_0$ .

Отметим также, что при больших значениях параметра  $m$  зависимость средней прочности от температуры и скорости деформации является слабой. Поэтому часто используемый аргумент в пользу незначительной роли кинетических затруднений — отсутствие заметной зависимости прочности от температуры и скорости деформации — не является достаточно убедительным. Последнее утверждение относится также к зависимости (5.3).

Двойное экспоненциальное распределение (5.2) и распределение Вейбулла (5.4) получены в грубом приближении (4.2). Как и выше, представляет интерес выяснить, в какой мере на этот результат влияет более точное рассмотрение. Здесь мы ограничимся уточнением вида распределения (5.4). Соответствующий анализ для распределения (5.2) требует специального исследования.

Правая часть уравнения (2.1) со степенной функцией  $Z(L, \sigma)$  (2.3) однородна по внешней нагрузке. Поэтому задача о росте трещины при активном нагружении легко приводится к виду, отвечающему постоянной нагрузке. При деформации с постоянной скоростью это достигается заменой

$$t \rightarrow \dot{\epsilon}^m t^{m+1} / (m+1).$$

Такое преобразование дает возможность использовать приближенное решение (3.8) и, как следствие, получить распределение прочности непосредственно из распределения долговечности (4.9).

Интегральное распределение прочности имеет вид

$$F = 1 - \exp \left[ -N \int_0^\infty \frac{w_0(L_0) dL_0}{(1+\kappa)\Gamma(1+\kappa)} \left[ \frac{Z(L_0, \sigma)\sigma}{\dot{\epsilon} E_Y} \right]^{1+\kappa} \right], \quad (5.7)$$

где  $\kappa = 2L_0/m(l)$  (см. (2.3) и (3.8)). Распределение Вейбулла следует из (5.7) при условии, что функция  $w_0(L_0)$  финитна и основной вклад в интеграл вносит малая область вблизи верхнего предела  $L_0 = L_*$ . Напомним, что именно это условие необходимо для получения правильных выражений для средней долговечности в распределениях (4.3) и (4.9).

Показатель степени в распределении Вейбулла, вытекающем из (5.7), равен

$$n = (m+1) \left( 1 + \frac{2L_*}{m(l)} \right) \quad (5.8)$$

и превышает показатель степени в распределении (5.4). Увеличение показателя влечет за собой ослабление масштабного эффекта и зависимости средней прочности от температуры. Однако наиболее важное отличие касается условий, необходимых для появления этих распределений. Если в грубом приближении (4.6) достаточно лишь существования статистического момента  $\langle L_0^{m/2} \rangle$ , то при более точном рассмотрении возникают специфические требования к асимптотическому поведению плотности распределения размеров трещин.



## Заключение

Проведенный теоретический анализ относится к ситуации, когда разрушение имеет квазихрупкий характер и статистические закономерности разрушения определяются кинетическими факторами. При квазихрупком разрушении, в отличие от идеально (микроскопически) хрупкого, часто наблюдается как статическая усталость, так и характерные для твердых тел с низкой пластичностью особенности статистики прочности.

Полученные результаты позволяют высказать ряд соображений о природе статистических закономерностей квазихрупкого разрушения. Во-первых, часто наблюдаемые в экспериментах статистические свойства прочности и долговечности обусловлены, вероятно, качественным сходством в асимптотическом поведении статистики тепловых флуктуаций и структурных дефектов: экспоненциальным распределением времени ожидания сильных тепловых флуктуаций, большим количеством статистически равноценных опасных дефектов в образце и резким снижением вероятности существования дефектов с размерами, превышающими некоторый предельный. Во-вторых, общепринятая теоретическая интерпретация статистики Вейбулла, по-видимому, нуждается в пересмотре: предположение о степенной асимптотике распределения размеров трещиноподобных дефектов не согласуется с эмпирическими данными по статической усталости. С другой стороны, распределение Вейбулла и близкое к нему двойное экспоненциальное распределение естественным образом появляются в рамках кинетических представлений, т. е. в ситуации, когда измеряемая прочность определяется кинетикой разрушения вдали от границы термодинамической устойчивости нагруженного твердого тела. В-третьих, сильная (аррениусовская) температурная зависимость долговечности сопряжена со сравнительно слабой зависимостью прочности от температуры и скорости деформации. Поэтому отсутствие заметного изменения прочности с температурой и скоростью деформации само по себе не является достаточно убедительным свидетельством незначительной роли кинетических затруднений.

Таким образом, имеются веские основания полагать, что наблюдаемые статистические закономерности квазихрупкого разрушения имеют кинетическое происхождение.

## Список литературы

- [1] *Фрейденталь А.М.* // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 616–645.
- [2] *Витвицкий П.М., Попина С.Ю.* Прочность и критерии хрупкого разрушения стохастически дефектных тел. Киев: Наук. думка, 1980. 183 с.
- [3] *Регель В.Р., Слуцкер А.И., Томашевский Э.Е.* Кинетическая природа прочности твердых тел. М.: Наука, 1974. 560 с.
- [4] *Петров В.А., Башкарев А.Я., Веттегрень В.И.* Физические основы прогнозирования долговечности конструкционных материалов. СПб: Политехника, 1993. 475 с.
- [5] *Томсон Р.* Атомистика разрушения. М.: Мир, 1985. С. 104–144.
- [6] *Дайнис Г., Пэскин А.* Там же. С. 177–212.
- [7] *Бартенев Г.М.* Сверхпрочные и высокопрочные неорганические стекла. М.: Стройиздат, 1974. 240 с.
- [8] *Баринов С.М., Шевченко В.Я.* Прочность технической керамики. М.: Наука, 1996. 159 с.
- [9] *Берштейн В.А.* Механогидролитические процессы и прочность твердых тел. Л.: Наука, 1987. 317 с.
- [10] *Черепанов Г.П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974. 640 с.
- [11] *Малкин А.И.* // ДАН. 1995. Т. 343. № 1. С. 38–42.
- [12] *Malkin A.* // Probamat 21<sup>st</sup> century: Probability and Materials / Ed. by G.N. Frantziskonis. Dordrecht–Boston–London: Kluwer Acad. Publ., 1998. P. 161–196.
- [13] *Малкин А.И., Дячкин А.А., Никитин Н.В.* // ДАН. 1997. Т. 354. С. 327–330.
- [14] *Malkin A., Shumikhin T.* // Int. J. of Fract. 2004. Vol. 128. P. 277–283.