Краткие сообщения

01

Динамика системы двух связанных неидентичных генераторов Кислова–Дмитриева

© А.П. Кузнецов, В.И. Паксютов

Институт радиотехники и электроники РАН, Саратовский филиал,
410019 Саратов, Россия
e-mail: alkuz@sgu.ru

(Поступило в Редакцию 2 февраля 2007 г.)

Рассмотрена система, состоящая из двух связанных геенраторов Кислова–Дмитриева. Изучено устройство плоскости параметров, управляющих бифуркациями удвоения периода в подсистемах, в зависимости от величины параметра связи. При существенно неидентичных значениях управляющих параметров подсистем продемонстрировано появление сценария перехода к хаосу через разрушение квазипериодического режима.

PACS: 02.60.Cb, 02.30.Oz, 05.45.Xt

Динамика связанных нелинейных систем, искусственно сконструированных и физически реализуемых, исследована в большом количестве работ. Определенное место среди них занимают работы, в которых исследуются связанные осцилляторы третьего порядка либо отображения, которые могут демонстрировать переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода при изменении некоторого управляющего параметра [1–7]. На сегодняшний день наиболее полно изучена динамика таких систем с идентичными по значению параметров подсистемами. Для них определены возможные режимы динамики и сценарии перехода к хаосу. В монографиях [1,2] и ряде других работ исследованы бифуркации симметричных систем связанных отображений, а в работах Мозекильде и др. [5,6] получен ряд результатов, справедливых как для произвольных систем связанных отображений, так и для произвольных симметричных систем связанных осцилляторов. В работах [7–9] на примере связанных осцилляторов Ван-дер-Поля и Ресслера ставится задача изучения устройства плоскостей параметров, отвечающих за бифуркации Андронова–Хопфа в удвоения периода в подсистемах.

В настоящей работе обсудим динамику двух связанных генераторов Кислова–Дмитриева в зависимости от параметров генераторов, управляющих бифуркациями Андронова–Хопфа, и удвоения периода. Будет рассмотрен случай существенно неидентичных подсистем и проведен анализ устройства плоскости параметров.

Физическая система, предложенная В.Я. Кисловым и А.С. Дмитриевым, представляет собой замкнутую в кольцо цепочку из нелиейного усилителя, RLC-фильтра и инерционного элемента, рис. 1 [10,11]. Эта система с запаздывающей обратной связью может демонстрировать режим хаотических автоколебаний.

Если предположить, что нелинейная характеристика усилителя имеет вид $F(z) = mz\exp(-z^2)$, то можно получить следующую систему уравнений, описывающую динамику автономного кольцевого генератора Кислова–Дмитриева [10,11]:

$$T\frac{dx}{dt} + x = mz\exp(-z^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = x - z,$$

$$\frac{dz}{dt} = y - \frac{z}{Q}, \tag{1}$$

где x — сигнал на выходе инерционного элемента, z — на входе усилителя, T — время релаксации инерционного элемента, Q — добротность RLC-фильтра, m — коэффициент усиления.

Система (1) является инвариантной относительно замены $(x, y, z) \to (-x, -y, -z)$, поскольку выбрана симметричная характеристика усилителя. Соответственно аттрактор системы должен быть также симметричным относительно начала координат в фазовом пространстве, либо должны существовать два аттрактора, являющихся симметричным отражением друг друга.

Система (1) в автономном режиме демонстрирует переход к хаосу через удвоение периода. В этом можно убедиться, если построить численно бифуркационное дерево, дающее зависимость от параметра m значений

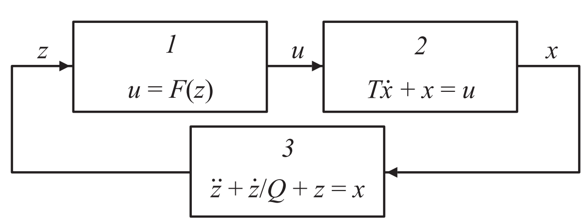

Рис. 1. Схема кольцевого генератора Дмитриева–Кислова: *1* — нелинейный усилитель, *2* — линейный элемент 1-го порядка, *3* — линейный фильтр 2-го порядка.

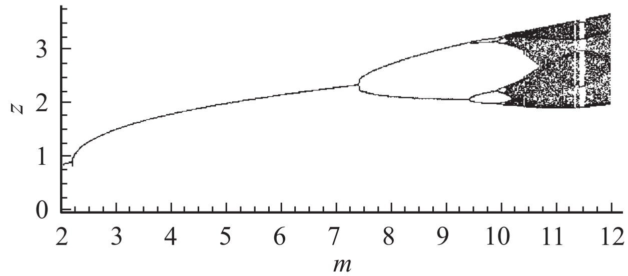

Рис. 2. Бифуркационное дерево автономного кольцевого генератора Кислова–Дмитриева.

переменной z, отвечающих пересечению фазовой траектории с некоторой выбранной секущей плоскостью Пуанкаре в фазовом пространстве. На рис. 2 показано такое дерево для одного из симметричных аттракторов системы. При построении бифуркационного дерева использовалось сечение Пуанкаре $y = 0$. Хорошо видны удвоения периода и переход к хаосу. Таким образом, в качестве параметра, управляющего удвоениями периода, можно использовать коэффициент усиления m.

Обратимся теперь к исследованию плоскости управляющих параметров системы, состоящей из двух генераторов Кислова–Дмитриева и описываемой следующими уравнениями:

$$T\frac{dx_1}{dt} = -x_1 + m_1 z_1 \exp(-z_1^2),$$

$$T\frac{dx_2}{dt} = -x_2 + m_2 z_2 \exp(-z_2^2),$$

$$\frac{dy_1}{dt} = x_1 - z_1 + \mu(y_2 - y_1),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = x_2 - z_2 + \mu(y_1 - y_2),$$

$$\frac{dz_1}{dt} = y_1 - z_1/Q, \qquad \frac{dz_2}{dt} = y_2 - z_2/Q. \qquad (2)$$

В качестве управляющих выберем параметры m_1 и m_2, которые имеют физическое значение коэффициентов усиления каждого из генераторов. Безразмерные время релаксации T и добротность Q будем полагать постоянными. Слагаемые, ответственные за связь и пропорциональные μ, добавлены во вторые уравнения подсистем.

Для проведения численного исследования поведения системы в различных областях плоскости управляющих параметров был применен метод карт динамических режимов [11], на которых черным цветом и оттенками серого обозначены определяемые в результате компьютерного эксперимента различные периоды установившегося режима колебаний. Белый цвет соответствует хаотическому либо квазипериодическому поведению системы.

Периоды циклов при построении карт динамических режимов определялись численно с использованием метода сечений Пуанкаре. Для этого после достаточно длительного переходного процесса, когда можно считать фазовую траекторию вышедшей на предельный цикл, определялись точки ее пересечения с секущей плоскостью. Но при этом рассматривались только траектории,

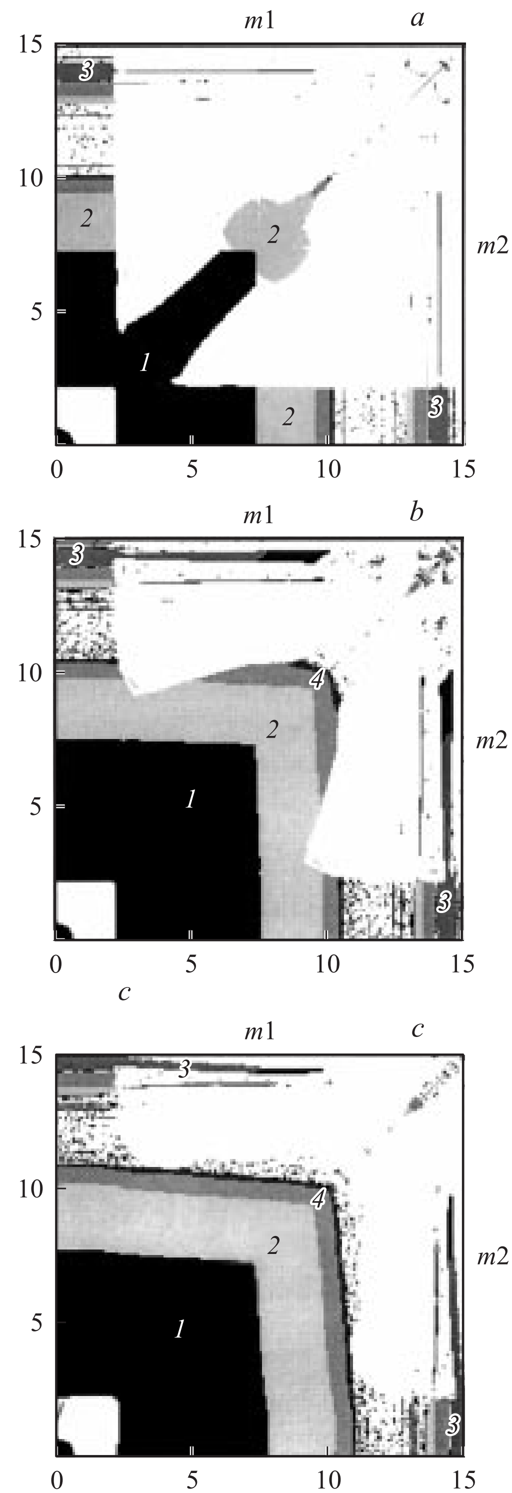

Рис. 3. Плоскость управляющих параметров двух связанных осцилляторов Кислова–Дмитриева. Цифрами обозначены периоды некоторых основых областей. Значения параметров: $T = 5$, $Q = 10$; a — $\mu = 0.01$, b — 0.005, c — 0.001.

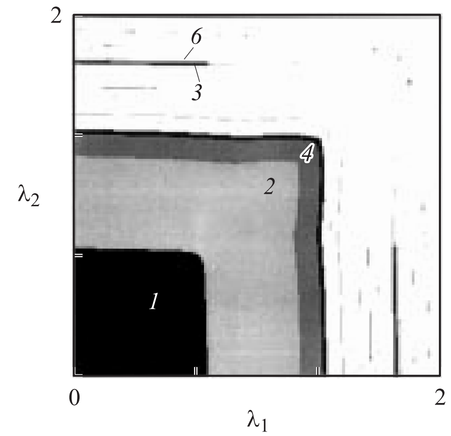

Рис. 4. Карта динамических режимов системы двух связанных логистических отображений (3) для значения коэффициента связи отображений $\varepsilon = 0.03$.

„протыкающие“ сечение Пуанкаре в одном направлении. Количество точек пересечения с секущей плоскостью принималось за период предельного цикла. В качестве сечения Пуанкаре при анализе системы (2) была выбрана плоскость, заданная соотношением $y_1 + y_2 = 0$.

На рис. 3 представлены три карты динамических режимов, построенные на плоскости (m_1, m_2) управляющих параметров системы (2) для различных уменьшающихся значений параметра связи.

При больших значениях параметра связи, как видно из рис. 3, a, увеличивая либо коэффициенты усиления каждого из генераторов, либо оба низних одновременно, можно наблюдать каскад бифуркаций удвоения периода, завершающийся переходом к хаосу. Границей хаотической области в этом случае служит непрерывная критическая фейгенбаумовская линия. Устройство плоскости

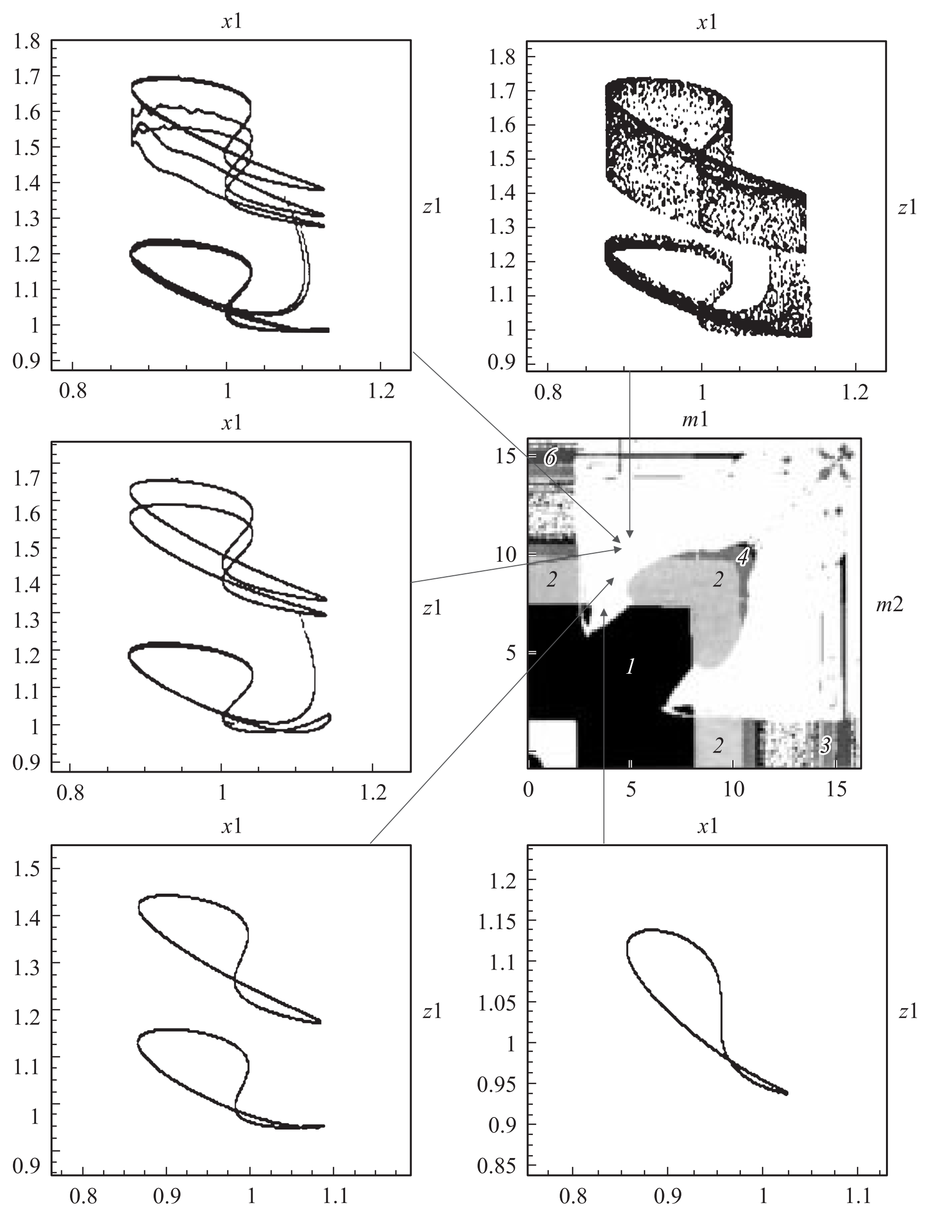

Рис. 5. Карта динамических режимов и инвариантные кривые системы (2). Значения параметров $T = 5$, $Q = 10$.

параметров, ответственных за удвоения, в этом случае оказывается аналогичным случаю простных связанных дискретных отображений.

Чтобы убедиться в этом, на рис. 4 показана найденная численно карта режимов для связанных отображений в виде

$$x_{n+1} = 1 - \lambda_1 x_n^2 + \varepsilon(y_n - x_n),$$
$$y_{n+1} = 1 - \lambda_2 y_n^2 + \varepsilon(x_n - y_n). \quad (3)$$

Карта построена на плоскости параметров (λ_1, λ_2), отвечающих за удвоения периода каждого отдельного отображения.

Однако при уменьшении коэффициента связи на рис. $3, b, c$ можно видеть появление областей непериодических режимов (белый цвет), „вторгающихся" внутрь областей удвоений тем сильнее, чем меньше коэффициент связи. В этом случае область периодических режимов (синхронизации) оказывается состоящей из трех „ветвей", разделенных двумя „полуостровами" непериодических режимов (рис. $3, b, c$). Ясно, что в этом случае фейгенбаумовская линия перестает быть непрерывной и оказывается состоящей из отдельных отрезков.

Точки на картах динамических режимов (рис. 3), в которых имеют место квазипериодическое и хаотическое поведение, обозначаются одинаково белым цветом, поскольку метод карт динамических режимов не позволяет различать эти режимы. Для того чтобы выяснить их характер, карту следует дополнить фазовыми портретами в характерных точках (рис. 5).

Как можно видеть из рис. 5, при малых значениях управляющих параметров аттрактор в сечении Пуанкаре представляет собой замкнутую инвариантную кривую (тор), что отвечает квазипериодическому режиму колебаний. При движении по карте в сторону увеличения параметров инвариантная кривая раздваивается — сначала на две линии, затем на четыре и так далее. Таким образом, имеют место бифуркации удвоения инвариантной кривой (тора). После превышения управляющими параметрами некоторого критического значения инвариантная кривая начинает разрушаться, и точки траектории, лежащие в сечении Пуанкаре, полностью заполняют ограниченную область на секущей плоскости. Это свидетельствует о возникновении хаотической динамики. Таким образом, можно говорить о реализации в системах связанных генераторов Кислова–Дмитриева сценария перехода к хаосу через разрушение квазипериодического поведения при существенно несимметричных по значению управляющего параметра подсистемах. Следует отметить, что похожие особенности динамики демонстрируют связанные системы Рёсслера [9], что свидетельствует об общности полученных результатов для дифференциальных систем с удвоениями периода. В то же время важным является представление примера, допускающего физическую реализацию.

Таким образом, в настоящей работе исследована система, состоящая из двух генераторов Кислова–Дмитриева. Продемонстрировано, что устройство плоскости параметров, отвечающих за удвоение периода в подсистемах, при возрастании коэффициента связи стновится аналогичным устройству плоскости параметров связанных логистических отображений. При уменьшении параметра связи в область периодических режимов „вторгаются" два острова квазипериодических режимов, появление которых не имеет аналога в дискретных моделях, и обусловлено существованием предельных циклов в автономных дифференциальных системах. Фейгенбаумовские критические линии в этом случае заканчиваются на границах квазипериодической динамики. В исследуемой системе возможны бифуркация удвоения торов и разрушение инвариантной кривой.

Работа поддержана грантом РФФИ 06-02-16773.

Список литературы

[1] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Саратов. Изд-во Саратовского ун-та, 1999.

[2] *Mosekilde E., Maistrenko Y., Postnov D.* // World Scientific Series on Nonlinear Science. 2002. Series A. Vol. 42. 440 p.

[3] *Yuna J.-M., Tung M., Feng D.H., and Narducci L.M.* // Phys. Rev. A. 1983. Vol. 28. N 3. P. 1662.

[4] *Кузнецов А.П., Седова Ю.В., Сатаев И.Р.* // Изв. вузов. ПНД. 2004. Т. 12. № 5.

[5] *Reike C., Mosekilde E.* // Phys. Rev. E52. 1995. P. 1418.

[6] *Rasmussen J., Mosekilde E., Reick C.* // Mathematics and Computers in Simulation. 1996. Vol. 40. P. 247–270.

[7] *Иванченко М.В., Осипов Г.А., Шалфеев В.Д.* // Тр. 6-й науч. конф. по радиофизике / Под ред. А.В. Якимова. Н. Новгород, 2002. С. 114–115.

[8] *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* // Изв. Вузов. ПНД. 2005. Т. 13. № 4.

[9] *Кузнецов А.П., Паксютов В.И.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. Вып. 7. С. 54–60.

[10] *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.

[11] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с;