

01;04;05

Плазма в слое металла во внешнем высокочастотном электрическом поле

© А.В. Латышев, А.А. Юшканов

Московский государственный областной университет,
105005 Москва, Россия
e-mail: yushkanov@inbox.ru, avlatyshev@mail.ru

(Поступило в Редакцию 28 марта 2007 г.)

Исследован отклик электронов в слое металла (пластине) на внешнее переменное перпендикулярное поверхности электрическое поле в резонансном случае — когда частота внешнего поля близка к частоте плазменных колебаний. Вычислена величина поглощения энергии электромагнитного поля в слое.

PACS: 52.35.-g, 52.20.-j, 52.25.-b

Введение

Задача о поведении плазмы во внешнем переменном поперечном (расположенном перпендикулярно поверхности) электрическом поле впервые была решена Ландау [1] для случая бесстолкновительной плазмы в полупространстве и зеркальных граничных условий. Более общий случай граничных условий был рассмотрен в [2,3]. При этом вопрос о поведении плазмы в ограниченном объеме (в слое металла) в переменном внешнем поле не рассматривался.

В работе [4] была рассмотрена в общем виде задача об отклике электронного газа в тонком слое металла. Решение задачи было представлено в виде разложений функции распределения электронов и электрического поля по собственным функциям соответствующей характеристической системы. Разложения представляют собой сумму линейной комбинации двух дискретных решений и интеграла по непрерывному спектру. Дискретные решения оказываются известными решениями Друде и Дебая. Исследование полученных результатов в [4] не проводилось в виду сложного характера решения. В работе [5] было проведено изучение нулей дисперсионной функции, что равносильно вопросу об изучении существования плазменных мод в зависимости от частоты столкновений электронов, частоты внешнего поля и плазменной (ленгмюровской) частоты.

В настоящей работе результаты из [4] доведены „до числа“ в случае, когда частота ω колебаний внешнего электрического поля $E_0 \exp(-i\omega t)$ близка к частоте собственных плазменных колебаний ω_p (вблизи резонанса). Оказалось, что именно в этом случае возможно провести детальный анализ результатов. Квадрат модуля нуля дисперсионной функции вблизи резонанса много больше единицы (ноль „убегает“ в бесконечность). Это обстоятельство лежит в основе проводимого ниже анализа. В работе проведено изучение колебательного характера электрического поля, существования кнудсеновских слов, примыкающих к границам слоя, вклада в величину поля мод Друде и Дебая (отвечающих дискретному

спектру задачи), а также волн Ван Кампена (отвечающих непрерывному спектру). Кроме того, аналитически найдена и исследована величина поглощения энергии в слое металла.

Задача о поведении электронной плазмы в тонком слое металла возникает при рассмотрении вопроса о взаимодействии электромагнитного излучения с аэрозолем, состоящим из плоских частиц. Подобная задача возникает при рассмотрении вопроса о распространении длинноволновых поверхностных плазмонов [6,7], а также других проблем микроэлектроники, поскольку рассматриваемые толщины пленок металла становятся субмикронными. В таких условиях обычное макроскопическое описание отклика электронной плазмы металла на переменное (периодическое) электрическое поле становится неадекватным [7]. Становится необходимым подробное кинетическое описание процессов, происходящих в плазме под действием внешнего электрического поля.

Постановка задачи и основные уравнения

Пластину будем считать тонкой в том смысле, что ее поперечный размер много меньше характерного продольного. При выполнении этого условия пластину можно считать бесконечной. Задача формулируется следующим образом. Имеется бесконечная металлическая пластина толщиной $2a_0$. Перпендикулярно к ее поверхности приложено внешнее переменное электрическое поле $E_0 \exp(-i\omega t)$. Требуется найти отклик электронов в металле на это поле, поведение электрического поля внутри слоя, а также поглощаемую мощность.

Введем декартову систему координат с центром в середине слоя металла. Ось x направим перпендикулярно поверхности слоя. Внешнее электрическое поле будем считать достаточно слабым, чтобы было применимым линейное приближение [8]. Функцию распределения $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)$ будем искать в виде $f = f_0 + f_1$, где f_0 —

функция распределения Ферми, а

$$f_1 = \exp(-i\omega t)\delta(\varepsilon_F - \varepsilon)\psi(x, \mu), \quad \mu = v_x/v_F.$$

Здесь $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака, ε — кинетическая энергия электрона, ε_F — кинетическая энергия Ферми, v_x — компонента скорости электрона вдоль оси x , v_F — скорость Ферми.

Поле внутри слоя металла $E_V(x, t)$ представим в виде

$$E_V(x, t) = \exp(-i\omega t)E(x).$$

Тогда система уравнений Власова–Максвелла принимает следующий вид (см. [4,8]):

$$(v - i\omega)\psi(x, \mu) + \mu v_F \frac{\partial \psi}{\partial x} = e_0 \mu v_F E(x) + \frac{v}{2} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad (1)$$

$$\frac{dE(x)}{dx} = \frac{2e_0 v_F m^2}{\pi \hbar^3} \int_{-1}^1 \psi(x, \mu') d\mu', \quad |x| < a_0, \quad |\mu| < 1. \quad (2)$$

Здесь v — частота рассеяния электронов, m — эффективная масса электрона, e_0 — его заряд.

В уравнениях (1) и (2) с учетом равенства $v_F = (3\pi^2 n)^{1/3} \hbar m^{-1}$ перейдем к безразмерным параметрам:

$$x' = \frac{x}{a_0}, \quad y_0 = \frac{a_0 \omega}{v_F}, \quad x_0 = \frac{a_0 v}{v_F},$$

$$\psi(x, \mu) = \frac{h(x, \mu)}{e_0 E_0 a_0}, \quad e(x) = \frac{E(x)}{E_0}.$$

Получаем следующую систему уравнений

$$\mu \frac{\partial h}{\partial x'} + z_0 h(x', \mu) = \mu e(x') + \frac{x_0}{2} \int_{-1}^1 h(x', \mu') d\mu', \quad (3)$$

$$\frac{de(x')}{dx'} = \frac{x^2}{2} \int_{-1}^1 h(x', \mu') d\mu', \quad |x'| < 1, \quad |\mu| < 1. \quad (4)$$

Здесь

$$x^2 = 3 \left(\frac{a_0 \omega_p}{v_F} \right)^2 = 3 \left(\frac{x_0 \omega_p}{v} \right)^2 = 3 \left(\frac{y_0 \omega_p}{\omega} \right)^2 = \frac{9a_0^2}{r_D^2},$$

$$\omega_p^2 = \frac{4\pi e_0^2 n}{m}, \quad z_0 = x_0 - iy_0, \quad r_D^2 = \frac{3v_F^2}{\omega_p^2},$$

r_D — радиус Дебая [2].

Физический смысл последнего состоит в том, что он определяет глубину проникновения статического электрического поля в металл. В дальнейшем штрих у координаты x' будем опускать.

Рассмотрим случай, когда электроны рассеиваются на поверхности металла чисто зеркально. Тогда граничные условия на поверхности для функции $h(x, \mu)$ принимают следующий вид:

$$h(-1, \mu) = h(-1, -\mu), \quad h(1, \mu) = h(1, -\mu), \quad \mu \in (-1, 1). \quad (5)$$

Граничные условия для функции $e(x)$ по ее определению имеют следующий вид:

$$e(-1) = 1, \quad e(1) = 1. \quad (6)$$

Собственные функции и собственные значения характеристической системы

Частные решения системы (3), (4) будем искать в виде

$$h_\eta(x, \mu) = \Phi_1(\eta, \mu) \operatorname{sh} \frac{z_0 x}{\eta} + \Phi_2(\eta, \mu) \operatorname{ch} \frac{z_0 x}{\eta}, \quad (7)$$

$$e_\eta(x) = E(\eta) \operatorname{ch} \frac{z_0 x}{\eta}. \quad (8)$$

Здесь η — спектральный параметр, или параметр разделения, вообще говоря, комплексный, а $\Phi_1(\eta, \mu)$, $\Phi_2(\eta, \mu)$ и $E(\eta)$ — новые неизвестные функции.

После подстановки (7) и (8) в исходную систему уравнений получим следующую характеристическую систему уравнений:

$$z_0 \frac{\mu}{\eta} \Phi_1(\eta, \mu) + z_0 \Phi_2(\eta, \mu) = \mu E(\eta) + \frac{x_0}{2} n_1(\eta),$$

$$n_j(\eta) = \int_{-1}^1 \Phi_j(\eta, \mu') d\mu',$$

$$z_0 \frac{\mu}{\eta} \Phi_2(\eta, \mu) + z_0 \Phi_1(\eta, \mu) = \frac{x_0}{2} n_1(\eta),$$

$$\frac{z_0}{\eta} E(\eta) = \frac{x^2}{2} n_1(\eta), \quad n_2(\eta) = 0.$$

Введем следующие обозначения:

$$a = \frac{x_0}{x}, \quad c = \frac{z_0}{x} = \frac{x_0 - iy_0}{x} = a - ib,$$

$$b = \frac{y_0}{x}, \quad ac = \frac{x_0 z_0}{x^2}.$$

Решение характеристической системы уравнений будем искать в классе [9] обобщенных функций при $\eta \in \sigma_c = (-1, 1)$, σ_c — непрерывный спектр задачи. Полагая $E(\eta) \equiv 1$ (что возможно в силу однородности исходной системы), получим:

$$z_0 \Phi_1(\eta, \mu) = P \frac{\eta(\mu^2 - ac)}{\mu^2 - \eta^2} + \Lambda(\eta) [\delta(\mu + \eta) + \delta(\mu - \eta)],$$

$$z_0 \Phi_2(\eta, \mu) = -P \frac{\mu(\eta^2 - ac)}{\mu^2 - \eta^2} + \Lambda(\eta) [\delta(\mu + \eta) - \delta(\mu - \eta)].$$

Здесь символ Px^{-1} означает главное значение интеграла от x^{-1} , $\Lambda(\eta) = \lambda(\eta)/\eta$, $\lambda(z)$ — дисперсионная функция,

$$\begin{aligned} \lambda(z) &= c^2 + \frac{z^2}{2} \int_{-1}^1 \frac{ac - \mu^2}{\mu^2 - z^2} d\mu \\ &= c^2 - z^2 - (z^2 - ac) \frac{z}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\tau - z}, \end{aligned}$$

или $\lambda(z) = c^2 - ac - (z^2 - ac)\lambda_0(z)$, где $\lambda_0(z)$ — дисперсионная функция Кейза [10],

$$\lambda_0(z) = 1 + \frac{z}{2} \int_{-1}^1 \frac{d\tau}{\tau - z} = 1 + \frac{z}{2} \ln \frac{1-z}{1+z}.$$

Для граничных значений дисперсионной функции сверху и снизу в точках разреза $(-1, 1)$ справедливы формулы Сохоцкого:

$$\lambda^\pm(\mu) = \lambda(\mu) \pm i \frac{\pi}{2} \mu(ac - \mu^2), \quad \mu \in (-1, 1).$$

Дискретный спектр σ_d образуют нули дисперсионного уравнения $\Lambda(z) = 0$. В [8] показано, что на полуплоскости (ε, γ) , где $\varepsilon = v/\omega_p > 0$, $\gamma = \omega/\omega_p - 1 > -1$, существует кривая L (рис. 1), разделяющая области D^+ и D^- , такие, что если $(\varepsilon, \gamma) \in D^+$, то дисперсионная функция $\lambda(z)$ имеет два нуля $\pm\eta_0$, лежащие вне разреза $[-1, 1]$; если $(\varepsilon, \gamma) \in D^-$, то дисперсионная функция нулей не имеет. Кривая L определяется параметрическими уравнениями:

$$\begin{aligned} L: \varepsilon &= \frac{\sqrt{3}\pi\mu^2}{2p(\mu)\sqrt{-\lambda_0(\mu)}}, \\ \gamma &= -1 + \frac{\sqrt{3}\mu[\lambda_0(\mu) + \lambda_0^2(\mu) + s^2(\mu)]}{p(\mu) - \sqrt{-\lambda_0(\mu)}}, \end{aligned}$$

где

$$p(\mu) = \sqrt{(1 + \lambda_0(\mu))^2 + s^2(\mu)}, \quad s(\mu) = \frac{\pi}{2} \mu,$$

$$\lambda_0(\mu) = 1 + \frac{\mu}{2} \ln \frac{1-\mu}{1+\mu}.$$

Таким образом, если $(\varepsilon, \gamma) \in D^-$, то $\sigma_d = \{\infty\}$, а если $(\varepsilon, \gamma) \in D^+$, то $\sigma_d = \{\infty, \pm\eta_0\}$. Нулям дискретного спектра отвечают следующие частные (дискретные) решения исходной системы уравнений (3), (4):

$$h_\infty(x, \mu) = \frac{\mu}{z_0}, \quad e_\infty(x) = 1,$$

$$h_{\eta_0}(x, \mu) = \Phi_1(\eta_0, \mu) \operatorname{sh} \frac{z_0 x}{\eta_0} + \Phi_2(\eta_0, \mu) \operatorname{ch} \frac{z_0 x}{\eta_0},$$

$$e_{\eta_0}(x) = \operatorname{ch} \frac{z_0 x}{\eta_0},$$

$$\Phi_1(\eta_0, \mu) = \frac{\eta_0(\mu^2 - ac)}{z_0(\mu^2 - \eta_0^2)}, \quad \Phi_2(\eta_0, \mu) = -\frac{\mu(\eta^2 - ac)}{z_0(\mu^2 - \eta_0^2)}.$$

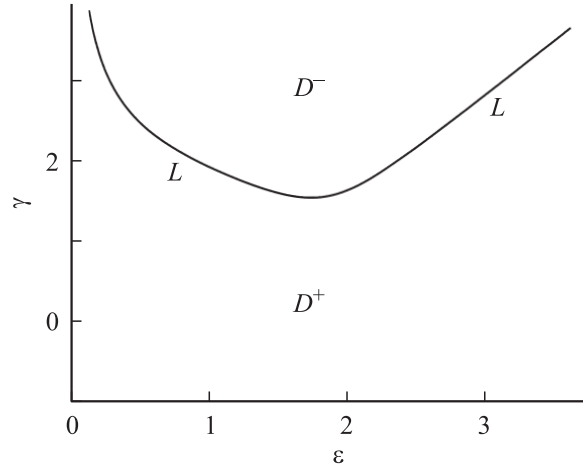


Рис. 1.

Отметим, что мода, отвечающая дискретному значению спектра $\eta = \eta_0$ (плазменная мода), в статическом пределе $c \rightarrow a$ дает „экранирующее“ решение:

$$h_{\pm a}(x, \mu) = \frac{e_0}{\varkappa} \operatorname{sh}(\pm \varkappa x), \quad e_{\pm a}(x) = e_0 \operatorname{sh}(\pm \varkappa x).$$

В самом деле, в случае $c = a$ дисперсионное уравнение имеет вид $\Lambda(z) \equiv -(z^2 - a^2) \frac{\lambda(z)}{z} = 0$, откуда $\eta_0^2 = a^2$, $\eta_0 = \pm a$.

1. Аналитическое решение задачи

В [4,8] было показано, что если $(\varepsilon, \gamma) \in D^+$, то решение задачи (3)–(6) дается разложениями по собственным функциям характеристической системы уравнений

$$\begin{aligned} h(x, \mu) &= A_\infty h_\infty(x, \mu) + A_0 h_{\eta_0}(x, \mu) \\ &+ \int_{-1}^1 A(\eta) h_\eta(x, \mu) d\eta, \end{aligned} \quad (9)$$

$$e(x) = A_\infty + A_0 \operatorname{ch} \frac{z_0 x}{\eta_0} + \int_{-1}^1 A(\eta) \operatorname{ch} \frac{z_0 x}{\eta} d\eta. \quad (10)$$

В разложениях (9) и (10) A_∞, A_0 — неизвестные постоянные (коэффициенты дискретного спектра) и $A(\eta)$ — неизвестная функция (коэффициент непрерывного спектра). В [8] показано, что

$$A_\infty = \frac{\lambda_1}{\lambda_\infty}, \quad \lambda_1 = \lambda(\eta_1) = c^2 - ac,$$

$$\lambda_\infty = \lambda(\infty) = c^2 - ac + \frac{1}{3},$$

$$A_0 = -\frac{2\lambda_1\eta_0}{(\eta_0^2 - ac)\lambda'(\eta_0) \operatorname{ch}(z_0/\eta_0)},$$

$$A(\eta) = \frac{\lambda_1\eta^2}{2\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta) \operatorname{ch}(z_0/\eta)}.$$

При доказательстве разложений решения исходной граничной задачи в [8] фактически было построено электрическое поле в слое металла

$$e(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda_\infty} + \frac{2\lambda_1\eta_0 \operatorname{ch}(z_0x/\eta_0)}{(ac - \eta_0^2)\lambda'(\eta_0) \operatorname{ch}(z_0/\eta_0)} + \frac{\lambda_1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\eta^2 \operatorname{ch}(z_0x/\eta)}{\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta) \operatorname{ch}(z_0/\eta)} d\eta. \quad (11)$$

Производная дисперсионной функции в точке η_0 может быть вычислена по формуле

$$\lambda'(\eta_0) = \frac{1}{2z_0ac} \int_{-1}^1 \frac{\mu(ac - 2\mu\eta_0 + \eta_0^2)}{(\mu - \eta_0)^2} d\mu.$$

В формуле (11) интеграл можно вычислить аналитически. Заметим, что функция $\operatorname{ch}(z_0/\eta)$ имеет счетное множество нулей в точках

$$\eta_k^* = -\frac{2z_0i}{\pi(2k+1)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

Сначала рассмотрим интеграл

$$J(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\eta^2 \operatorname{ch}(z_0x/\eta)}{\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta) \operatorname{ch}(z_0/\eta)} d\eta$$

и представим его в виде

$$J(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\lambda^-(\eta)} \right) \frac{\eta \operatorname{ch}(z_0x/\eta)}{(\eta^2 - \eta_1^2) \operatorname{ch}(z_0/\eta)} d\eta.$$

С помощью контурного интегрирования и теории вычетов находим, что

$$J(x) = \left[\operatorname{Res}_\infty + \operatorname{Res}_{\eta_0} + \operatorname{Res}_{-\eta_0} + \operatorname{Res}_{\eta_1} + \operatorname{Res}_{-\eta_1} + \sum_{-\infty}^{+\infty} \operatorname{Res}_{\eta_k^*} \right] \times \frac{z \operatorname{ch}(z_0x/z)}{\lambda(z)(z^2 - \eta_1^2) \operatorname{sh}(z_0/z)}.$$

Нетрудно вычислить, что

$$\operatorname{Res}_{\eta_k^*} \frac{z \operatorname{ch}(z_0x/z)}{\lambda(z)(z^2 - \eta_1^2) \operatorname{sh}(z_0/z)} = -\frac{\eta_k^{*3} \operatorname{ch}(z_0x/\eta_k^*)}{z_0\lambda(\eta_k^*)(\eta_k^{*2} - \eta_1^2) \operatorname{sh}(z_0/\eta_k^*)}.$$

Следовательно, искомый интеграл равен:

$$J(x) = -\frac{1}{\lambda_\infty} - \frac{2\eta_0 \operatorname{ch}(z_0x/\eta_0)}{(\eta_1^2 - \eta_0^2)\lambda'(\eta_0) \operatorname{ch}(z_0/\eta_0)} + \frac{\operatorname{ch}(z_0x/\eta_1)}{\lambda_1 \operatorname{ch}(z_0/\eta_1)} - \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta_k^{*3} \operatorname{ch}(z_0x/\eta_k^*)}{z_0\lambda(\eta_k^*)(\eta_k^{*2} - \eta_1^2) \operatorname{sh}(z_0/\eta_k^*)}.$$

Подставив этот интеграл в (11), получим выражение для электрического поля в виде ряда

$$e(x) = \frac{\operatorname{ch}(z_0x/\eta_1)}{\operatorname{ch}(z_0/\eta_1)} - \frac{\lambda_1}{z_0} \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\eta_k^{*3} \operatorname{ch}(z_0x/\eta_k^*)}{\lambda(\eta_k^*)(\eta_k^{*2} - \eta_1^2) \operatorname{sh}(z_0/\eta_k^*)}. \quad (12)$$

Формула (12) также может быть использована для построения профиля электрического поля внутри плазмы.

Поглощение энергии в слое

Поглощение в слое выражается известной формулой [11]

$$Q = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_{-a_0}^{a_0} j(x) E^*(x) dx. \quad (13)$$

Здесь „звездочка“ означает комплексное сопряжение, а $j(x)$ — плотность тока,

$$j(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \mu h(x, \mu) d\mu.$$

Ввиду одномерности задачи уравнение для электрического поля имеет вид $\frac{dE}{dx} = 4\pi q$, где q — плотность заряда. Все величины имеют зависимость от времени $\exp(-i\omega t)$, т.е. $E = E(x) \exp(-i\omega t)$ и т.д. Уравнение неразрывности для системы заряд–ток запишется ввиду одномерности задачи следующим образом:

$$\frac{dj(x)}{dx} - i\omega q(x) = 0.$$

Из последних уравнений имеем:

$$i\omega \frac{dE}{dx} = 4\pi \frac{dj(x)}{dx}.$$

Проинтегрировав это равенство и учитывая равенство нулю тока на границе, получим

$$j(x) = \frac{i\omega}{4\pi} (E(x) - E_0), \quad (14)$$

где E_0 — амплитуда внешнего поля на границе (действительная величина).

Подставив (14) в (13), находим:

$$Q = \frac{\omega}{8\pi} \operatorname{Re} \int_{-a_0}^{a_0} i(E(x) - E_0) E^*(x) dx. \quad (15)$$

Заметим, что $EE^* = |E|^2 > 0$ — действительная величина, значит

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \{ i(E - E_0) E^* \} &= -E_0 \operatorname{Re} (iE^*) \\ &= -E_0 \operatorname{Re} (i(\operatorname{Re} E - i \operatorname{Im} E)) = -E_0 \operatorname{Im} E(x). \end{aligned}$$

Следовательно, согласно (15), имеем

$$Q = -\frac{\omega E_0}{8\pi} \int_{-a_0}^{a_0} \text{Im} E(x) dx,$$

или, через безразмерное электрическое поле,

$$Q = -\frac{\omega a_0 E_0^2}{8\pi} \text{Im} \int_{-1}^1 e(x') dx'. \quad (16)$$

Подставим в формулу (16) выражение для электрического поля. После интегрирования получаем, что

$$Q = \frac{\omega a_0 E_0^2}{4\pi} Q_0,$$

где Q_0 — безразмерная часть поглощения, определяемая формулой

$$Q_0 = -\text{Im} Q_1, \quad (17)$$

где

$$Q_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_\infty} + \frac{2\lambda_1 \eta_0^2 \text{th}(z_0/\eta_0)}{z_0(ac - \eta_0^2)\lambda'(\eta_0)} + \frac{\lambda_1}{2z_0} \int_{-1}^1 \frac{\text{th}(z_0/\eta)\eta^3 d\eta}{\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}. \quad (18)$$

Формула (17) представляет собой величину поглощения энергии электрического поля в слое металла. Она определяется частотой и амплитудой внешнего поля ω и E_0 , шириной слоя a_0 и параметрами

$$a = \frac{x_0}{\kappa} = \frac{a_0 v}{v_F \kappa}, \quad c = \frac{z_0}{\kappa} = \frac{x_0 - iy_0}{\kappa} = \frac{a_0(v - i\omega)}{v_F \kappa},$$

отражающими свойства металла.

Интеграл из правой части равенства (18) выразим в виде ряда. Сначала представим его в виде, удобном для вычисления

$$J = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\eta^3 \text{th}(z_0/\eta) d\eta}{\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{\lambda^+(\eta)} - \frac{1}{\lambda^-(\eta)} \right) \frac{\eta^2 \text{th}(z_0/\eta)}{\eta^2 - \eta_1^2} d\eta.$$

Теперь с помощью контурного интегрирования и теории вычетов получим

$$J = \left[\text{Res}_\infty + \text{Res}_{\eta_0} + \text{Res}_{-\eta_0} + \text{Res}_{\eta_1} + \text{Res}_{-\eta_1} + \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \text{Res}_{\eta_k^*} \right] \times \frac{z^2 \text{sh}(z_0/z)}{\lambda(z)(z^2 - \eta_1^2) \text{ch}(z_0/z)}.$$

Заметим, что

$$\text{Res}_\infty \frac{z^2 \text{sh}(z_0/z)}{\lambda(z)(z^2 - \eta_1^2) \text{ch}(z_0/z)} = \frac{z_0}{\lambda_\infty},$$

$$\text{Res}_{\eta_k^*} \frac{z^2 \text{sh}(z_0/z)}{\lambda(z)(z^2 - \eta_1^2) \text{ch}(z_0/z)} = -\frac{\eta_k^{*4}}{z_0 \lambda(\eta_k^*)(\eta_k^{*2} - \eta_1^2)}.$$

Следовательно, после вычисления остальных вычетов интеграл J равен:

$$J = -\frac{z_0}{\lambda_\infty} + \frac{2\eta_0^2 \text{th}(z_0/\eta_0)}{\lambda'(\eta_0)(\eta_0^2 - \eta_1^2)} + \frac{\eta_1 \text{th}(z_0/\eta_1)}{\lambda_1} - \frac{1}{z_0} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{\eta_k^{*4}}{\lambda(\eta_k^*)(\eta_k^{*2} - \eta_1^2)}.$$

Подставив этот интеграл в (18), окончательно получим

$$Q_1 = \frac{\eta_1}{z_0} \text{th}(z_0/\eta_1) - \frac{\lambda_1}{z_0^2} \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{\eta_k^{*4}}{\lambda(\eta_k^*)(\eta_k^{*2} - \eta_1^2)}. \quad (19)$$

Анализ решения и выводы

Будем считать параметры γ и ε малыми: $|\gamma| \ll 1$, $0 < \varepsilon \ll 1$ и введем параметр δ

$$\delta = \frac{v_F}{a_0 \omega_p}, \quad 0 < \delta \leq \delta_0, \quad \delta_0 \sim 10^{-1}.$$

Ясно, что $\kappa = \sqrt{3}/\delta$, $\kappa\delta = \sqrt{3}$. Выразим x_0 и y_0 через малые параметры:

$$x_0 = \frac{a_0 v}{v_F} = \frac{a_0 \omega_p}{v_F} \frac{v}{\omega_p} = \frac{\varepsilon}{\delta},$$

$$y_0 = \frac{a_0 \omega}{v_F} = \frac{a_0 \omega_p}{v_F} \frac{\omega}{\omega_p} = \frac{1 + \gamma}{\delta}.$$

Из этих равенств имеем

$$z_0 = x_0 - iy_0 = -i \frac{1 + \gamma + i\varepsilon}{\delta}.$$

Таким образом, параметры a, b, c равны

$$a = \frac{x_0}{\kappa} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{3}}, \quad b = \frac{y_0}{\kappa} = \frac{1 + \gamma}{\sqrt{3}}.$$

$$c = a - ib = \frac{z_0}{\kappa} = -i \frac{1 + \gamma + i\varepsilon}{\sqrt{3}}.$$

Теперь выразим $\eta_1^2 = ac$ и $\lambda_1 \equiv \lambda(\eta_1) = c^2 - ac$ через малые параметры

$$\eta_1^2 = a(a - ib) = a^2 - iab = -i \frac{\varepsilon + \varepsilon\gamma + i\varepsilon^2}{3},$$

$$\eta_1 = \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}(1 + \gamma + i\varepsilon)}$$

$$\approx \exp\left(-i \frac{\pi}{4}\right) \sqrt{\frac{\varepsilon}{3}} \left(1 + \frac{\gamma + i\varepsilon}{2}\right),$$

$$\lambda_1 = c(c - a) = -icb = -\frac{1}{3} [1 + 2\gamma + i\varepsilon + \gamma(\gamma + i\varepsilon)].$$

Найдем значение дисперсионной функции в бесконечно удаленной точке

$$\begin{aligned}\lambda_\infty &\equiv \lambda(\infty) = c^2 - ac + \frac{1}{3} \\ &= \lambda_1 + \frac{1}{3} = -\frac{1}{3} [2\gamma + i\varepsilon + \gamma(\gamma + i\varepsilon)].\end{aligned}$$

Рассмотрим разложение дисперсионной функции при $|z| > 1$ в ряд Лорана

$$\lambda(z) = \lambda_\infty + \frac{\lambda_2}{z^2} + \frac{\lambda_4}{z^4} + \dots, \quad z \rightarrow \infty,$$

где

$$\lambda_2 = \frac{1}{5} - \frac{ac}{3}, \quad \lambda_4 = \frac{1}{7} - \frac{ac}{5}, \dots$$

Нуль η_0 дисперсионной функции найдем, оставив в разложении $\lambda(z)$ первые четыре члена и отбросив члены начиная с шестой степени $1/\eta_0$:

$$\eta_0^2 = \frac{9 + 5i\varepsilon(1 + \gamma + i\varepsilon)}{15[2\gamma + i\varepsilon + \gamma(\gamma + i\varepsilon)]} + \frac{45 + 21i\varepsilon(1 + \gamma + i\varepsilon)}{63 + 35i\varepsilon(1 + \gamma + i\varepsilon)}.$$

Найдем производную дисперсионной функции в точке η_0 :

$$\lambda'(\eta_0) = -\frac{2\lambda_2}{\eta_0^3} - \frac{4\lambda_4}{\eta_0^5} - \dots, \quad \eta_0 \rightarrow \infty,$$

где

$$\begin{aligned}\lambda_2 &= \frac{1}{5} + i\frac{\varepsilon}{9}(1 + \gamma + i\varepsilon), \\ \lambda_4 &= \frac{1}{7} + i\frac{\varepsilon}{15}(1 + \gamma + i\varepsilon), \dots\end{aligned}$$

Рассмотрим величины z_0/η_0 и z_0 , имеем

$$\begin{aligned}\frac{z_0}{\eta_0} &= \sqrt{\frac{5\varepsilon}{6}} \frac{1-i}{\delta}, \\ z_0 &= -i\frac{1+i\varepsilon}{\delta} = \frac{\varepsilon}{\delta} - \frac{i}{\delta}.\end{aligned}$$

Электрическое поле представим в виде двух слагаемых: $e(x) = e_d(x) + e_c(x)$, где $e_d(x)$ — часть поля, отвечающая дискретному спектру (сумма мод Друде и Дебая), $e_c(x)$ — часть, отвечающая непрерывному спектру (волны Ван Кампена [12]),

$$e_d(x) = \frac{\lambda_1}{\lambda(\infty)} + \frac{2\lambda_1\eta_0}{(ac - \eta_0^2)\lambda'(\eta_0)} \frac{\text{ch}(z_0x/\eta_0)}{\text{ch}(z_0/\eta_0)}, \quad (20)$$

$$e_c(x) = \frac{\lambda_1}{2} \int_{-1}^1 \frac{\text{ch}(z_0x/\eta)\eta^2 d\eta}{\text{ch}(z_0/\eta)\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}. \quad (21)$$

Из равенства (20) видно, что на границе слоя величина дискретной части поля равна

$$e_d(\pm 1) = \frac{\lambda_1}{\lambda_\infty} + \frac{2\lambda_1\eta_0}{(ac - \eta_0^2)\lambda'(\eta_0)}.$$

Используя результаты контурного интегрирования, согласно (21), имеем

$$e_c(\pm 1) = 1 - \left[\frac{\lambda_1}{\lambda_\infty} + \frac{2\lambda_1\eta_0}{(ac - \eta_0^2)\lambda'(\eta_0)} \right].$$

Заметим, что

$$\frac{1}{\lambda_\infty} = \frac{15\eta_0^2}{5ac - 3},$$

$$\frac{2\eta_0}{(ac - \eta_0^2)\lambda'(\eta_0)} = \frac{\eta_0^2}{\lambda_2} \left(1 - \frac{2\lambda_4}{\lambda_2\eta_0^2} \right), \quad \frac{\eta_0^2}{\lambda_2} = \frac{1}{\lambda_\infty}.$$

Следовательно, электрическое поле, отвечающее дискретному спектру, вычисляется по формуле

$$\begin{aligned}e_d(x) &= \frac{\lambda_1\eta_0^2}{\lambda_2} \left[1 - \left(1 - \frac{2\lambda_4}{\lambda_2\eta_0^2} \right) C(x, \eta_0) \right], \\ C(x, \eta_0) &= \frac{\text{ch}(z_0x/\eta_0)}{\text{ch}(z_0/\eta_0)}. \quad (22)\end{aligned}$$

Из соотношения (22) видно, что при больших $|\eta_0| > 1$ имеем $e_d(\pm 1) = 2\lambda_1\lambda_4/\lambda_2^2 = 2.38$. Это равенство совместно с граничным условием (6) означает, что вклад дискретного спектра в электрическое поле составляет 63.3%, а непрерывного — 36.7. Таким образом, вклад в величину электрического поля непрерывного спектра вблизи границы слоя весьма существен.

Электрическое поле в слое металла будем исследовать по формуле

$$\begin{aligned}e(x) &= \frac{\lambda_1}{\lambda_\infty} \left[1 - \left(1 - \lambda_\infty \frac{2\lambda_4}{\lambda_2^2} \right) C(x, \eta_0) \right] \\ &+ \frac{\lambda_1}{2} \int_{-1}^1 \frac{C(x, \eta)\eta^2 d\eta}{\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}. \quad (23)\end{aligned}$$

Рассмотрим осцилляционные режимы и поведение электрического поля вблизи поверхностей, ограничивающих слой металла, и внутри слоя с использованием представления поля (23).

Из выражения для электрического поля $e_c(x)$, отвечающего непрерывному спектру с учетом асимптотики z_0 при $\gamma \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$, видно, что рассматриваемая часть поля имеет коэффициент убывания по переменной x , пропорциональный величине ε/δ . Из выражения поля $e_d(x)$, отвечающего дискретному спектру, с учетом асимптотики отношения z_0/η_0 при $\gamma \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$ видно, что эта часть поля имеет коэффициент убывания, пропорциональный $\sqrt{\varepsilon}/\delta$.

Это означает, что в резонансном случае ($\gamma \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$) существуют две области, примыкающие к границам слоя. Первая область находится на расстоянии $x_1 = \varepsilon/\delta$ от поверхностей (плоскостей), ограничивающих слой, а вторая — на расстоянии $x_2 = \sqrt{\varepsilon}/\delta$ от плоскостей — границ слоя. Отметим, что если $\delta \leq \varepsilon$,

то первая область заполняет весь слой. Первая и вторая области описываются неравенствами

$$I = \{x : (-1 < x < -1 + x_1) \cup (1 - x_1 < x < 1)\},$$

$$II = \{x : (-1 + x_1 < x < -1 + x_2) \cup (1 - x_2 < x < 1 - x_1)\}.$$

В рассматриваемом случае $z_0 = -i(1 + \gamma + i\varepsilon)/\delta$. Следовательно, величина δ имеет смысл характерного периода осцилляции интегрального слагаемого $e_c(x)$, отвечающего непрерывному спектру. При $\delta \rightarrow 0$ значение подынтегральной функции интеграла в $e_c(x)$ начинает сколь угодно быстро осциллировать. Известно, что значение интеграла от быстро осциллирующей функции близко к нулю. Следовательно, вклад непрерывного спектра в величину поля вне первой области близок к нулю и несуществен.

Во второй области решающий вклад в электрическое поле вносит второе слагаемое из $e_d(x)$ — решение Дебая. Вторая область при переходе точки x через плоскость x_2 переходит в область сплошной среды

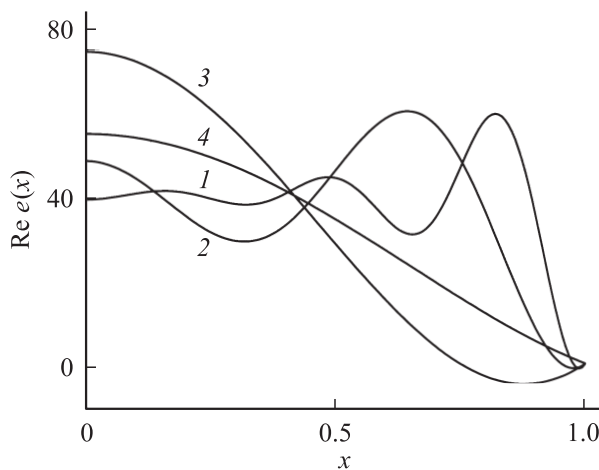


Рис. 2.

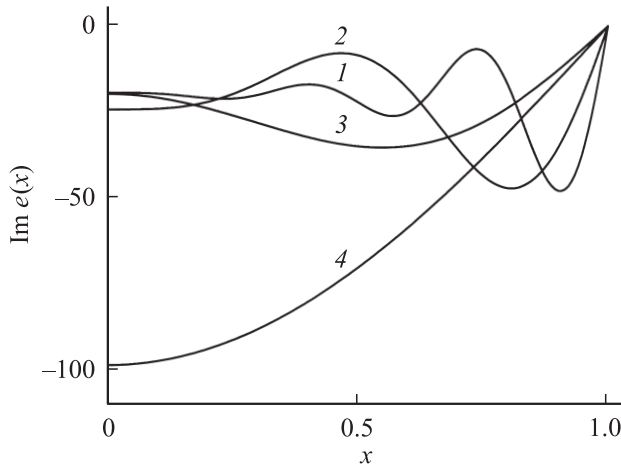


Рис. 3.

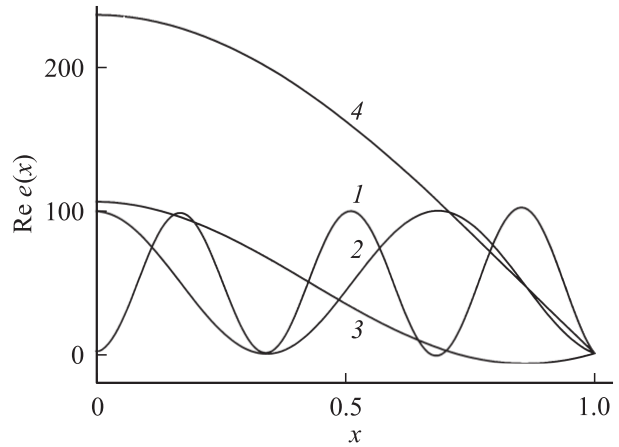


Рис. 4.

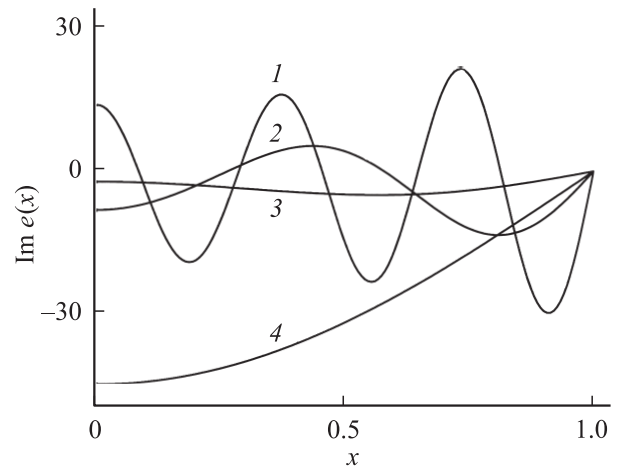


Рис. 5.

$-1 + x_2 < x < 1 - x_2$. В области сплошной среды в электрическое поле вносит решающий вклад первое слагаемое из $e_d(x)$ — решение Друде.

Итак, вблизи резонанса в общем случае весь слой распадается на три области — область сплошной среды III, которая определяется неравенством $1 - \sqrt{\varepsilon}/\delta < |x| < 1 - \varepsilon/\delta$, область I, непосредственно примыкающую к границам слоя, и определяемую неравенством $1 - \varepsilon/\delta < |x| < 1$. Область II лежит между областями I и III.

Переходя к размерным координатам, получаем, что первую и вторую области разделяют плоскости $x = \pm(1 - \varepsilon/\delta)a_0$, a_0 — ширина слоя, а вторую и третью области разделяют плоскости $x = \pm(1 - \sqrt{\varepsilon}/\delta)a_0$.

Соответствующие графики для действительной и мнимой частей электрического поля приведены на рис. 2–5. Вследствие симметрии задачи графики симметричны относительно плоскости $x = 0$. Поэтому соответствующие кривые построены для случая $x > 0$.

На рис. 2 и 3 приводятся графики соответственно действительной и мнимой частей электрического поля

в случае $\gamma = \varepsilon = 0.01$, кривые 1, 2, 3, 4 отвечают значениям параметра $\delta = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$.

На рис. 4 и 5 приводятся графики соответственно действительной и мнимой частей электрического поля в случае $\gamma = 0.01$, $\varepsilon = 0.001$, кривые 1, 2, 3, 4 отвечают значениям параметра $\delta = 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$.

Близость частоты внешнего поля к резонансной приводит к тому, что амплитуда безразмерного поля в слое металла много больше единицы. Это значит, что поле в слое существенно превышает внешнее поле. Отметим также характерное осциллирующее поведение поля внутри металла.

Безразмерную величину поглощения энергии электрического поля в слое металла будем исследовать, согласно (17) и (19), используя следующее выражение:

$$Q_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_\infty} + \frac{\lambda_1 \eta_0^3 \operatorname{th}(z_0/\eta_0)}{z_0(\lambda_2 + 2\lambda_4/\eta_0^2)} + \frac{\lambda_1}{2z_0} \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{th}(z_0/\eta)\eta^3 d\eta}{\lambda^+(\eta)\lambda^-(\eta)}. \quad (24)$$

На рис. 6 и 7 представлены графики зависимостей от параметров задачи γ , ε и δ величины поглощения энергии электрического поля внутри слоя, согласно представлению (24). На рис. 6 приводится зависимость $Q_0 = Q_0(\varepsilon)$, $0 \leq \varepsilon \leq 0.01$, $\gamma = 0$, кривые 1, 2, 3, 4 отвечают значениям параметра $\delta = 0.03, 0.04, 0.05, 0.06$. На рис. 7 приводится зависимость $Q_0 = Q_0(\gamma)$, $-0.02 \leq \gamma \leq 0.04$, $\varepsilon = 0.007$, кривые 1, 2 соответствуют параметрам $\delta = 0.001, 0.007$.

Видно, что максимум поглощения в слое, приходящийся на частоту, близкую к плазменной, становится более выраженным по мере уменьшения значения δ , т.е. по мере роста толщины слоя. Так, при $\delta = 0.001$ максимум поглощения наблюдается фактически при $\omega = \omega_p$. С ростом δ величина максимума уменьшается и сдвигается вправо.

Из результатов работы следует, что кинетические эффекты оказывают существенное влияние на поведение электронной плазмы металла во внешнем электромагнитном поле. Классические результаты Друде справедливы только в предельном случае металлического образца, характерные размеры которого много больше длины свободного пробега электронов.

Задача об отклике электронной плазмы плоского слоя металла на внешнее переменное электрическое поле рассматривалась для случая произвольных частот. При этом искажение (экранировка) внешнего переменного электрического поля вследствие индуцированных этим полем электрических зарядов учитывалось при всех частотах. Экранировка оказывает существенное влияние на поглощение электромагнитной энергии электронной плазмой.

Особый интерес представляет структура электрического поля в слое металла при частотах, близких к частоте плазменного резонанса ω_p .

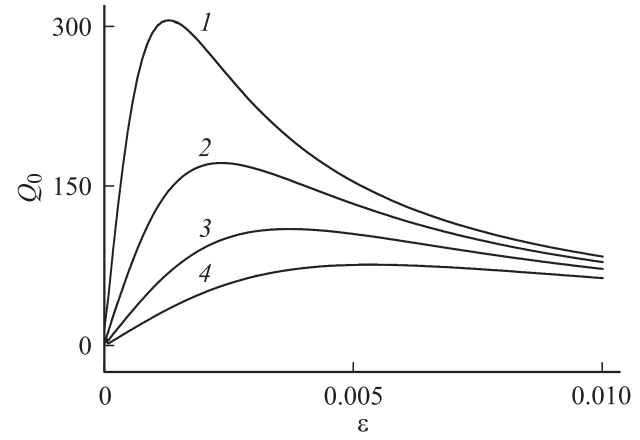


Рис. 6.

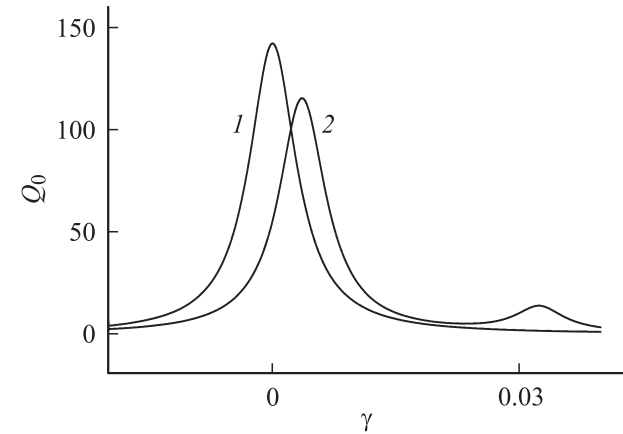


Рис. 7.

Близость частоты внешнего поля к частоте плазменного резонанса приводит к тому, что величина поля внутри слоя существенно (на несколько порядков) превышает величину внешнего электрического поля. При этом характер поведения электрического поля внутри слоя существенно зависит от соотношения между частотой внешнего поля и плазменной частотой металла. Даже небольшой сдвиг частоты поля относительно плазменной частоты приводит к значительному изменению параметров электрического поля внутри слоя.

Заключение

Исследованы аналитические выражения для величины электрического поля и поглощения энергии электромагнитного поля внутри металлического слоя с учетом экранировки. Показано, в частности, что при частотах внешнего поля, близких к частотам плазменного резонанса, поле проникает в объем металла. При этом при частотах, близких к плазменной, величина электрического поля в металле резко возрастает, т.е. наблюдается эффект резонанса. Кроме того, анализ полученных выра-

жений показывает, что в случае малых чисел Кнудсена (когда длина свободного пробега электронов много меньше толщины слоя металла) величина поглощения в слое металла совпадает с результатом, следующим из классической теории.

Список литературы

- [1] *Ландау Л.Д.* // Сб. трудов. М.: Наука, 1969. Т. 2. С. 7–25. (см. также ЖЭТФ. 1946. Т. 26. Вып. 7. С. 547–586).
- [2] *Гохфельд В.М., Гулянский М.А., Каганов М.И., Плавенек А.Г.* // ЖЭТФ. 1985. Т. 89. Вып. 3 (9). С. 985–1001.
- [3] *Гохфельд В.М., Гулянский М.А., Каганов М.И.* // ЖЭТФ. 1987. Т. 92. Вып. 2. С. 523–1530.
- [4] *Латышев А.В., Лесскис А.Г., Юшканов А.А.* // ТМФ. 1992. Т. 92. № 1 (июль). С. 127–138.
- [5] *Латышев А.В., Юшканов А.А.* // ТМФ. 2006. Т. 147. № 3. С. 487–502.
- [6] *Schmeits M., Lucas A.A.* // Progr. Surface Sci. 1983. Vol. 14. N 1. P. 1–51.
- [7] *Forsmann F., Steschke H.* // Phys. Rev. Lett. 1977. Vol. 38. N 23. P. 1365–1368.
- [8] *Абрикосов А.А.* Основы теории металла. М.: Наука, 1977. 288 с. (Abrikosov A.A. Fundamentals of the Theory of Metals. Amsterdam: North-Holland, 1998).
- [9] *Владимиров В.С., Жаринов В.В.* Уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 2000. 399 с.
- [10] *Кейз К.М., Цвайфель П.Ф.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 384 с.
- [11] *Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П.* Физическая кинетика. М.: Наука, 1979. 528 с.
- [12] *Кадомицев Б.Б.* Коллективные явления в плазме. М.: Наука, 1976. 300 с.