

01;09;10

Нестационарные двумерные модели электронно-волнового взаимодействия

© В.Р. Барышев, Н.С. Гинзбург, А.С. Сергеев

Институт прикладной физики РАН,
603950 Нижний Новгород, Россия
e-mail: baryshev@appl.sci-nnov.ru

(Поступило в Редакцию 14 июня 2007 г.)

В рамках квазиоптического приближения развита двумерная нестационарная модель стимулированного излучения ленточных электронных пучков и сгустков в свободном пространстве. На базе данной модели рассмотрены задача об усилении короткого электромагнитного импульса при распространении вдоль квазистационарного ленточного электронного потока, теория генератора типа ЛОВ с канализацией излучения электронным потоком, процесс коллективного ускорения короткого электронного сгустка в поле интенсивной попутной волны.

PACS: 41.60.-m, 41q.60.Cr, 41.75.Jv

Введение

Исследование эффектов канализации излучения пространственно ограниченными релятивистскими электронными пучками ведется уже достаточно давно и стимулируется продвижением релятивистских электронных генераторов (прежде всего, лазеров на свободных электронах) в предельно коротковолновые диапазоны. В этих диапазонах ввиду отсутствия эффективных волноведущих систем интенсивный электронный пучок может сам играть роль открытого волновода [1,2]. При этом фактически излучение канализируется за счет эффекта полного внутреннего отражения от границ электронного потока, т.е. основную роль в этом процессе играет реактивная часть электронной восприимчивости. Важно подчеркнуть, что ввиду резонансного характера взаимодействия электронного потока с полем излучения абсолютная величина эффективной диэлектрической проницаемости, характеризующей электронный поток, на несколько порядков превосходит величину, задаваемую плазменной частотой. Для электроники больших мощностей на эффектах канализации может быть построена селекция мод по поперечному индексу [3,4], когда в сверхразмерной электродинамической системе электронный поток сам формирует поперечную структуру поля в виде супермоды, представляющей собой набор мод холодного волновода с коррелированными между собой фазами.

Как было показано в [5,6], значительные особенности (по сравнению с традиционными электронными системами с фиксированной поперечной структурой поля) при стимулированном излучении в свободном пространстве возникают на нелинейной стадии взаимодействия и обусловлены автоматической подстройкой по мере торможения электронов угла, под которым излучается волна. В результате имеет место автоматическое поддержание условий синхронизма (например, в случае ондуляторного излучения фазовая скорость комбинационной волны совпадает с поступательной скоростью частиц) и, как

следствие, значительный рост электронного КПД. В ряде случаев имеет место практически полное торможение электронного потока.

Указанный круг эффектов исследовался ранее [1–6] в приближении заданной частоты излучения, т.е. в рамках стационарных моделей, когда амплитуда излучаемого поля есть медленная функция продольных и поперечных координат. Вместе с тем значительный интерес приобретает исследование особенностей стимулированного излучения в свободном пространстве в рамках нестационарных моделей, когда указанная амплитуда эволюционирует как в пространстве, так и во времени. К числу подобных задач относятся задачи о сверхизлучении протяженных электронных сгустков, которые в рамках одномерных моделей, т.е. в приближении фиксированной поперечной структуры поля, исследовались теоретически в работах [7–11].

В настоящей работе развивается двумерный нестационарный подход к анализу стимулированного излучения электронных пучков и сгустков в свободном пространстве. В основу подхода положено квазиоптическое приближение, справедливое при малой угловой расходимости излучения, которое достаточно адекватно описывает излучение потоков ультрарелятивистских электронов. Дополнительное упрощение, использованное в работе, связано с предположением о ленточной геометрии электронных пучков, а также допущением, что ширина пучка b мала в масштабе параметра Френеля

$$b^2/\lambda L \ll 1, \quad (1)$$

где L — характерная длина пространства взаимодействия (обратный инкремент).

1. Модель и основные уравнения

Рассмотрим модель ленточного релятивистского электронного потока конечной ширины b , движущегося в вакууме вдоль плоскости $x = 0$ в положительном на-

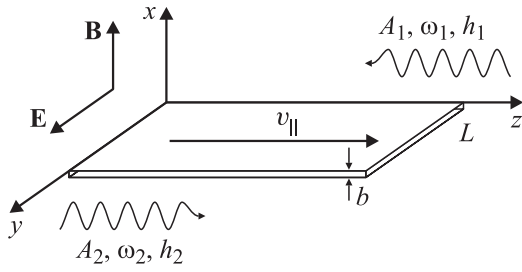


Рис. 1. Модель встречного рассеяния электромагнитных волн на ленточном релятивистском электронном пучке конечной ширины b .

правлении оси z с начальной скоростью $v_{\parallel 0}$ (рис. 1). В направлении y система считается достаточно протяженной, чтобы краевые эффекты не играли заметной роли в процессе взаимодействия. Электроны осциллируют вдоль оси y в поле волны накачки, заданной вектор-потенциалом

$$\mathbf{A}_y = \text{Re}(y_0 A_1(z, x, t) e^{i(\omega_1 t + h_1 z)}). \quad (2)$$

Вектор-потенциал рассеянного электромагнитного поля может быть представлен в следующем виде:

$$\mathbf{A}_y = \text{Re}(y_0 A_2(z, x, t) e^{i(\omega_2 t - h_2 z)}), \quad (3)$$

где $h_{1,2} = \omega_{1,2}/c$, $A_{1,2}(z, x, t)$ — медленно меняющиеся амплитуды соответственно встречной и попутной электромагнитных волн. В частном случае $\omega_1 = 0$ вектор-потенциал (2) описывает периодическое магнитное поле ондулятора. При этом $h_1 = 2\pi/d$, где d — период ондулятора.

Частоты и волновые числа падающего и рассеянного полей связаны условием комбинационного синхронизма

$$\omega_2 - h_2 v_{\parallel 0} = \omega_1 + h_1 v_{\parallel 0}. \quad (4)$$

В ультрарелятивистском приближении $\gamma \gg 1$ усредненные уравнения движения частиц в полях (2), (3) можно записать в виде [12]:

$$\frac{d\gamma}{dz} = \frac{1}{2\gamma} \frac{\omega_c}{c} \text{Im}(\alpha_1^* \alpha_2 e^{i\theta}), \quad (5)$$

$$\frac{d\theta}{dz} = \frac{\omega_c}{2\gamma^2 c} \left(1 + \frac{1}{2} (|\alpha_1|^2 + |\alpha_2|^2) - \text{Re}(\alpha_1^* \alpha_2 e^{i\theta}) - \frac{\gamma^2}{\gamma_0^2} \right), \quad (6)$$

где $\theta = \omega_c t - h_c z + \theta_0$ — фаза электронов относительно комбинационной волны, θ_0 — начальное значение комбинационной фазы частиц, $\omega_c = \omega_2 - \omega_1$ и $h_c = h_2 + h_1$ — частота и волновое число указанной волны, $\alpha_{1,2} = e A_{1,2}/mc^2$.

При условии, что изменение энергии частиц γ за время взаимодействия мало, уравнения движения можно привести к виду, эквивалентному уравнению маятника

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} = -\frac{\omega_c^2}{2\gamma_0^4 \beta_0^4 c^2} \text{Im}(\alpha_1^* \alpha_2 e^{i\theta}). \quad (7)$$

Выражения для медленных амплитуд волн можно получить из волнового уравнения

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}. \quad (8)$$

Подставив выражения (2) и (3) в уравнение (8) и пренебрегая вторыми производными от медленных функций $A_{1,2}(z, x, t)$ по переменным z и t , получим для амплитуд волн уравнения параболического типа

$$i \frac{1}{2h_{1,2}} \frac{\partial^2 A_{1,2}}{\partial x^2} \pm \frac{\partial A_{1,2}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial A_{1,2}}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} i \frac{4\pi}{\omega_{1,2}} j_y e^{-i(\omega_{1,2}(t+t') \pm h_{1,2}z)} d(\omega_c t'). \quad (9)$$

Поперечная компонента тока $j_y = p_y \rho / \gamma m$ с учетом интеграла движения $p_y - e A_y / c = \text{const}$ может быть представлена в виде

$$j_y = \frac{e}{2c} \rho (A_1 e^{i\theta_1} + A_1^* e^{-i\theta_1} + A_2 e^{i\theta_2} + A_2^* e^{-i\theta_2}), \quad (10)$$

где $\theta_{1,2} = \omega_{1,2}(t + t') \pm h_{1,2}z$, ρ — плотность заряда электронов. При подстановке (10) в уравнение возбуждения (9) после усреднения и перехода к интегрированию по начальной фазе частиц получим

$$i \frac{1}{2h_{1,2}} \frac{\partial^2 \alpha_{1,2}}{\partial x^2} \mp \frac{\partial \alpha_{1,2}}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial \alpha_{1,2}}{\partial t} = -\frac{i \alpha_{2,1} \omega_b^2}{4\pi c \omega_{1,2}} F(x) \int_0^{2\pi} \frac{e^{\pm i\theta}}{\gamma} d\theta_0, \quad (11)$$

где $\omega_b = (4\pi e \rho_0 / m)^{1/2}$ — плазменная частота, ρ_0 — невозмущенная плотность заряда электронов, $F(x)$ — функция, описывающая поперечное распределение плотности.

Уравнения возбуждения (11) вместе с усредненными уравнениями движения электронов (5), (6) образуют самосогласованную систему, описывающую взаимодействие ленточного потока электронов с двумя электромагнитными волнами в условиях комбинационного синхронизма (4).

2. Усиление короткого электромагнитного импульса при распространении вдоль ленточного электронного потока

Исследуем задачу об усилении и дифракции короткого электромагнитного импульса, распространяющегося вдоль ленточного потока. Пусть поле накачки представляет собой либо встречную электромагнитную волну, либо поле ондулятора. Рассмотрим приближение фиксированной амплитуды волны накачки, опустив уравнение

возбуждения для этой волны. Изменение амплитуды излучаемой волны описывается уравнением возбуждения (11). Будем считать пучок достаточно тонким в масштабе параметра Френеля (см. условие (1)), что позволяет представить распределение заряда в виде

$$F(x) = b\delta(x). \quad (12)$$

При условии малого изменения энергии электронов уравнения движения редуцируются к уравнениям маятника (7), и процесс усиления описывается следующей системой уравнений:

$$i \frac{\partial^2 a}{\partial X^2} + \frac{\partial a}{\partial Z} = 2i\delta(x)J, \quad (13)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^2 \theta = \text{Im}(ae^{i\theta}), \quad (14)$$

где $J = (1/\pi) \int_0^{2\pi} e^{-i\theta} d\theta$, $\tau = G\omega_c(t - z/c)\beta_0/(1 - \beta_0)$, $Z = G\omega_c z/c$, $X = \sqrt{2G}\omega_c x/c$ — нормированные время и пространственные координаты, $a = -2\sqrt{2G} \times \gamma_0 \omega_2 c A_2 / b \omega_b^2 A_1$, $G = (\sqrt{2}\omega_b^2 |\alpha_1|^2 b / 8\gamma_0^5 \beta_0^4 \omega_2 c)^{2/5}$ — параметр усиления.

В задаче усиления начального электромагнитного импульса, центральная (несущая) частота которого совпадает с резонансной, граничные условия могут быть представлены в виде

$$a|_{Z=0} = a_0(X, \tau), \quad \theta|_{Z=0} = \theta_0 \in [0, 2\pi),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)\theta|_{Z=0} = 0, \quad (15)$$

где функция $a_0(X, \tau)$ характеризует начальный профиль импульса.

Используя преобразование Фурье по поперечной координате, получим из уравнения (13) интегральное представление для амплитуды поля волны, которое запишем для случая, когда падающее поле представляет собой плоскую волну постоянной амплитуды: $a(Z = 0, X, \tau) = a_0$:

$$a(X, Z, \tau) = a_0 - \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \int_0^Z \frac{e^{-iX^2/4(Z-Z')}}{\sqrt{Z-Z'}} J(Z', \tau) dZ'. \quad (16)$$

Найдем аналитическое решение системы уравнений (13), (14) в линейном приближении. Линеаризуя уравнения движения частиц (14), для амплитуды электронного тока получим

$$\left(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^2 j = -a, \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)j|_{Z=0} = 0, \quad j|_{Z=0} = 0. \quad (18)$$

Рассмотрим далее задачу, когда при $\tau = 0$ имеет место мгновенное включение падающей волны

$$a(Z = 0, X, \tau) = a_0 S(\tau), \quad (19)$$

где $S(\tau)$ — степ-функция. Применив преобразование Лапласа по продольной координате, для амплитуды тока и амплитуды возбуждаемого этим током поля (см. Приложение) в области $(Z - \tau) \gg 1$ соответственно получим

$$|j(Z, \tau)| \approx \frac{4\sqrt{Z - \tau}}{\sqrt{10\pi} (4Z - 5\tau)} \times \exp(5\tau^{1/5}(Z - \tau)^{1/5} 4^{-4/5} \cos(\pi/10)), \quad (20)$$

$$|a(X, Z, \tau)| \sim \frac{4^{7/5}(Z - \tau)^{9/10}}{\sqrt{10\pi} \tau^{2/5} (4Z - 5\tau)} \times \exp(5\tau^{4/5}(Z - \tau)^{1/5} 4^{-4/5} \cos(\pi/10) - 4^{-2/5}(Z - \tau)^{-2/5} \tau^{2/5} \cos(\pi/5)|X|). \quad (21)$$

Задаваемая этими соотношениями зависимость амплитуды поля от τ при различных значениях Z показана на рис. 2 пунктиром.

Нелинейная стадия процесса усиления исследовалась с помощью численного моделирования уравнений (13), (14) с граничными условиями (15). Интегральное представление (16) позволяет сначала описать эволюцию электромагнитного поля только внутри области, занимаемой электронами, т.е. в сечении $X = 0$, а затем по известному распределению тока $J(Z, \tau)$ восстано-

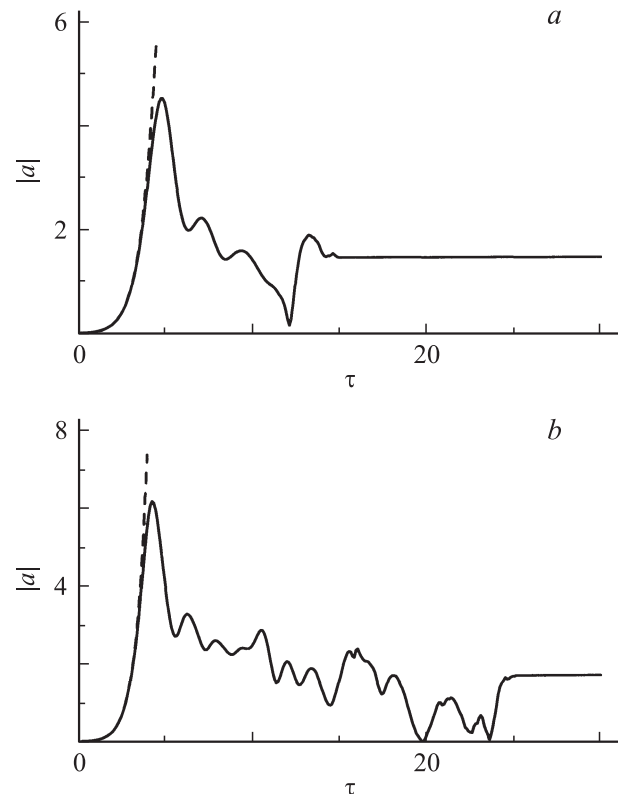


Рис. 2. Зависимость амплитуды сигнала от времени при: $a - L = 15$, $b - 25$; $a_0 = 0.01$. Пунктиром показано аналитическое решение линейной задачи.

вить эволюцию поля во всем пространстве. Для задачи об усилении волны постоянной амплитуды, падающей на систему в момент $\tau = 0$ (см. условия (19)), на рис. 2 показана зависимость от времени амплитуды поля на выходе из области взаимодействия. При $\tau > L$ реализуется стационарный режим усиления, в котором амплитуда поля на выходе не зависит от времени. Нестационарный характер процесса усиления существен при $\tau < L$. Видно, что при малых τ линейная стадия процесса усиления вполне точно описывается аналитически соотношением (21). Далее начинают играть роль нелинейные поправки, ограничивающие рост амплитуды усиливаемой волны и определяющие пиковое значение амплитуды. Заметим, что время формирования главного импульса τ_{peak} почти не зависит от длины системы L , если $L > \tau_{\text{peak}}$, и полностью определяется амплитудой падающего сигнала a_0 . В интервале времени $\tau_{\text{peak}} < \tau < L$ в выходном сечении наблюдаются хаотические осцилляции амплитуды усиленного поля.

На рис. 3 представлена зависимость от длины системы L пиковой амплитуды электромагнитного поля и амплитуды сигнала в стационарном режиме. Пиковая мощность приближенно задается формулой $|a^2| \sim L - \tau_{\text{peak}}$. Рост пиковой мощности пропорционально длине взаимодействия L можно объяснить тем, что после формирования импульса в области $Z \approx \tau_{\text{peak}}$ его дальнейшее распространение сопровождается отбором в среднем примерно одинаковой энергии у всех электронных фракций, через которые пробегает импульс, вследствие отличия его групповой скорости от поступательной скорости частиц.

В этой связи с целью получения импульсов с амплитудой, существенно превышающей амплитуду стационарного усиления, представляется целесообразным уже на входе в систему ограничить длительность входного сигнала условием $\tau_p \ll L$ [10].

На рис. 4 показана эволюция амплитуды короткого импульса, начальный профиль которого на отрезке

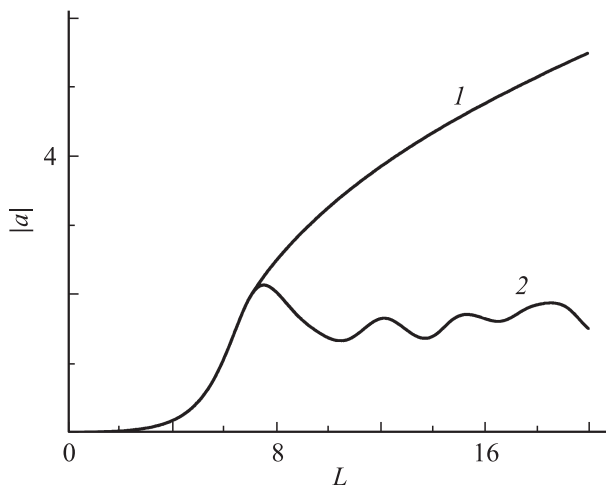


Рис. 3. Зависимость амплитуды сигнала от длины системы: 1 — пиковая амплитуда импульса; 2 — амплитуда стационарного сигнала; $a_0 = 0.01$.

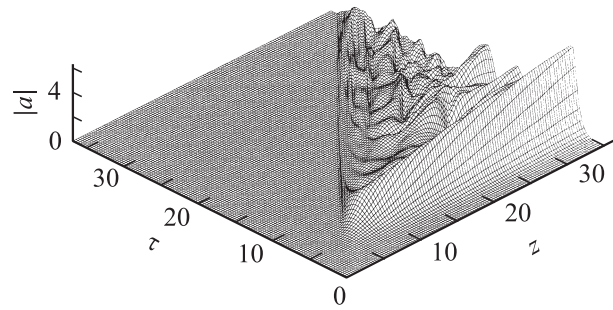


Рис. 4. Зависимость амплитуды поля от координаты Z и времени τ при усилении короткого начального импульса; $a_0 = 0.01$.

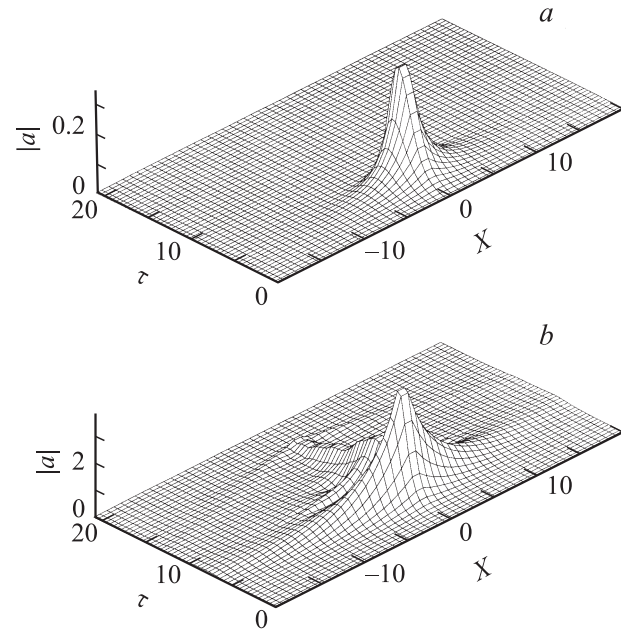


Рис. 5. Эволюция поперечной структуры при усилении короткого электромагнитного импульса: a — $Z = 7$, b — 17 ; $a_0 = 0.01$.

$0 < \tau < \tau_p$ задан соотношением

$$a_0(\tau) = a_0 \sin^2\left(\frac{\pi\tau}{\tau_p}\right).$$

Видно, что при небольших Z имеет место увеличение амплитуды усиливаемого импульса. При этом возникает эффективное запаздывание времени прихода в заданное сечение Z пиковой амплитуды поля от величины, рассчитываемой по распространению падающего импульса с групповой скоростью. При дальнейшем увеличении длины области взаимодействия происходит разделение усиленного сигнала на узкий импульс большой амплитуды и последующие хаотические колебания, амплитуда которых существенно меньше пиковой. При этом увеличение пиковой мощности импульса, как и в описанной выше ситуации, пропорционально длине системы.

Эволюция поперечной структуры поля усиливаемого импульса показана на рис. 5. На линейной стадии

процесса усиления вследствие канализирующих свойств ленточного электронного потока формируется поперечное распределение поля, амплитуда которого достаточно быстро спадает в поперечном направлении с характерным декрементом $\kappa_{\perp} \sim 1/\lambda\sqrt{G}$. На стадии разделения основного импульса и сопутствующих шумов, т.е. при $Z > 10$, происходит заметное поперечное уширение профиля усиливаемого импульса.

3. Двумерная модель генератора типа ЛОВ с канализацией излучения ленточным электронным потоком

На основании развитого в разд. 1 подхода рассмотрим двумерную модель генератора типа ЛОВ, в котором излучаемая волна распространяется навстречу поступательному движению стационарного электронного потока ленточной геометрии. Предположим, что поле накачки представляет собой статическое поле плоского ондулятора. Соответственно условие синхронизма имеет вид

$$\omega_1 + h_1 v_{\parallel 0} = h_2 v_{\parallel 0}, \quad (22)$$

где $h_2 = 2\pi/d$, d — период ондулятора.

В случае относительно малых изменений энергии электронов рассматриваемый процесс в нормированных переменных, использованных ранее при записи уравнений (13), (14), описывается следующей системой самосогласованных уравнений:

$$i \frac{\partial^2 a}{\partial X^2} + \frac{\partial a}{\partial Z} = 2i\delta(X)J, \quad (23)$$

$$\left(-\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{\partial}{\partial \tau}\right)^2 \theta = \text{Im}(a^* e^{i\theta}). \quad (24)$$

Граничные условия в генераторах типа ЛОВ для поля и электронов задаются на разных концах пространства взаимодействия

$$a|_{Z=L} = 0, \quad \theta|_{Z=0} = \theta_0 \in [0, 2\pi),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial Z} + \frac{1}{v_{\parallel}} \frac{\partial}{\partial \tau}\right) \theta|_{Z=0} = 0. \quad (25)$$

На рис. 6 приведены результаты численного моделирования уравнений (23), (24) при различных значениях приведенной длины пространства взаимодействия L . При $L < 2.2$ в системе не превышен порог генерации, и колебания затухают. В области длин $2.3 < L < 3$ устанавливается стационарный одночастотный режим генерации. Далее в области $4 < L < 6$ наблюдается режим периодической автомодуляции. С дальнейшим ростом L реализуется стохастический режим генерации, когда малые изменения параметров приводят к значительным изменениям структуры электромагнитного поля в системе.

Поперечное распределение поля на пушечном конце области взаимодействия ($Z = 0$) представлено на рис. 7.

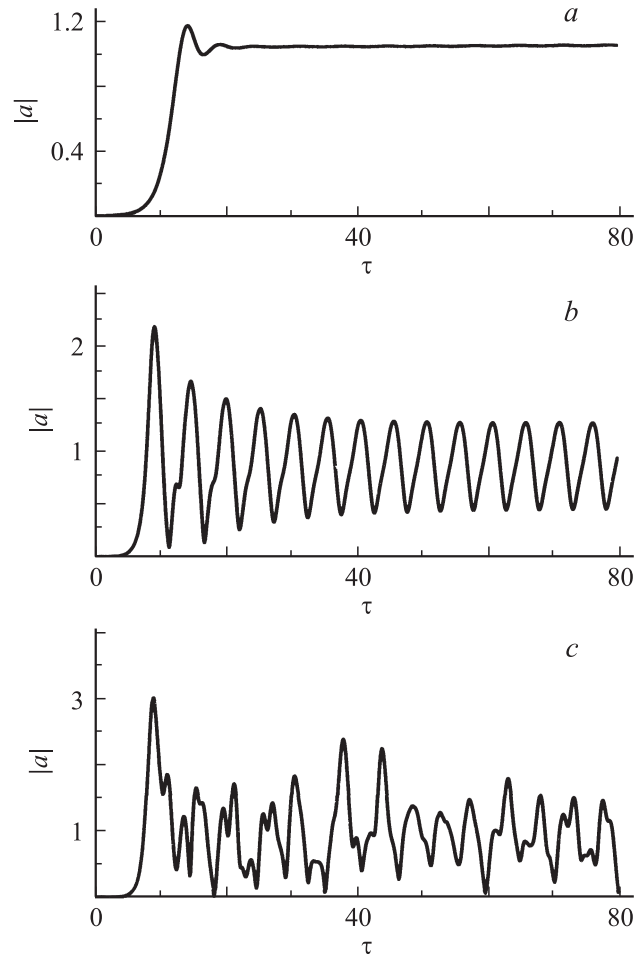


Рис. 6. Зависимость амплитуды, волны на выходе из пространства взаимодействия в генераторе встречной волны: *a* — стационарный режим генерации, $L = 3$; *b* — режим периодической автомодуляции, $L = 5$; *c* — режим хаотической автомодуляции, $L = 9$.

Отметим, что профиль амплитуды поля локализован вблизи плоскости $X = 0$. Таким образом, реализуется режим канализации излучения электронным потоком. Характерный масштаб спада поля в поперечном направлении определяется фактором $\kappa_{\perp} \sim 1/\lambda\sqrt{G}$.

4. Коллективное ускорение протяженного электронного сгустка ленточной геометрии при воздействии мощной волны накачки

Рассмотрим ускорение протяженного электронного сгустка ленточной геометрии в процессе вынужденного рассеяния попутной (относительно поступательного движения частиц) волны накачки во встречную сигнальную волну в условиях синхронизма

$$\omega_2 + h_2 v_{\parallel 0} = \omega_1 - h_1 v_{\parallel 0}. \quad (26)$$

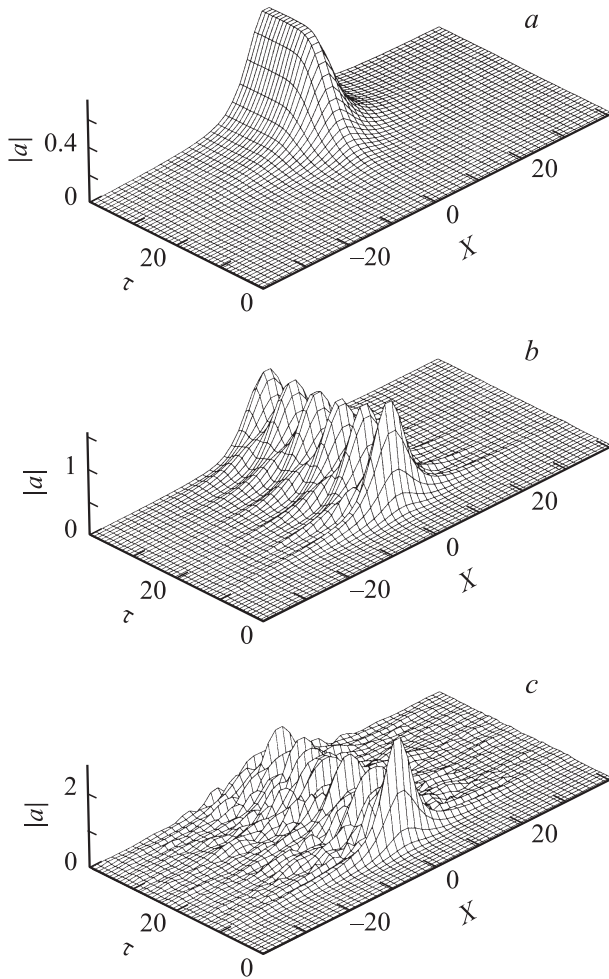


Рис. 7. Эволюция поперечной структуры поля в выходном сечении в генераторе встречной волны в различных режимах: a — $L = 2.5$; b — 4 ; c — 8 .

Из законов сохранения энергии и числа квантов следует, что в таком процессе частота рассеянной волны ниже частоты волны накачки, а процесс рассеяния должен сопровождаться увеличением средней энергии частиц. Исследуем процесс ускорения в рамках двумерной модели электронно-волнового взаимодействия с использованием „полных“ ультрарелятивистских уравнений движения частиц (5), (6). Важно подчеркнуть, что в ультрарелятивистском приближении даже значительные изменения энергии электронов не приводят к заметному изменению их скорости, и таким образом условие синхронизма (26) может поддерживаться на значительной дистанции взаимодействия. В предположении, что амплитуда волны накачки постоянна, $|A_2| \gg |A_1|$, процесс коллективного ускорения опишется следующей самосогласованной системой уравнений:

$$i \frac{\partial^2 a}{\partial X^2} - \frac{\partial a}{\partial Z} = -i \delta(X) \frac{Q}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}}{E} d\theta_0, \quad (27)$$

$$\frac{\partial E}{\partial Z} + \frac{\partial E}{\partial \tau} = \frac{\alpha_2^2}{E} \text{Im}(a^* e^{i\theta}), \quad (28)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial Z} + \frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \left(\left(\frac{1}{E^2} - 1 \right) \left(1 + \frac{\alpha_2^2}{2} \right) - \frac{\alpha_2^2}{E^2} \text{Re}(a^* e^{i\theta}) \right), \quad (29)$$

где $E = \gamma/\gamma_0$, $Q = 2\gamma_0 \omega_b^2 b / \omega_c c (1 + \alpha_2^2/2)^{1/2}$; $\tau = (\omega_c/4\gamma_0^2)(t - z/c)$, $Z = \omega_c z / 2\gamma_0^2 c$, $X = x \sqrt{h_1 \omega_c / \gamma_0^2 c}$ — нормированные время и координаты, $a = A_1/A_2$.

Предположим, что процесс инициируется малыми начальными флуктуациями плотности частиц, задаваемыми параметром $\tau \ll 1$, и представим граничные и начальные условия уравнений (27)–(29) в виде

$$a|_{Z=\tau} = 0, \quad \theta|_{Z=0} = \theta_0 + r \cos \theta_0, \\ \theta_0 \in [0, 2\pi), \quad E|_{Z=0} = 1. \quad (30)$$

Графики зависимостей средней и максимальной энергии в сгустке при различных значениях параметров представлены на рис. 8, из которого следует, что при параметрах моделирования: $Q = 0.5$, $\alpha_i = 1$ достигается 10–15-кратное увеличение средней энергии частиц.

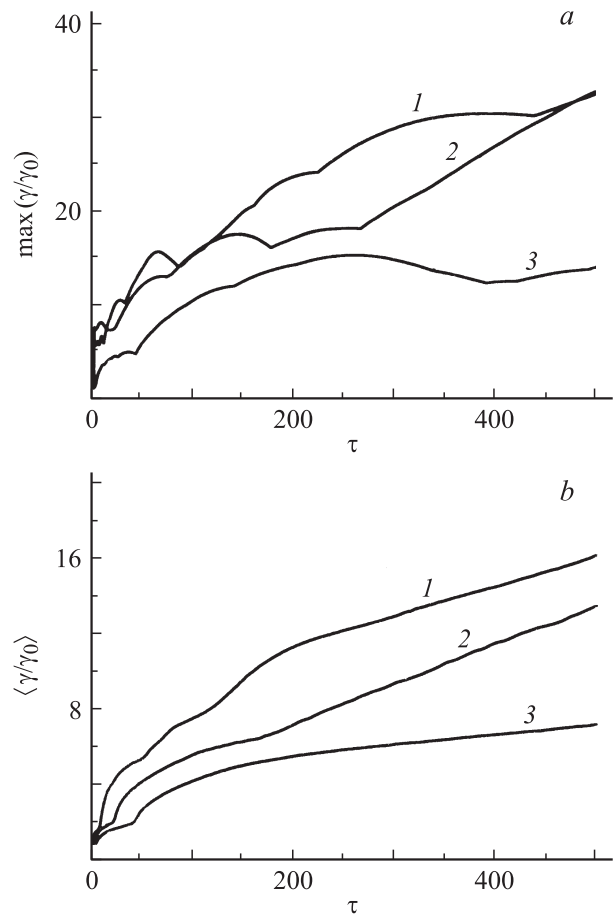


Рис. 8. Зависимости максимальной (а) и средней (б) энергии электронов от времени в процессе ускорения короткого электронного сгустка ($\tau_p = 2$) интенсивной волной: 1 — $Q = 0.3$, $\alpha_i = 4$; 2 — $Q = 0.4$, $\alpha_i = 2$; 3 — $Q = 0.5$, $\alpha_i = 1$.

Считая длину волны накачки $\lambda = 3$ см, а начальную энергию электронов $\gamma_0 = 3$, приведем оценку физических параметров процесса коллективного ускорения. Величина $\alpha_2 = e|A_2|mc^2 = 1$ соответствует плотности потока энергии волны накачки $S = \pi m^2 c^5 \alpha_2^2 / \lambda^2 e^2 \approx 1.5$ GW/cm². Значение $Q = 0.5$ соответствует погонной плотности тока $I = \rho_0 b c \approx 0.5$ kA/cm, величина $\tau_p = 2$ соответствует длине сгустка 20 см. Тогда, согласно результатам моделирования, средняя энергия частиц возрастет примерно в 10 раз на длине $L = 100\lambda\gamma_0^2/\pi \approx 10$ м. При этом для отдельных электронных фракций имеет место 30-кратное увеличение энергии, т.е. темп ускорения для этих частиц составляет 10 MeV/m.

Приложение

Применяя преобразование Лапласа по продольной координате $a_p(X, \tau) = \int_0^\infty A e^{-pZ} dZ$, $j_p(\tau) = \int_0^\infty j e^{-pZ} dZ$ и теорему о свертке, из уравнения (17) с учетом (16) и (18) можно получить выражение для образа Лапласа в следующем виде:

$$j_p(\tau) = \frac{a_0 \sqrt{i}}{\sqrt{p}} \left(\frac{e^{-p\tau + \tau/\sqrt[4]{ip}}}{2(p\sqrt[4]{ip} + 1)} - \frac{e^{-p\tau - \tau/\sqrt[4]{ip}}}{2(p\sqrt[4]{ip} - 1)} - \frac{1}{p^2 \sqrt{i} p - 1} \right), \quad (П1)$$

где ветви многозначных корней выбраны так, что

$$\text{Re}(\sqrt{p}) > 0, \quad |\arg(\sqrt[4]{p})| < \frac{\pi}{4}. \quad (П2)$$

Амплитуду электромагнитного поля и синхронной гармоники тока можно найти из обратного преобразования Лапласа. Исследуем асимптотическое поведение решения в области $Z - \tau \gg 1$, представив его в виде

$$j(\tau, Z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} j_p e^{pZ} dp = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{d-ib}^{d+ib} j_p e^{pZ} dp. \quad (П3)$$

Правую часть (П3) можно выразить через интеграл по контуру C на комплексной плоскости, состоящему из отрезка прямой $\text{Re}(p) = d$, дуги окружности C_R достаточно большого радиуса R , участков разреза I, II и дуги окружности C_r малого радиуса r (рис. 9). Можно также показать, что в области $Z - \tau \gg 1$ из всего контура существенный вклад дает только интеграл по участку C_r , а из всех слагаемых в выражении (П1) можно учитывать только слагаемое с экспонентой $e^{pZ - p\tau - \tau/\sqrt[4]{ip}}$:

$$|j(\tau, Z)| \approx \left| \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} \frac{a_0}{\sqrt{p}} \frac{e^{p(Z-\tau) - \tau/\sqrt[4]{ip}}}{2(p\sqrt[4]{ip} - 1)} dp \right|. \quad (П4)$$

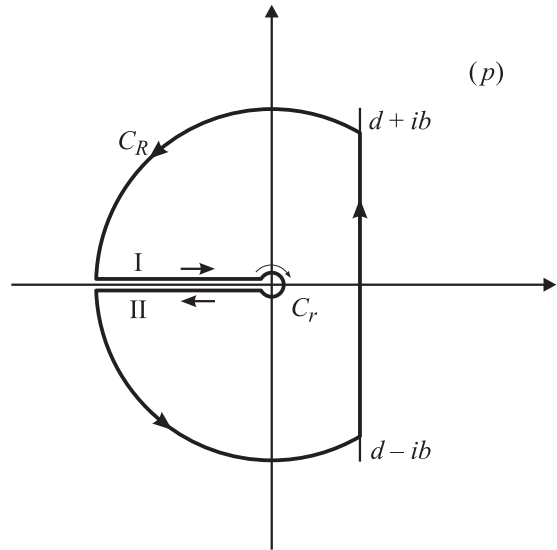


Рис. 9. Контур интегрирования на комплексной плоскости при обратном преобразовании Лапласа.

Введя обозначения $\xi = p(Z - \tau)^{4/5} \tau^{-4/5}$, $\nu = \tau^{4/5} \times (Z - \tau)^{1/5}$, $\Phi(\xi) = \xi + 1/\sqrt[4]{i\xi}$, получим

$$|j(\tau, Z)| \approx \left| \frac{a_0}{2\pi} \int_{C_r} \frac{\tau^{2/5}}{(Z - \tau)^{2/5}} \frac{\exp(\nu \Phi(\xi))}{2\sqrt{\xi} (\xi \sqrt[4]{i\xi} \tau / (Z - \tau) - 1)} d\xi \right|. \quad (П5)$$

Из всех экстремумов функции $\Phi(\xi)$ условию (П2) удовлетворяет только одна точка

$$\xi_0 = (1/4)^{4/5} e^{-i\pi/10}. \quad (П6)$$

Тогда, сохранив значение интеграла (П4), контур C_r можно деформировать в перевальный контур C_{R_0} , являющийся дугой окружности с центром в начале координат, проходящей через точку перевала. Отметим, что контур C_r при деформации не должен пересекать особых точек подынтегральной функции. Это условие приводит к соотношению $5\tau < 4Z$. Контур C_{R_0} является перевальным, и максимум функции $\text{Re}(\Phi(\xi))$ достигается в точке ξ_0 . Следовательно, можно использовать метод перевала для приближенного вычисления интеграла (П4), что приводит к выражению для амплитуды синхронной гармоники тока (20). Выражение для амплитуды поля (21) получается аналогичным образом.

Список литературы

- [1] Sharlemann E.T., Sessler A.M., Wurtele J.S. // Phys. Rev. Lett. 1985. Vol. 54. N 17. P. 1925–1929.
- [2] Moore G.T. // Nucl. Instr. Meth. Phys. Res. 1986. Vol. A250. P. 381–385.
- [3] Ковалев Н.Ф., Петелин М.И. // Релятивистская высокочастотная электроника. Горький: ИПФ АН СССР, 1981. Вып. 2. С. 204–236.
- [4] Ginzburg N.S., Kovalev N.F., Rusov N.Yu. // Opt. Commun. 1983. Vol. 46. N 4. P. 300–306.

- [5] *Ginzburg N.S., Gorshkova M.A., Sergeev A.S.* // Opt. Commun. 1990. Vol. 76. N 1. P. 69–74.
- [6] *Гинзбург Н.С., Зотова И.В., Сергеев А.С.* // ЖЭТФ. 1993. Т. 104. Вып. 6. С. 3940–3948.
- [7] *Bonifacio R., Piovella N., McNeil B.W.J.* // Phys. Rev. A. 1991. Vol. 44. N 6. P. 3441–3444.
- [8] *Гинзбург Н.С., Зотова И.В., Сергеев А.С.* // Письма в ЖЭТФ. 1994. Т. 60. Вып. 7. С. 501–504.
- [9] *Ginzburg N.S., Zotova I.V., Novozhilova Yu.V. et al.* // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. N 3. P. 3297–3304.
- [10] *Гинзбург Н.С., Зотова И.В., Сергеев А.С.* // Письма в ЖТФ. 1999. Т. 25. Вып. 20. С. 25–31.
- [11] *Robb G.R.M., Ginzburg N.S., Phelps A.D.R., Sergeev A.S.* // Phys. Rev. Lett. 1996. Vol. 77. N 8. P. 1492–1495.
- [12] *Братман В.Л., Гинзбург Н.С., Петелин М.И.* // ЖЭТФ. 1979. Т. 76. Вып. 3. С. 930–943.