01;03

О нелинейных поправках к частотам неосесимметричных мод объемно заряженной струи диэлектрической жидкости

© Н.В. Воронина, С.О. Ширяева, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 12 июля 2007 г.)

В аналитических асимптотических расчетах третьего порядка малости по амплитуде осцилляций объемно однородно заряженной струи идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости получено выражение для формы струи как функции времени, когда начальная деформация равновесной поверхности определяется одной модой, в общем случае неосесимметричной. Найдены аналитические выражения для нелинейных поправок к частотам и положения внутренних нелинейных вырожденных трехмодовых и четырехмодовых резонансов.

PACS: 47.10.-g

Введение

Исследование осцилляций и распада на отдельные капли струй жидкости представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в различных академических, технических и технологических аспектах [1,2]. Бо́льшая часть теоретических исследований была проведена в линейном по амплитуде деформации приближении и выполнена для осесимметричных струй (см., например, [1,2]). Теоретическое исследование нелинейных осцилляций цилиндрических струй жидкости, начавшееся во второй половине прошлого века [3–5] и продолжающееся до настоящего времени, ориентировано на изучение нелинейных эффектов, связанных с осцилляциями струй и дроблением их на капли [1–13]. Оно выполняется как численными [1,2,6–8], так и аналитическими асимпотическими [1–5,9–13] методами. Причем в [9–13] нелинейный асимптотический анализ проведен для общей ситуации неосесимметричных волн на поверхности струи идеально проводящей жидкости. В реальных ситуациях часто приходится сталкиваться со струями плохо проводящих жидкостей, когда заряд распределен по объему струи. В этой связи представляется актуальным проведение аналитического асимптотического исследования нелинейных неосесимметричных волн на поверхности объемно заряженной диэлектрической струи с точностью до третьего порядка малости включительно, что позволит отыскать нелинейные поправки к частотам мод и положения новых четырехмодовых резонансов.

Постановка задачи

Рассмотрим бесконечную цилиндрическую струю радиусом R идеальной несжимаемой жидкости с массовой плотностью ρ, диэлектрической проницаемостью ε_d и коэффициентом поверхностного натяжения γ, движущуюся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью $\mathbf{U}_0$. В рамках модели „вмороженного“ заряда примем, что электрический заряд распределен равномерно с объемной плотностью μ. Поскольку рассматриваем бесконечную струю, то для упрощения задачи перейдем в инерциальную систему координат, движущуюся вместе со струей с такой же скоростью $\mathbf{U}_0$. Очевидно, что в такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $\mathbf{U}(\mathbf{r},t)$ полностью определяется возможными (имеющими, например, тепловую природу) капиллярными осцилляциями ее поверхности и при обезразмеривании на R, γ, ρ является величиной того же порядка малости, что и амплитуда тепловых осцилляций, которая принимается весьма малой по сравнению с радиусом.

Будем исследовать закономерности реализации капиллярных осцилляций струи и условия реализации неустойчивости ее поверхности (в смысле дробления струи на отдельные капли). Все расчеты проведем в цилиндрической системе координат r, ϕ, z, орт $\mathbf{n}_z$, которой совпадает по направлению с осью симметрии струи. Тогда уравнение цилиндрической поверхности струи, возмущенной тепловым капиллярным волновым движением, запишется в виде

$$r(\phi,z,t)=R+\xi(\phi,z,t); \quad |\xi|\ll R,$$

где $\xi(\phi,z,t)$ — возмущение поверхности струи, вызванное ее осцилляциями.

Математическая формулировка обсуждаемой задачи в рамках модели потенциального течения состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской)

$$\Delta\Psi=0, \quad \Delta\Phi_{\mathrm{ex}}=0, \quad \Delta\Phi_{\mathrm{in}}=-4\pi\frac{\mu}{\varepsilon_d}, \tag{1}$$

условий ограниченности

$$r\to 0: \qquad |\mathbf{U}|<\infty, \quad |\nabla\Phi_{\mathrm{in}}|<\infty;$$
$$r\to\infty: \qquad |\nabla\Phi_{\mathrm{ex}}|\to 0, \tag{2}$$

гидродинамических граничных условий на свободной поверхности струи
кинематического

$$r = R + \xi: \quad -\frac{\partial \xi}{\partial t} + (\nabla\Psi)\cdot\nabla\big[r - (R + \xi(\phi, z, t))\big] = 0; \tag{3}$$

динамического для нормальной компоненты тензора напряжений

$$r = R + \xi: \qquad -P(\mathbf{r}, t) + P_0 + P_\gamma - P_e = 0; \tag{4}$$

и граничных условий для электрического поля

$$r = R + \xi: \qquad \Phi_{\text{in}} = \Phi_{\text{ex}}, \quad \varepsilon_d \frac{\partial \Phi_{\text{in}}}{\partial n} = \frac{\partial \Phi_{\text{ex}}}{\partial n}. \tag{5}$$

В выписанной математической формулировке задачи $P(\mathbf{r}, t) = -\rho\left[\frac{\partial\Psi}{\partial t} + \frac{1}{2}(\nabla\Psi)^2\right]$ — гидродинамическое давление, $P_e(\mathbf{r}, t)$ — давление электрического поля, $P_\gamma(\mathbf{r}, t) = \gamma(\nabla\cdot\mathbf{n})$ — давление сил поверхности натяжения, P_0 — постоянное давление внешей среды, $\Psi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал поля скоростей, $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — электростатический потенциал, нижние индексы „ex“ и „in“ характеризуют внешнее поле и поле внутри струи соответственно, $\mathbf{n}$ — орт нормали к свободной поверхности струи.

Данную краевую задачу следует дополнить условием сохранения объема участка струи, длина которого равна длине волны λ

$$\int\limits_V r\,dr\,d\phi\,dt = \pi R^2\lambda; \quad V = \begin{cases} 0 \le r \le R + \xi(\phi, z, t); \\ 0 \le \phi \le 2\pi; \\ z_0 \le z \le z_0 + \lambda. \end{cases} \tag{6}$$

Кроме того, необходимо задать еще начальные условия, первое из которых представляет собой начальное возмущение поверхности струи

$$r(\phi, z, 0) = R + \varepsilon\big[\zeta^{(+)}(0)\exp(im\phi) + \zeta^{(-)}(0)\exp(im\phi)\big]\exp(ikz) + \mathrm{O}(\varepsilon^2).$$

Здесь и далее не выписываются слагаемые, комплексно сопряженные к выписанным. Для простоты ограничимся рассмотрением случая, когда форма поперечного сечения струи определяется одной гармоникой. Второе начальное условие обычно выбирается на финальной стадии решения таким образом, чтобы получающееся решение приняло наиболее простой вид.

Для упрощения дальнейших расчетов перейдем к безразмерным переменным, полагая $R = \gamma = \rho = 1$ и сохраняя за всеми величинами их прежние обозначения.

Решение сформулированной задачи будем искать в виде разложения по малому параметру ε, в качестве которого выберем отношение амплитуды волны к радиусу струи. Используя метод многих масштабов и ограничиваясь точностью до третьего порядка малости включительно, представим искомые функции ξ, Ψ, Φ_{in} и Φ_{ex} в виде рядов по степеням ε, полагая одновременно, что их эволюция во времени определяется тремя временны́ми масштабами: основным $T_0 = t$ и более медленными $T_1 = \varepsilon t$ и $T_2 = \varepsilon^2 t$,

$$\xi(\phi, z, t) = \varepsilon\xi^{(1)}(\phi, z, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2\xi^{(2)}(\phi, z, T_0, T_1) + \varepsilon^3\xi^{(3)}(\phi, z, T_0) + \mathrm{O}(\varepsilon^4);$$

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \varepsilon\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2\Psi^{(2)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) + \varepsilon^3\Psi^{(3)}(\mathbf{r}, T_0) + \mathrm{O}(\varepsilon^4); \tag{7}$$

$$\Phi_{\text{in}}(\mathbf{r}, t) = \Phi_{\text{in}}^{(0)}(r) + \varepsilon\Phi_{\text{in}}^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2\Phi_{\text{in}}^{(2)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) + \varepsilon^3\Phi_{\text{in}}^{(3)}(\mathbf{r}, T_0) + \mathrm{O}(\varepsilon^4);$$

$$\Phi_{\text{ex}}(\mathbf{r}, t) = \Phi_{\text{ex}}^{(0)}(r) + \varepsilon\Phi_{\text{ex}}^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2) + \varepsilon^2\Phi_{\text{ex}}^{(2)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) + \varepsilon^3\Phi_{\text{ex}}^{(3)}(\mathbf{r}, T_0) + \mathrm{O}(\varepsilon^4).$$

Считая, что волны, распространяющиеся по поверхности струи, бегут в положительном направлении оси OZ, примем, что форма свободной поверхности жидкости в произвольный момент времени имеет вид

$$r = 1 + \varepsilon\big[\zeta^{(+)}(T_1, T_2)\exp(im\phi) + \zeta^{(-)}(T_1, T_2)\exp(-im\phi)\big]\exp(i\theta) + \mathrm{O}(\varepsilon^2); \tag{8}$$

$\theta \equiv kz - \omega T_0$, где $\omega \equiv \omega_m(k)$ — частота волны начального возмущения с волновым числом k и азимутальным числом m, $\zeta^{(\pm)}(T_1, T_2)$ — пока неизвестные комплексные функции, зависящие от медленных масштабов времени T_1 и T_2.

Подстановка разложений (7) в уравнения (1)–(6), использование оператора

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial T_0} + \varepsilon\frac{\partial}{\partial T_1} + \varepsilon^2\frac{\partial}{\partial T_2}$$

для вычисления производной по времени и разложение условий (3)–(6) в ряд Тейлора в окрестности равновесной цилиндрической поверхности $r = 1$ с последующим выделением и суммированием слагаемых при одинаковых степенях ε (с приравниванием их нулю) позволяют получить задачи различных порядков малости.

В нулевом приближении имеем равновесное состояние, которому соответствует неподвижный (в движущейся системе координат) цилиндрический столб, а также известное выражение для давления электрического поля на поверхность равномерно заряженного бесконечного цилиндра фиксированного радиуса. Электрическое поле внутри и вне невозмущенной струи определяется потенциалами

$$\Phi_{\text{in}}^{(0)} = -\frac{\pi\mu r^2}{\varepsilon_d}; \quad \Phi_{\text{ex}}^{(0)} = -\frac{\pi\mu}{\varepsilon_d} - 2\pi\mu\ln r.$$

Задача первого порядка малости

Математическая формулировка задачи первого порядка малости будет состоять из уравнений

$$\Delta\Psi^{(1)} = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{ex}}^{(1)} = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{in}}^{(1)} = 0;$$

$$r \to 0: \qquad |\nabla\Psi^{(1)}| < \infty, \quad |\nabla\Phi_{\text{in}}^{(1)}| \to 0;$$

$$r \to \infty: \qquad |\nabla\Phi_{\text{ex}}^{(1)}| \to 0;$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_0} = 0; \quad \int\limits_{z_0}^{z_0+\lambda}\int\limits_0^{2\pi} \xi^{(1)}(\phi, z, t)\,d\phi\,dz = 0;$$

$$\Phi_{\text{in}}^{(1)} + \frac{d\Phi(0)_{\text{in}}}{dr}\xi^{(1)} = \Phi_{\text{ex}}^{(1)} + \frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr}\xi^{(1)};$$

$$\varepsilon_d\left(\frac{d^2\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^2}\xi^{(1)} + \frac{\partial\Phi_{\text{in}}^{(1)}}{\partial r}\right) = \frac{d^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2}\xi^{(1)} + \frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r};$$

$$-\left(\xi^{(1)} + \frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial z^2}\right) + \mu\left(\Phi_1^{\text{in}} + \frac{d\Phi_0^{\text{in}}}{dr}\xi^{(1)}\right)$$

$$+ \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial T_0} - \frac{\varepsilon_d - 1}{4\pi\varepsilon_d}\frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr}\left(\frac{d^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2}\xi^{(1)} + \frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r}\right) = 0.$$

На основании (8) для функции поправки первого порядка малости к профилю волны $\xi^{(1)}(\phi, z, T_0, T_1, T_2)$ получим выражение

$$\xi^{(1)} = \big[\xi^{(+)}(T_1, T_2)\exp(im\phi) + \xi^{(-)}(T_1, T_2)\exp(-im\phi)\big]\exp(i\theta). \tag{9}$$

Явный вид функции $\xi^{(\pm)}(T_1, T_2)$ может быть определен лишь при анализе задач следующих порядков малости. Несложно убедиться, что функция $\xi^{(1)}$ в виде (9) удовлетворяет условию неизменности объема (6).

Принимая во внимание, что поправки первого порядка малости к потенциалу поля скоростей $\Psi^{(1)}$ и электростатическому потенциалу $\Phi_{\text{in}}^{(1)}$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(1)}$ связаны с функцией $\xi^{(1)}$ кинематическим граничным условием (3) и граничными условиями (5), будем искать выражения для $\Psi^{(1)}$, $\Phi_{\text{in}}^{(1)}$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(1)}$ методом разделения переменных, представив их в виде

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2) = I_m(kr)\big[B^{(+)}(T_1, T_2)\exp(im\phi) + B^{(-)}(T_1, T_2)\exp(-im\phi)\big]\exp(i\theta);$$

$$\Phi_{\text{in}}^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2) = I_m(kr)\big[C^{(+)}(T_1, T_2)\exp(im\phi) + C^{(-)}(T_1, T_2)\exp(-im\phi)\big]\exp(i\theta);$$

$$\Phi_{\text{ex}}^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2) = K_m(kr)\big[D^{(+)}(T_1, T_2)\exp(im\phi) + D^{(-)}(T_1, T_2)\exp(-im\phi)\big]\exp(i\theta), \tag{10}$$

где зависимость поправок к потенциалам $\Psi^{(1)}$, $\Phi_{\text{in}}^{(1)}$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(1)}$ от координаты r определяется из уравнений Лапласа (1) и должна удовлетворять условиям ограниченности (2). Подставив (10) и (9) в (3), (5) и приравняв коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, получим

$$B^{(\pm)}(T_1, T_2) = \frac{-i\omega\xi^{(\pm)}(T_1, T_2)}{k\,I'_m(k)};$$

$$C^{(\pm)}(T_1, T_2) = \frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d}g_{\text{in}}\frac{\xi^{(\pm)}(T_1, T_2)}{I_m(k)};$$

$$D^{(\pm)}(T_1, T_2) = 2\pi\mu g_{\text{ex}}\frac{\xi^{(\pm)}(T_1, T_2)}{K_m(k)};$$

$$G_m(x) \equiv \frac{x\,I'_m(x)}{I_m(x)}; \quad H_m(x) \equiv \frac{x\,K'_m(x)}{K_m(x)};$$

$$g_{\text{in}} \equiv \frac{2\varepsilon_d + (\varepsilon_d - 1)H_m(k)}{\varepsilon_d G_m(k) - H_m(k)}; \quad g_{\text{ex}} \equiv \frac{2 + (\varepsilon_d - 1)G_m(k)}{\varepsilon_d G_m(k) - H_m(k)};$$

$I_m(x)$, $K_m(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода; штрихами обозначены производные функций Бесселя по их аргументу.

Таким образом, выражения для поправок первого порядка малости к потенциалу поля скоростей $\Psi^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2)$ и к электростатическим потенциалам $\Phi_{\text{in}}^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2)$, $\Phi_{\text{ex}}^{(1)}(\mathbf{r}, T_0, T_1, T_2)$ имеют вид

$$\Psi^{(1)} = -i\omega\frac{I_m(kr)}{k\,I'_m(k)}\big[\xi^{(+)}(T_1, T_2)\exp(im\phi) + \xi^{(-)}(T_1, T_2)\exp(-im\phi)\big]\exp(i\theta);$$

$$\Phi_{\text{in}}^{(1)} = \frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d}g_{\text{in}}\frac{I_m(kr)}{I_m(k)}\big[\xi^{(+)}(T_1, T_2)\exp(im\phi) + \xi^{(-)}(T_1, T_2)\exp(-im\phi)\big]\exp(i\theta);$$

$$\Phi_{\text{ex}}^{(1)} = 2\pi\mu g_{\text{ex}}\frac{K_m(kr)}{K_m(k)}\big[\xi^{(+)}(T_1, T_2)\exp(im\phi) + \xi^{(-)}(T_1, T_2)\exp(-im\phi)\big]\exp(i\theta). \tag{11}$$

Динамическое граничное условие (4) после подстановки в него решения (11) и (9) позволяет получить дисперсионное уравнение, связывающее волновое k и азимутальное m числа с частотой колебаний $\omega_m(k)$

$$\omega_m^2(k) = \frac{G_m(k)}{\varepsilon_d f_m(k)}\big\{(k^2 + m^2 - 1)\varepsilon_d f_m(k) + W\big[\varepsilon_d\big(4 + (\varepsilon_d - 3)G_m(k)\big) + \big(3\varepsilon_d - 1 + (\varepsilon_d - 1)^2 G_m(k)\big)H_m(k)\big]\big\}; \tag{12}$$

$$f_m(x) \equiv \varepsilon_d G_m(x) - H_m(x); \quad W = \pi\mu^2.$$

В пределе $\varepsilon_d \to \infty$ и $\mu = 2\chi$, где χ — плотность поверхностного заряда струи электронной жидкости, выражение (12) сводится к дисперсионному уравнению для нелинейных осцилляций заряженной струи электропроводной жидкости, полученному в [10] (при таком переходе предполагается неизменным заряд, приходящийся на единицу длины струи).

Задача второго порядка малости

Математическая формулировка задачи второго порядка малости имеет вид

$$\Delta\Psi^{(2)} = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{ex}}^{(2)} = 0; \quad \Delta\Phi_{\text{in}}^{(2)} = 0;$$

$$r \to 0: \qquad |\nabla\Psi^{(2)}| < \infty, \quad |\nabla\Phi_{\text{in}}^{(2)}| \to 0;$$

$$r \to \infty: \qquad |\nabla\Phi_{\text{ex}}^{(2)}| \to 0;$$

$$r = 1: \quad \frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial T_0} = \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_1} - \frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial r^2}\xi^{(1)} + \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi} + \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z};$$

$$\Phi_{\text{in}}^{(2)} - \Phi_{\text{ex}}^{(2)} + \left(\frac{d\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr} - \frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr}\right)\xi^{(2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2} - \frac{d^2\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^2}\right)\left(\xi^{(1)}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_{\text{in}}^{(1)}}{\partial r}\right)\xi^{(1)};$$

$$\left(\varepsilon_d\frac{d^2\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^2} - \frac{d^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2}\right)\xi^{(2)} + \varepsilon_d\frac{\partial\Phi_{\text{in}}^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(2)}}{\partial r} = \frac{1}{2}\left(\frac{d^3\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^3} - \varepsilon_d\frac{d^3\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^3}\right)\left(\xi^{(1)}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r^2} - \varepsilon_d\frac{\partial^2\Phi_{\text{in}}^{(1)}}{\partial r^2}\right)\xi^{(1)}$$
$$+ \frac{1}{2}\left(\varepsilon_d\frac{d\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr} - \frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr}\right)\left[\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\right)^2\right] + \left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right)\left(\varepsilon_d\Phi_{\text{in}}^{(2)} - \Phi_{\text{ex}}^{(2)}\right);$$

$$\xi^{(2)} + \frac{\partial^2\xi^{(2)}}{\partial\phi^2} + \frac{\partial^2\xi^{(2)}}{\partial z^2} - \mu\left(\Phi_{\text{in}}^{(2)} + \frac{d\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr}\xi^{(2)}\right) + \frac{\varepsilon_d - 1}{4\pi\varepsilon_d}\frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr}\left(\frac{d^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2}\xi^{(2)} + \frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(2)}}{\partial r}\right) - \frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial T_0}$$
$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\right)^2 - \left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\right)^2\right] + 2\xi^{(1)}\frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial\phi^2} + \mu\left(\frac{\partial\Phi_{\text{in}}^{(1)}}{\partial r}\xi^{(1)} + \frac{1}{2}\frac{d^2\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^2}\left(\xi^{(1)}\right)^2\right) + \left(\xi^{(1)}\right)^2$$
$$- \frac{\varepsilon_d - 1}{8\pi\varepsilon_d}\left\{\left(\frac{d^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2}\xi^{(1)} + \frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r}\right)^2 + 2\frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr}\left(\frac{\partial^2\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r^2}\xi^{(1)} + \frac{1}{2}\frac{d^3\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^3}\left(\xi^{(1)}\right)^2\right)\right\}$$
$$- \frac{(\varepsilon_d - 1)^2}{8\pi\varepsilon_d}\frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr}\left\{\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z}\right) \times \left(\frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr}\xi^{(1)} + 2\Phi_{\text{ex}}^{(1)}\right)\right\} + \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial T_1} + \frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial T_0\partial r}\xi^{(1)}$$
$$- \frac{\varepsilon_d - 1}{8\pi}\left[\left(\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial\phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial z}\right)^2\right] + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\phi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial z}\right)^2\right];$$

$$\int\limits_{z_0}^{z_0+\lambda}\int\limits_{0}^{2\pi}\left[\xi^{(2)} + 0.5\left(\xi^{(1)}\right)^2\right]d\phi dz = 0.$$

Во втором порядке малости из системы (3)–(5) получим неоднородные уравнения для поправок второго порядка малости $\xi^{(2)}$, $\Psi^{(2)}$, $\Phi_{\text{in}}^{(2)}$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(2)}$. Правые части этих уравнений играют роль функций неоднородности и выражаются через решения нулевого и первого порядков малости. На основании вида неоднородностей, используя метод разделения переменных, получим поправки к решению второго порядка малости

$$\xi^{(2)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = \left[A_{22}^{(+)}(T_1)\exp(i2m\phi) + A_{22}^{(-)}(T_1)\exp(-i2m\phi) + A_{02}(T_1)\right]\exp(i2\theta)$$
$$+ \left[A_{11}^{(+)}(T_1)\exp(im\phi) + A_{11}^{(-)}(T_1)\exp(-im\phi)\right]\exp(i\theta) + A_{20}(T_1)\exp(i2m\phi) + A_{00}(T_1);$$

$$\Psi^{(2)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = I_{2m}(2kr)\left[B_{22}^{(+)}(T_1)\exp(i2m\phi) + B_{22}^{(-)}(T_1)\exp(-i2m\phi)\right]\exp(i2\theta)$$
$$+ I_0(2kr)B_{02}(T_1)\exp(i2\theta) + r^{2m}B_{20}(T_1)\exp(i2m\phi) + B_{00}(t) + I_m(kr)\left[B_{11}^{(+)}(T_1)\exp(im\phi) + B_{11}^{(-)}(T_1)\exp(-im\phi)\right]\exp(i\theta);$$

$$\Phi_{\text{in}}^{(2)}(\mathbf{r}, T_0, T_1) = I_{2m}(2kr)\left[C_{22}^{(+)}(T_1)\exp(i2m\phi) + C_{22}^{(-)}(T_1)\exp(-i2m\phi)\right]\exp(i2\theta)$$
$$+ I_0(2kr)C_{02}(T_1)\exp(i2\theta) + r^{2m}C_{20}(T_1)\exp(i2m\phi) + I_m(kr)\left[C_{11}^{(+)}(T_1)\exp(im\phi) + C_{11}^{(-)}(T_1)\exp(-im\phi)\right]\exp(i\theta);$$

$$\Phi_{\rm ex}^{(2)}(\mathbf{r},T_0,T_1)=K_{2m}(2kr)\big[D_{22}^{(+)}(T_1)\exp(i2m\phi)$$
$$+D_{22}^{(-)}(T_1)\exp(-i2m\phi)\big]\exp(i2\theta)$$
$$+K_0(2kr)D_{02}(T_1)\exp(i2\theta)+r^{-2m}D_{20}(T_1)\exp(i2m\phi)$$
$$+\ln rD_{00}(T_1)+K_m(kr)\big[D_{11}^{(+)}(T_1)\exp(im\phi)$$
$$+D_{11}^{(-)}(T_1)\exp(-im\phi)\big]\exp(i\theta)+f(t). \qquad (13)$$

Зависимость поправок к потенциалам $\Psi^{(2)}$, $\Phi_{\rm in}^{(2)}$ и $\Phi_{\rm ex}^{(2)}$ в выражении (13) от координаты r, так же как и в задаче первого порядка малости, несложно получить из уравнений Лапласа (1) с условиями ограниченности (2). После подстановки выражений (13) в граничные условия (3)–(5), приравняв коэффициенты при экспонентах с одинаковыми показателями, получим систему уравнений относительно функций $A_{nl}^{(\pm)}$, $B_{nl}^{(\pm)}$, $C_{nl}^{(\pm)}$ и $D_{nl}^{(\pm)}$, $n,l=\{\overline{0,2}\}$. Решив эту систему уравнений, находим зависимость $A_{nl}^{(\pm)}$ от комплексных амплитуд $\xi^{(\pm)}$, а также дифференциальное уравнение относительно $\xi^{(\pm)}$:

$$\partial\xi^{(\pm)}/\partial T_1=0,\quad A_{00}=-(|\xi^{(+)}|^2+|\xi^{(-)}|^2)/2;\quad A_{11}^{(\pm)}=0;$$

$$A_{22}^{(\pm)}=a_1(\xi^{(\pm)})^2;\ A_{02}=a_2 2\xi^{(+)}\xi^{(-)};\ A_{20}=a_3 2\xi^{(+)}\overline{\xi^{(-)}}, \qquad (14)$$

где черта обозначает комплексное сопряжение. Выражения для коэффициентов a_1, a_2 и a_3 приведены в „Приложении A“. Из уравнения (14) следует, что комплексные амплитуды $\xi^{(\pm)}$, а следовательно и величины $A_{nl}^{(\pm)}$, $B_{nl}^{(\pm)}$, $C_{nl}^{(\pm)}$ и $D_{nl}^{(\pm)}$, не зависят от временнóго масштаба T_1. Коэффициенты $B_{nl}^{(\pm)}$, $C_{nl}^{(\pm)}$ и $D_{nl}^{(\pm)}$ для определения поправок второго порядка малости к потенциалу поля скоростей и электростатическим потенциалам внутри и вне струи соответственно можно получить, зная a_i:

$$B_{22}^{(\pm)}\equiv -ib_1\big(\xi^{(\pm)}\big)^2=\frac{-i}{2k\,I'_{2m}(2k)}\,(2\omega a_1-X_1)\big(\xi^{(\pm)}\big)^2;$$

$$B_{00}(t)=2b_0\,A_{00}\,T_0;$$

$$B_{02}\equiv ib_2 2\xi^{(+)}\xi^{(-)}=\frac{-i}{2k\,I'_0(2k)}\,(2\omega a_2-X_2)\xi^{(+)}\xi^{(-)};$$

$$B_{11}^{(\pm)}=B_{20}=0;$$

$$C_{22}^{(\pm)}\equiv c_1\big(\xi^{(\pm)}\big)^2=\frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d I_{2m}(2k)f_{2m}(2k)}$$
$$\times\big\{\big[2\varepsilon_d+(\varepsilon_d-1)H_{2m}(2k)\big]a_1+\varepsilon_d$$
$$-2\varepsilon_d(k^2+m^2)(g_{\rm in}-g_{\rm ex})-H_{2m}(2k)M\big\}\big(\xi^{(\pm)}\big)^2;$$

$$C_{02}\equiv c_2 2\xi^{(+)}\xi^{(-)}=\frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d I_0(2k)f_0(2k)}$$
$$\times\big\{\big[2\varepsilon_d+(\varepsilon_d-1)H_0(2k)\big]a_2+\varepsilon_d$$
$$-2\varepsilon_d k^2(g_{\rm in}-g_{\rm ex})-H_0(2k)M\big\}2\xi^{(+)}\xi^{(-)};$$

$$C_{20}\equiv c_3 2\xi^{(+)}\overline{\xi^{(-)}}=\frac{\pi\mu}{m\varepsilon_d(\varepsilon_d+1)}$$
$$\times\big\{2\big[\varepsilon_d-m(\varepsilon_d-1)\big]a_3+\varepsilon_d$$
$$-2\varepsilon_d m^2(g_{\rm in}-g_{\rm ex})+2mM\big\}2\xi^{(+)}\overline{\xi^{(-)}};$$

$$C_{11}^{(\pm)}=0;$$

$$D_{22}^{(\pm)}\equiv d_1\big(\xi^{(\pm)}\big)^2=\frac{2\pi\mu}{K_{2m}(2k)f_{2m}(2k)}$$
$$\times\big\{\big[2+(\varepsilon_d-1)G_{2m}(2k)\big]a_1+1$$
$$-2(k^2+m^2)(g_{\rm in}-g_{\rm ex})-G_{2m}(2k)M\big\}\big(\xi^{(\pm)}\big)^2;$$

$$D_{11}^{(\pm)}=0;$$

$$D_{02}\equiv d_2 2\xi^{(+)}\xi^{(-)}=\frac{2\pi\mu}{K_0(2k)f_0(2k)}$$
$$\times\big\{\big[2+(\varepsilon_d-1)G_0(2k)\big]a_2+1$$
$$-2k^2(g_{\rm in}-g_{\rm ex})-G_0(2k)M\big\}2\xi^{(+)}\xi^{(-)};$$

$$D_{00}=0;$$

$$D_{20}\equiv d_3 2\xi^{(+)}\overline{\xi^{(-)}}=\frac{\pi\mu}{m(\varepsilon_d+1)}\big\{2\big[1+m(\varepsilon_d-1)\big]a_3$$
$$+1-2m^2(g_{\rm in}-g_{\rm ex})-2mM\big\}2\xi^{(+)}\overline{\xi^{(-)}};$$

$$f(t)=4\pi\mu\big(1-g_{\rm in}G_m(k)/\varepsilon_d+g_{\rm ex}H_m(k)\big)A_{00}; \qquad (15)$$
$$M\equiv 0.5(\varepsilon_d+1)-g_{\rm in}G_m(k)+\varepsilon_d g_{\rm ex}H_m(k).$$

Все вновь введенные обозначения приведены в „Приложении A“.

Следует отметить, что при предельном переходе к идеально проводящей жидкости ($\varepsilon_d\to 0$ и $\mu=2\chi$, где χ — плотность поверхностного заряда струи электропроводной жидкости) не все амплитудные коэффициенты a_i, b_i и d_i в выражениях (15) сводятся к соответствующим коэффициентам в выражениях для формы струи и потенциалов, полученных в [10] для случая электропроводной жидкости (коэффициенты c_i обращаются в нуль). Исключение составляют величины b_0 и D_{00}, что объясняется спецификой выбранной модели „вмороженного“ заряда.

Задача третьего порядка малости

Поправки $\Psi^{(3)}$, $\Phi_{\rm in}^{(3)}$ и $\Phi_{\rm ex}^{(3)}$ третьего порядка малости будут решениями уравнений Лапласа. Система неоднородных граничных и дополнительных условий к задаче в третьем порядке малости имеет громоздкий вид и вынесена в „Приложение B“. В третьем порядке малости помимо поправок $\xi^{(3)}$, $\Psi^{(3)}$, $\Phi_{\rm in}^{(3)}$ и $\Phi_{\rm ex}^{(3)}$ можно получить зависимость комплексных амилитуд от более медленного временнóго масштаба T_2 и нелинейную (зависящую от квадрата амплитуды волны) поправку к частоте волны.

Повторив те же шаги, что и в задаче второго порядка малости, для поправок третьего порядка малости: $\xi^{(3)}(\mathbf{r}, T_0)$, $\Psi^{(3)}(\mathbf{r}, T_0)$ и $\Phi^{(3)}(\mathbf{r}, T_0)$ можно найти аналитические выражения

$$\xi^{(3)} = \Big[\big(A_1^{(+)}\exp(i3m\varphi) + A_1^{(-)}\exp(-i3m\varphi)\big) + \big(A_2^{(+)}\exp(im\varphi) + A_2^{(-)}\exp(-im\varphi)\big)\Big]\exp(i3\theta) + \big[A_3^{(+)}\exp(i3m\varphi) + A_3^{(-)}\exp(-i3m\varphi)\big]\exp(i\theta) + \big[A_4^{(+)}\exp(im\varphi) + A_4^{(-)}\exp(-im\varphi)\big]\exp(i\theta) + A_5;$$

$$\Psi^{(3)} = I_{3m}(3kr)\big[B_1^{(+)}\exp(i3m\varphi) + B_1^{(-)}\exp(-i3m\varphi)\big]\exp(i3\theta) + I_m(3kr)\big[B_2^{(+)}\exp(im\varphi) + B_2^{(-)}\exp(-im\varphi)\big]\exp(i3\theta) + I_{3m}(kr)\big[B_3^{(+)}\exp(i3m\varphi) + B_3^{(-)}\exp(-i3m\varphi)\big]\exp(i\theta) + I_m(kr)\big[B_4^{(+)}\exp(im\varphi) + B_4^{(-)}\exp(-im\varphi)\big]\exp(i\theta);$$

$$\Phi_{\text{in}}^{(3)} = I_{3m}(3kr)\big[C_1^{(+)}\exp(i3m\varphi) + C_1^{(-)}\exp(-i3m\varphi)\big]\exp(i3\theta) + I_m(3kr)\big[C_2^{(+)}\exp(im\varphi) + C_2^{(-)}\exp(-im\varphi)\big]\exp(i3\theta) + I_{3m}(kr)\big[C_3^{(+)}\exp(i3m\varphi) + C_3^{(-)}\exp(-i3m\varphi)\big]\exp(i\theta) + I_m(kr)\big[C_4^{(+)}\exp(im\varphi) + C_4^{(-)}\exp(-im\varphi)\big]\exp(i\theta);$$

$$\Phi_{\text{ex}}^{(3)} = D(t) + K_{3m}(3kr)\big[D_1^{(+)}\exp(i3m\varphi) + D_1^{(-)}\exp(-i3m\varphi)\big]\exp(i3\theta) + K_m(3kr)\big[D_2^{(+)}\exp(im\varphi) + D_2^{(-)}\exp(-im\varphi)\big]\exp(i3\theta) + K_{3m}(kr)\big[D_3^{(+)}\exp(i3m\varphi) + D_3^{(-)}\exp(-i3m\varphi)\big]\exp(i\theta) + K_m(kr)\big[D_4^{(+)}\exp(im\varphi) + D_4^{(-)}\exp(-im\varphi)\big]\exp(i\theta) + D_5\ln r, \tag{16}$$

определив зависимость $\Psi^{(3)}$, $\Phi_{\text{in}}^{(3)}$ и $\Phi_{\text{ex}}^{(3)}$ от координаты r, подставив их в уравнения Лапласа (1) с условиями ограниченности (2).

Подставив выражения (16) для поправок третьего порядка малости в дополнительные условия сохранения объема участка струи, длина которого равна длине волны λ (6), найдем, что коэффициент A_5 равен нулю. Тогда вследствие граничных условий (5) обращаются в нуль значения D_5 и $D(t)$. После подстановки выражений (16) в кинематическое (3) и динамическое (4) граничные условия, а также в граничные условия для электрической части задачи (5), требуя равенства коэффициентов при одинаковых экспонентах, определяется система уравнений для нахождения коэффициетов $A_j^{(\pm)}$, $B_j^{(\pm)}$, $C_j^{(\pm)}$ и $D_j^{(\pm)}$; $j = \{1, \ldots, 5\}$. Кроме выражений, определяющих коэффициенты в решении третьего порядка малости, получим дифференциальное уравнение относительно $\xi^{(\pm)}$, из которого можно найти коэффициент $s^{(\pm)}$, определяющий поправку к частоте волны

$$\frac{\partial\xi^{(\pm)}}{\partial T_2} = -i\,\frac{s^{(\pm)}(k)}{\omega_m(k)}\,\xi^{(\pm)} + i\varepsilon_d\,\frac{f_m(k)G_m(k)}{2\omega_m(k)}\bigg\{\frac{\omega_m^2(k)}{G_m(k)} + 1 - k^2 - m^2 - \frac{W}{\varepsilon_d f_m(k)}\Big[\varepsilon_d\big(4 + (\varepsilon_d - 3)G_m(k)\big) + \big(3\varepsilon_d - 1 + (\varepsilon_d - 1)^2 G_m(k)\big)H_m(k)\Big]\bigg\}A_4^{(\pm)}; \tag{17}$$

$$s^{(\pm)} \equiv \frac{G_m(k)}{2}\sum_{j=4}^{5} C_j^2\bigg\{\frac{\omega_m(k)}{G_m(k)}\,\Gamma_j + \Upsilon_j + \frac{\mu}{2\varepsilon_d}\big(g_{\text{in}}\,\Delta_j - \varepsilon_d\,g_{\text{ex}}\,H_m(k)\Pi_j\big)\bigg\}; \tag{18}$$

$$C_4^2 \equiv \big|\xi^{(\pm)}\big|^2, \quad C_5^2 \equiv \big|\xi^{(\mp)}\big|^2.$$

Выражения для Γ_j, Υ_j, Δ_j и Π_j приведены в „Приложении C“.

Отметим сразу, что сама по себе нелинейная поправка к частоте в асимптотическом анализе означает лишь расплывание нелинейной волны со временем за счет различия в фазовых скоростях поправок различных порядков малости, но тем не менее она оказывает существенное влияние на закономерности реализации неустойчивости волны.

Выражение в квадратных скобках в уравнении (17) равно нулю, согласно (12). Поскольку у нас не использовано второе начальное условие, сформулируем его в виде требования, чтобы коэффициент $A_4^{(\pm)}$ был равен нулю. Тогда из уравнения (17) зависимость комплексных амплитуд $\xi^{(\pm)}$ от временного масштаба T_2 определится в виде

$$\xi^{(\pm)} = C\exp[-iT_2\,s^{(\pm)}(k)/\omega_m(k)].$$

Поскольку $s^{(+)}$ и $s^{(-)}$ характеризуют поправку к одной и той же частоте $\omega_m(k)$, очевидно, что они должны быть равны, что говорит об эквивалентности $\xi^{(+)}$ и $\xi^{(-)}$. Таким образом, для $\xi = \xi(T_2)$ можно записать окончательное выражение

$$\xi = C\exp[-iT_2\,s(k)/\omega_m(k)], \tag{19}$$

где C — постоянная интегрирования, которая определяется из первого начального условия $C = \xi(0)$. Учитывая, что $\xi^{(+)} = \xi^{(-)}$, приведем соотношение для определения коэффициентов A_j

$$A_j = \alpha_j C^3, \quad j = \{1, 2, 3\};$$

$$\alpha_j = \frac{1}{\omega_j^2 - \left(\omega_{m_j}(k_j)\right)^2}\Big\{\omega_j \Gamma_j + G_{m_j}(k_j)\Upsilon_j$$

$$+ \frac{\mu G_{m_j}(k_j)}{2\varepsilon_d}\left[g^{\text{in}}_{m_j}(k_j)\Delta_j - \varepsilon_d g^{\text{ex}}_{m_j}(k_j) H_{m_j}(k_j)\Pi_j\right]\Big\}; \quad (20)$$

$$g^{\text{in}}_m(x) \equiv \frac{2\varepsilon_d + (\varepsilon_d - 1)H_m(x)}{f_m(x)};$$

$$g^{\text{ex}}_m \equiv \frac{2 + (\varepsilon_d - 1)G_m(x)}{f_m(x)};$$

$$\omega_j \equiv \{3\omega_m(k), 3\omega_m(k), \omega_m(k)\},$$

$$k_j \equiv \{3k, 3k, k\}, \quad m_j \equiv \{3m, m, 3m\}.$$

Коэффициенты B_j и D_j несложно найти, зная A_j

$$B_j \equiv \left(-i/[k_j I'_{m_j}(k_j)]\right)(\omega_j A_j - \Gamma_j C^3); \quad j = \{1, 2, 3\},$$

$$C_j \equiv \frac{1}{\varepsilon_d I_{m_j}(k_j)}\Big\{2\pi\mu g^{\text{in}}_{m_j}(k_j)A_j$$

$$+ [\Delta_j - H_{m_j}(k_j)\Pi_j]\frac{\varepsilon_d C^3}{f_{m_j}(k_j)}\Big\},$$

$$D_j \equiv \frac{1}{K_{m_j}(k_j)}\Big\{2\pi\mu g^{\text{ex}}_{m_j}(k_j)A_j$$

$$+ [\Delta_j - \varepsilon_d G_{m_j}(k_j)\Pi_j]\frac{C^3}{f_{m_j}(k_j)}\Big\}. \quad (21)$$

Как уже говорилось выше, для электропроводной струи величина D_{00} в нуль не обращается, а равна $4\pi\chi(k^2 + m^2)A_{00}$ (A_{00} имеет то же значение, что и для диэлектрической жидкости). И поскольку данная величина входит в выражения для Υ_j, Δ_j и Π_j, то при предельном переходе от идеально проводящей струи к диэлектрической полного совпадения выражений для нелинейной поправки s к частоте не будет.

Финальное выражение для формы струи. Обсуждение полученных результатов

Собрав вместе поправки всех порядков малости, получим, что форма свободной поверхности жидкости струи в произвольный момент времени с учетом выражения (19) будет описываться уравнением

$$r(\phi, z, t) = 1 + \varepsilon\cos(m\phi)\cos\left(\theta - \varepsilon^2\frac{s(k)}{\omega_m(k)}t\right)$$

$$- 0.25\varepsilon^2[0.5 - (a_1\cos(2m\phi) + a_2)\cos(2\theta) - a_3\cos(2m\phi)]$$

$$+ (\varepsilon^3/16)\{[\alpha_1\cos(3m\phi) + \alpha_2\cos(m\phi)]\cos(3\theta)$$

$$+ \alpha_3\cos(3m\phi)\cos(\theta)\}. \quad (22)$$

Условие реализации неустойчивости струи по отношению к действию сил поверхностного натяжения и давлению электрического поля заключается в прохождении квадрата частоты через нуль в область отрицательных значений. С учетом наличия нелинейной поправки к частоте в третьем порядке малости это условие приведет к соотношению

$$\left(\omega_m + \varepsilon^2\frac{s}{\omega_m}\right)^2 \approx \omega_m^2 + 2\varepsilon^2 s = 0.$$

Несложно увидеть, что влияние нелинейной поправки на критическую для начала реализации неустойчивости струи волну с волновым числом k и критическое значение параметра W будет различным при $s > 0$ и при $s < 0$.

Из (22) и вида нелинейных поправок третьего порядка малости $\Phi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$, $\Psi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$ и $\xi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$ несложно видеть, что они имеют резонансный характер, определяющийся видом коэффициентов, которые при определенных соотношениях между частотами волн стремятся к бесконечности, что в теории нелинейных осцилляций и волн соответствует проявлению резонансного обмена энергией между волнами. Положения резонансов определяются требованием стремления к бесконечности коэффициентов α_j, через которые определяются амплитудные множители A_j, B_j, D_j при нелинейных поправках третьего порядка малости. Согласно (20), (21), условия реализации вырожденного четырехмодового резонансного взаимодействия волн имеют вид

$$\omega_j^2 - \left(\omega_{m_j}(k)\right)^2 = 0, \quad (23)$$

где ω_j — частота моды, в которую энергия перекачивается, $\omega_{m_j}(k_j)$ — частота моды, определяющей форму начальной деформации, от которой энергия отбирается, определяются дисперсионным уравнением (12)

$$\omega_m^2(k) = \frac{G_m(k)}{\varepsilon_d f_m(k)}\big\{(k^2 + m^2 - 1)\varepsilon_d f_m(k)$$

$$+ W\big[\varepsilon_d\big(4 + (\varepsilon_d - 3)G_m(k)\big)$$

$$+ \big(3\varepsilon_d - 1 + (\varepsilon_d - 1)^2 G_m(k)\big)H_m(k)\big]\big\},$$

$$\omega_{m_j} \equiv \{3\omega_m(k), 3\omega_m(k), \omega_m(k)\},$$

$$k_j \equiv \{3k, 3k, k\}, \quad m_j \equiv \{3m, m, 3m\}. \quad (24)$$

В нелинейных поправках третьего порядка малости $\Phi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$, $\Psi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$ и $\xi^{(3)}(\mathbf{r}, t)$ сохраняются и вырожденные трехмодовые резонансы, характерные для квадратичного приближения. Их положения зависят от диэлектрической проницаемости жидкости и определяются требованием стремления к бесконечности коэффициентов a_j, входящих в определение амплитудных коэффициентов второго и третьего порядков малости. Условия реализации трехмодовых резонансов записываются в виде

$$4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k) = 0; \quad 4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k) = 0. \quad (25)$$

Исследование закономерностей резонансного обмена энергией между волнами требует отдельного рассмотрения, но из вида соотношений (12), (23)−(25) сразу

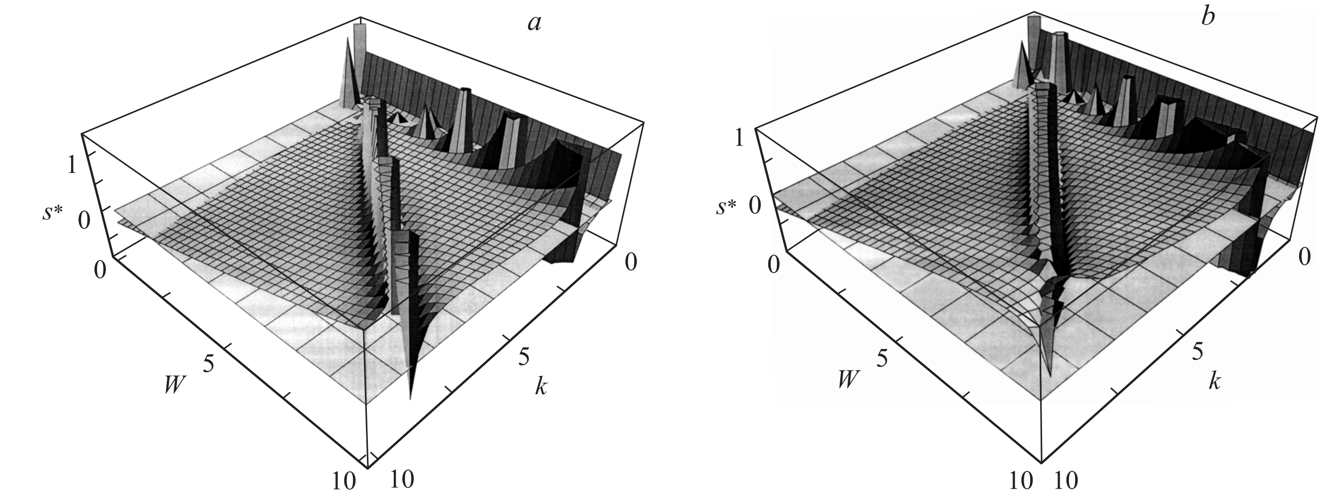

Рис. 1. Рассчитанные по (18) графики зависимости величины нелинейной поправки к частоте $s^* \equiv \varepsilon^2 s/\omega^2$ от параметра W, характеризующего заряд, приходящийся на единицу длины струи, и безразмерного волнового числа k для $\varepsilon = 0.2$, различных значений диэлектрической проницаемости жидкости ε_d и азимутального числа m, пересеченные плоскостью $s^* = 0$; $m = 0$, a — $\varepsilon_d = 30$, b — 1000.

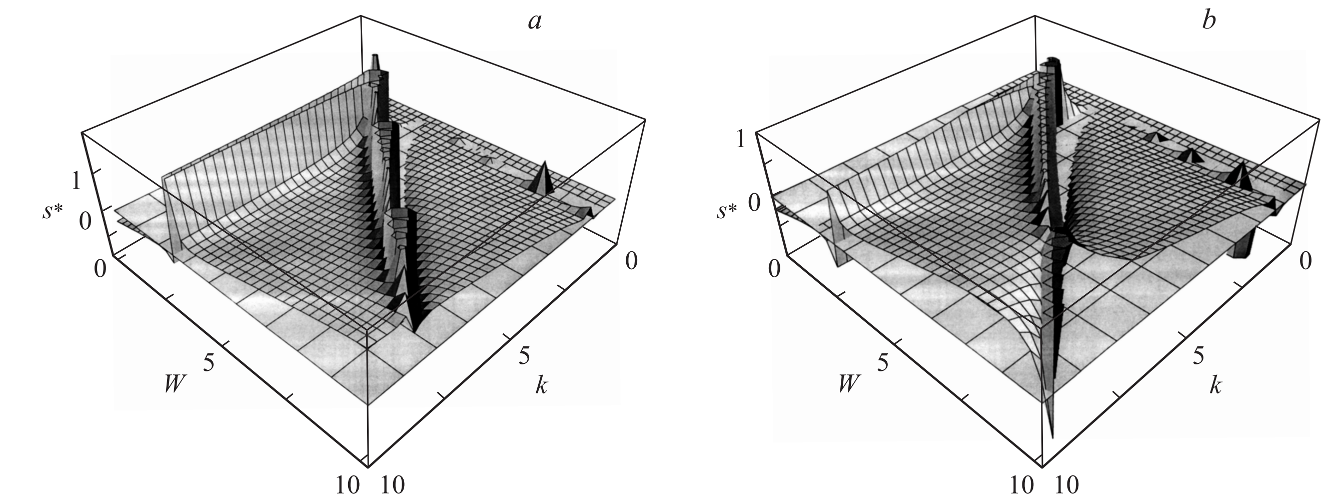

Рис. 2. То же, что для рис. 1; $m = 1$.

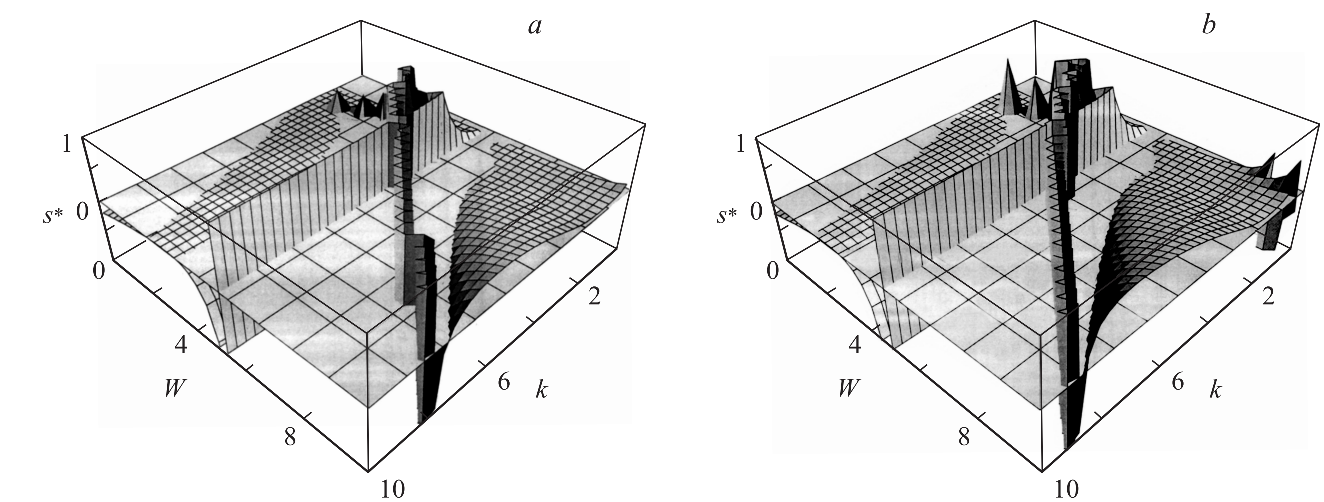

Рис. 3. То же, что для рис. 1; $m = 2$.

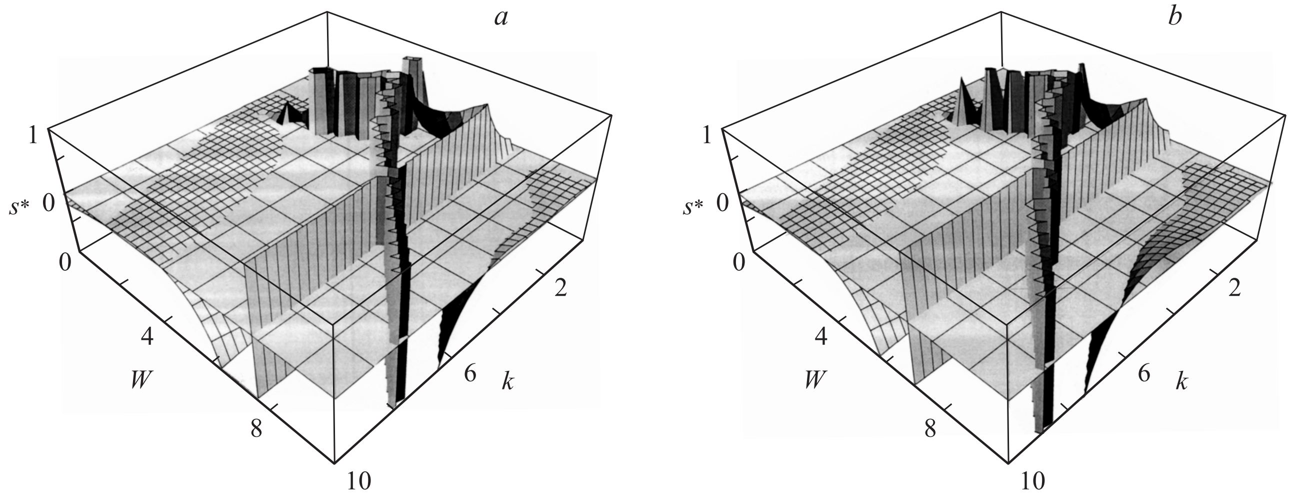

Рис. 4. То же, что для рис. 1; $m = 3$.

можно сказать, что в реализующихся вырожденных резонансах перенос энергии между длинными и короткими волнами идет лишь в одном направлении: от длинных волн к коротким, независимо от симметрии взаимодействующих волн.

На рис. 1–4 приведены рассчитанные по (18) графики зависимости величины нелинейной поправки к частоте $s^* \equiv \varepsilon^2 s/\omega^2$ от параметра W, характеризующего заряд, приходящийся на единицу длины струи, и безразмерного волнового числа k для различных значений азимутального числа m и диэлектрической проницаемости жидкости ε_d. Из рис. 1–4 видно, что величина и знак (а следовательно, и влияние на критические условия неустойчивости струи) нелинейной поправки к частоте зависят не только от диэлектрической проницаемости жидкости ε_d, величины электрического заряда, приходящегося на единицу длины струи (от величины параметра W), и от волнового числа k, но и от азимутального числа m: при изменении асимметрии начального возмущения струи (т.е. числа m), изменяется и спектр неустойчивых волн. Видно также, что нелинейная поправка к частоте имеет резонансный вид, и в окрестности резонансов, положения которых зависят от всех контролируемых параметров, следует обращать внимание на выполнение требования асимптотичности разложений.

Заключение

В асимптотических расчетах третьего порядка малости нелинейных осцилляций объемно заряженной струи идеальной несжимаемой диэлектрической жидкости появляются нелинейные поправки к частотам, квадратичные по амплитуде, зависящие от вида начальной деформации струи, от величины диэлектрической проницаемости жидкости, имеющие резонансный вид и оказывающие влияние на критические условия реализации неустойчивости струи.

Приложение А

Обозначения, использованные при записи решения второго порядка малости.

$$b_0 \equiv Y_4 + \frac{1}{2} - \frac{W}{2\varepsilon_d}(\varepsilon_d - 3); \quad a_1 \equiv P_1/Q_1;$$

$$Q_1 = -\varepsilon_d f_{2m}(2k)\left[4\omega_m^2(k) - \omega_{2m}^2(2k)\right];$$

$$P_1 = -\big(Y_1 G_{2m}(2k) + 2\omega X_1\big)\varepsilon_d f_{2m}(2k) + W G_{2m}(2k)$$
$$\times \big\{2\varepsilon_d\big(-1 + H_{2m}(2k)\big) + 0.5(\varepsilon_d^2 - 1)G_{2m}(2k)H_{2m}(2k)$$
$$+ 2(k^2 + m^2)(g_{\text{in}} - g_{\text{ex}})\big(2\varepsilon_d + (\varepsilon_d - 1)H_{2m}(2k)\big)$$
$$- g_{\text{in}} G_m(k)\big[\varepsilon_d + 1 + (\varepsilon_d - 1)G_{2m}(2k)\big]H_{2m}(2k)$$
$$+ g_{\text{ex}} H_m(k)\big[3\varepsilon_d - 1 + \varepsilon_d(\varepsilon_d - 1)G_{2m}(2k)\big]H_{2m}(2k)\big\};$$

$$a_2 \equiv P_2/Q_2; \quad Q_2 = -\varepsilon_d f_0(2k)\left[4\omega_m^2(k) - \omega_0^2(2k)\right];$$

$$P_2 = -\big(Y_2 G_0(2k) + 2\omega X_2\big)\varepsilon_d f_0(2k) + W G_0(2k)$$
$$\times \big\{2\varepsilon_d\big(-1 + H_0(2k)\big) + 0.5(\varepsilon_d^2 - 1)G_0(2k)H_0(2k)$$
$$+ 2k^2(g_{\text{in}} - g_{\text{ex}})\big(2\varepsilon_d + (\varepsilon_d - 1)H_0(2k)\big)$$
$$- g_{\text{in}} G_m(k)\big[\varepsilon_d + 1 + (\varepsilon_d - 1)G_0(2k)\big]H_0(2k)$$
$$+ g_{\text{ex}} H_m(k)\big[3\varepsilon_d - 1 + \varepsilon_d(\varepsilon_d - 1)G_0(2k)\big]H_0(2k)\big\};$$

$$a_3 \equiv P_3/Q_3;$$

$$Q_3 = m\varepsilon_d(1 + \varepsilon_d)(1 - 4m^2)$$
$$+ W\left[(\varepsilon_d^2 + 1)m(2m - 1) + 2\varepsilon_d(3m - 2m^2 - 1)\right];$$

$$P_3 = m\varepsilon_d(1 + \varepsilon_d)Y_3 + W\big\{m^2(\varepsilon_d^2 - 1) + \varepsilon_d(2m + 1)$$
$$+ 2m^2(g_{\text{in}} - g_{\text{ex}})\big(\varepsilon_d(m - 1) - m\big)$$
$$- g_{\text{in}} G_m(k)m\big(\varepsilon_d + 1 + 2m(\varepsilon_d - 1)\big)$$
$$+ g_{\text{ex}} H_m(k)m\big(3\varepsilon_d - 1 + 2m\varepsilon_d(\varepsilon_d - 1)\big)\big\};$$

$$X_1 = \omega_m(k)\big[2(k^2+m^2) - G_m(k)\big]/G_m(k);$$

$$X_2 = \omega_m(k)\big[2k^2 - G_m(k)\big]/G_m(k);$$

$$Y_1 = 1 + 0.5(k^2 - 5m^2) + \omega_m^2(k)\big[k^2 + m^2 - 3G_m^2(k)\big]/2G_m^2(k) + W\big(2g_{\rm in}G_m(k) - 1\big)/\varepsilon_d - \frac{\varepsilon_d - 1}{2\varepsilon_d}W\big[3 + k^2 + m^2 - 4g_{\rm ex}\big(k^2+m^2 - H_m(k)\big) + g_{\rm ex}^2H_m^2(k) - \varepsilon_d(k^2+m^2)(g_{\rm ex}-1)^2\big];$$

$$Y_2 = 1 + 0.5(k^2 - 3m^2) + \omega_m^2(k)\big[k^2 + m^2 - 3G_m^2(k)\big]/2G_m^2(k) + W\big(2g_{\rm in}G_m(k) - 1\big)/\varepsilon_d - \frac{\varepsilon_d - 1}{2\varepsilon_d}W\big[3 + k^2 - m^2 - 4g_{\rm ex}\big(k^2 - H_m(k)\big) + g_{\rm ex}^2H_m^2(k) - \varepsilon_d(k^2-m^2)(g_{\rm ex}-1)^2\big];$$

$$Y_3 = 1 - 0.5(k^2 + 5m^2) + \omega_m^2(k)\big[k^2 - m^2 - G_m^2(k)\big]/2G_m^2(k) + W\big(2g_{\rm in}G_m(k) - 1\big)/\varepsilon_d - \frac{\varepsilon_d - 1}{2\varepsilon_d}W\big[3 - k^2 + m^2 - 4g_{\rm ex}\big(m^2 - H_m(k)\big) + g_{\rm ex}^2H_m^2(k) + \varepsilon_d(k^2-m^2)(g_{\rm ex}-1)^2\big];$$

$$Y_4 = 1 - 0.5(k^2 + 3m^2) + \omega_m^2(k)\big[k^2 + m^2 - G_m^2(k)\big]/2G_m^2(k) + W\big(2g_{\rm in}G_m(k) - 1\big)/\varepsilon_d - \frac{\varepsilon_d - 1}{2\varepsilon_d}W\big[3 - k^2 - m^2 + 4g_{\rm ex}H_m(k) + g_{\rm ex}^2H_m^2(k) + \varepsilon_d(k^2+m^2)(g_{\rm ex}-1)^2\big].$$

Приложение В

Граничные и дополнительное условия в формулировке задачи третьего порядка малости.

$$r = 1: \quad \frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial r} - \frac{\partial\xi^{(3)}}{\partial T_0} = \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial T_1} + \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial T_2} + \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial\psi} + \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial z} + \frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial\phi}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi} + \frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial z}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z} - \frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial r^2}\xi^{(2)} - \frac{1}{2}\frac{\partial^3\Psi^{(1)}}{\partial r^3}\big(\xi^{(1)}\big)^2 + \xi^{(1)}\bigg(\frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial r\partial z}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial r\partial\phi}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi} - 2\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi} - \frac{\partial^2\Psi^{(2)}}{\partial r^2}\bigg);$$

$$\Phi_{\rm in}^{(3)} - \Phi_{\rm ex}^{(3)} + \bigg(\frac{d\Phi_{\rm in}^{(0)}}{dr} - \frac{d\Phi_{\rm ex}^{(0)}}{dr}\bigg)\xi^{(3)} = \xi^{(2)}\bigg[\bigg(\frac{d^2\Phi_{\rm ex}^{(0)}}{dr^2} - \frac{d^2\Phi_{\rm in}^{(0)}}{dr^2}\bigg)\xi^{(1)} + \frac{\partial\Phi_{\rm ex}^{(1)}}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_{\rm in}^{(1)}}{\partial r}\bigg] + \xi^{(1)}\bigg(\frac{\partial\Phi_{\rm ex}^{(2)}}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_{\rm in}^{(2)}}{\partial r}\bigg) + \frac{1}{6}\big(\xi^{(1)}\big)^2\bigg[\bigg(\frac{d^3\Phi_{\rm ex}^{(0)}}{dr^3} - \frac{d^3\Phi_{\rm in}^{(0)}}{dr^3}\bigg)\xi^{(1)} + 3\bigg(\frac{\partial^2\Phi_{\rm ex}^{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2\Phi_{\rm in}^{(1)}}{\partial r^2}\bigg)\bigg];$$

$$\bigg(\varepsilon_d\frac{d^2\Phi_{\rm in}^{(0)}}{dr^2} - \frac{d^2\Phi_{\rm ex}^{(0)}}{dr^2}\bigg)\xi^{(3)} + \varepsilon_d\frac{\partial\Phi_{\rm in}^{(3)}}{\partial r} - \frac{\partial\Phi_{\rm ex}^{(3)}}{\partial r} = \bigg\{\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial\phi} + \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial z} - \xi^{(1)}\big(\xi^{(1)}\big)^2 + \frac{1}{2}\xi^{(1)}\bigg[\bigg(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\bigg)^2 + \bigg(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\bigg)^2\bigg]\frac{d}{dr} - \xi^{(1)}\xi^{(2)}\frac{d^2}{dr^2} - \frac{1}{6}\big(\xi^{(1)}\big)^3\frac{d^3}{dr^3}\bigg\}\bigg(\varepsilon_d\frac{d\Phi_{\rm in}^{(0)}}{dr} - \frac{d\Phi_{\rm ex}^{(0)}}{dr}\bigg)$$
$$+ \bigg\{\frac{1}{2}\bigg[\bigg(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\bigg)^2 + \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\bigg)^2\bigg]\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} - 2\xi^{(1)}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\bigg\}\big(\varepsilon_d\Phi_{\rm in}^{(1)} - \Phi_{\rm ex}^{(1)}\big)$$
$$+ \bigg[-\xi^{(2)}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{1}{2}\big(\xi^{(1)}\big)^2\frac{\partial^3}{\partial r^3} + \xi^{(1)}\bigg(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\phi} + \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\bigg)\bigg]\big(\varepsilon_d\Phi_{\rm in}^{(1)} - \Phi_{\rm ex}^{(1)}\big) + \bigg(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial}{\partial\phi} + \frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial}{\partial z} - \xi^{(1)}\frac{\partial^2}{\partial r^2}\bigg)\big(\varepsilon_d\Phi_{\rm in}^{(2)} - \Phi_{\rm ex}^{(2)}\big);$$

$$\xi^{(3)} + \frac{\partial^2\xi^{(3)}}{\partial\phi^2}\frac{\partial^2\xi^{(3)}}{\partial z^2} - \mu\bigg(\Phi_{\rm in}^{(3)} + \frac{d\Phi_{\rm in}^{(0)}}{dr}\xi^{(3)}\bigg) + \frac{\varepsilon_d - 1}{4\pi\varepsilon_d}\frac{d\Phi_{\rm ex}^{(0)}}{dr}\bigg(\frac{d^2\Phi_{\rm ex}^{(0)}}{dr^2}\xi^{(3)} + \frac{\partial\Phi_{\rm ex}^{(3)}}{\partial r}\bigg) - \frac{\partial\Psi^{(3)}}{\partial T_0}$$
$$= \frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial T_2} + \frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial T_1} + \frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial T_0\partial r}\xi^{(2)} + \frac{\partial^2\Psi^{(2)}}{\partial T_0\partial r}\xi^{(1)} + \frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial T_1\partial r}\xi^{(1)} + \frac{1}{2}\frac{\partial^3\Psi^{(1)}}{\partial T_0\partial r^2}\big(\xi^{(1)}\big)^2 - \xi^{(1)}\bigg(\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\phi}\bigg)^2 + \frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial\phi}\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\phi}$$
$$+ \frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial z}\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial z} + \frac{\partial\Psi^{(2)}}{\partial r}\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial r} - \big(\xi^{(1)}\big)^3 + 2\frac{\partial^2\xi^{(2)}}{\partial\phi^2}\xi^{(1)} + \xi^{(1)}\bigg(\frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial r^2}\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial r} + \frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial r\partial\phi}\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial\phi} + \frac{\partial^2\Psi^{(1)}}{\partial r\partial z}\frac{\partial\Psi^{(1)}}{\partial z}\bigg)$$
$$- 3\frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial\phi^2}\big(\xi^{(1)}\big)^2 + 2\xi^{(2)}\xi^{(1)} + \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial\phi}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi} - \frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial z}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}$$

$$
+2\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial\phi\partial z}-\frac{1}{2}\xi^{(1)}\Bigg[3\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\right)^2
-\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\right)^2\Bigg]+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial z^2}\Bigg[\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\right)^2+3\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\right)^2\Bigg]
$$

$$
+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial\phi^2}\Bigg[3\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\right)^2\Bigg]+2\frac{\partial^2\xi^{(1)}}{\partial\phi^2}\xi^{(2)}
$$

$$
+\mu\Bigg(\frac{1}{6}\frac{d^3\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^3}\big(\xi^{(1)}\big)^3+\frac{1}{2}\frac{\partial^2\Phi_{\text{in}}^{(1)}}{\partial r^2}\big(\xi^{(1)}\big)^2+\frac{\partial\Phi_{\text{in}}^{(2)}}{\partial r}\xi^{(1)}
+\frac{d^2\Phi_{\text{in}}^{(0)}}{dr^2}\xi^{(1)}\xi^{(2)}+\frac{\partial\Phi_{\text{in}}^{(1)}}{\partial r}\xi^{(2)}\Bigg)
$$

$$
-\frac{\varepsilon_d-1}{24\pi\varepsilon_d}\frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr}\xi^{(1)}\Bigg[\xi^{(1)}\Bigg(\frac{d^4\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^4}\xi^{(1)}+3\frac{\partial^3\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r^3}\Bigg)
+6\Bigg(\frac{\partial^2\Phi_{\text{ex}}^{(2)}}{\partial r^2}+\frac{d^3\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^3}\xi^{(2)}\Bigg)\Bigg]-\frac{(\varepsilon_d-1)^2}{4\pi\varepsilon_d}\frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr}
$$

$$
\times\Bigg\{\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\Bigg[\xi^{(1)}\Bigg(\frac{\partial^2\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r\partial\phi}-2\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial\phi}\Bigg)+\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(2)}}{\partial\phi}\Bigg]
+\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial\phi}\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial\phi}+\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\Bigg(\xi^{(1)}\frac{\partial^2\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r\partial z}+\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(2)}}{\partial z}\Bigg)
$$

$$
+\Bigg[\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\right)^2+\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\right)^2\Bigg]\Bigg(\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r}+\frac{d^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2}\xi^{(1)}\Bigg)
+\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial z}\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial z}+\frac{d^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr}\Bigg[\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial\phi}\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}+\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial\xi^{(2)}}{\partial z}
$$

$$
-\xi^{(1)}\left(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\right)^2\Bigg]\Bigg\}-\frac{\varepsilon_d-1}{4\pi\varepsilon_d}\Bigg[\Bigg(\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r}+\frac{d^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2}\xi^{(1)}\Bigg)
$$

$$
\times\Bigg(\frac{\partial^2\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r^2}\xi^{(1)}+\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(2)}}{\partial r}+\frac{1}{2}\frac{d^3\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^3}\big(\xi^{(1)}\big)^2
+\frac{d^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2}\xi^{(2)}\Bigg)+\frac{d\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr}\frac{\partial^2\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r^2}\xi^{(2)}\Bigg]
$$

$$
-\frac{(\varepsilon_d-1)^2}{4\pi\varepsilon_d}\Bigg(\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial r}+\frac{d^2\Phi_{\text{ex}}^{(0)}}{dr^2}\xi^{(1)}\Bigg)
\times\Bigg(\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial\phi}\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial\phi}+\frac{\partial\xi^{(1)}}{\partial z}\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial z}\Bigg)
$$

$$
-\frac{\varepsilon_d-1}{4\pi}\Bigg[\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(2)}}{\partial\phi}\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial\phi}+\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(2)}}{\partial z}+\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial z}
-\xi^{(1)}\left(\frac{\partial\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial\phi}\right)^2+\xi^{(1)}\frac{\partial^2\Phi_{\text{ex}}^{(2)}}{\partial r\partial z}\frac{\partial^2\Phi_{\text{ex}}^{(1)}}{\partial z}\Bigg];
$$

$$
\int\limits_{z_0}^{z_0+\lambda}\int\limits_0^{2\pi}[\xi^{(3)}+\xi^{(1)}\xi^{(2)}]d\phi dz=0.
$$

Приложение С

Выражения для величин Γ_j, Υ_j и Δ_j, Π_i $j=\{1,\ldots,5\}$, использующихся при записи решения третьего порядка малости.

$$
\Gamma_1=b_1I_{2m}(2k)\big(6k^2+6m^2-G_{2m}(2k)\big)
+a_1\omega\big(3k^2+3m^2-G_m(k)\big)/G_m(k)
-\omega\big[k^2+7m^2-(3k^2+3m^2+2)G_m(k)\big]/2G_m(k);
$$

$$
\omega\equiv\omega_m(k);
$$

$$
\Gamma_2=b_1I_{2m}(2k)\big(6k^2+2m^2-G_{2m}(2k)\big)
+a_1\omega\big(3k^2-m^2-G_m(k)\big)/G_m(k)+2b_2I_0(2k)
\times\big(6k^2-G_0(2k)\big)+2a_2\omega\big(3k^2+m^2-G_m(k)\big)/G_m(k)
-\omega[3k^2+5m^2-(9k^2+m^2+6)G_m(k)]/2G_m(k);
$$

$$
\Gamma_3=b_1I_{2m}(2k)\big(2k^2+6m^2-G_{2m}(2k)\big)
+a_1\omega\big(k^2-3m^2+G_m(k)\big)/G_m(k)
+a_32\omega\big(k^2+3m^2-G_m(k)\big)/G_m(k)
-\omega\big[k^2+7m^2-(3k^2+3m^2+2)G_m(k)\big]/2G_m(k);
$$

$$
\Gamma_4=b_1I_{2m}(2k)\big(2k^2+2m^2-G_{2m}(2k)\big)
+a_1\omega\big(k^2+m^2+G_m(k)\big)/G_m(k)
-\omega\big[3k^2+9m^2-(3k^2+3m^2+4)G_m(k)\big]/2G_m(k);
$$

$$
\Gamma_5=2b_2I_0(2k)\big(2k^2-G_0(2k)\big)
+a_22\omega\big(k^2-m^2+G_m(k)\big)/G_m(k)
+a_32\omega\big(k^2-m^2-G_m(k)\big)/G_m(k)
-\omega\big[2k^2-(3k^2-m^2+3)G_m(k)\big]/G_m(k);
$$

$$
\Upsilon_1=a_1\Bigg\{2-\omega^2+2k^2-12m^2
+\frac{W}{\varepsilon_d}\big[1+(k^2+m^2)(2-3g_{\text{ex}})+2\big(g_{\text{in}}G_m(k)+g_{\text{ex}}H_m(k)\big)
-\varepsilon_d\big[3+(k^2+m^2)(4-5g_{\text{ex}})+2g_{\text{ex}}H_m(k)\big]
+\varepsilon_d^2 2(k^2+m^2)(1-g_{\text{ex}})\big]\Bigg\}
$$

$$
+b_1\omega I_{2m}(2k)\big[2(k^2+m^2)/G_m(k)-3G_{2m}(2k)\big]
+d_1\mu\frac{\varepsilon_d-1}{2\varepsilon_d}K_{2m}(2k)\big[6(k^2+m^2)-g_{\text{in}}G_m(k)H_{2m}(2k)
-\varepsilon_d 2(k^2+m^2)(1-g_{\text{ex}})\big]-\omega^2\big[(k^2+m^2)G_m(k)
$$

$$+2m^2\big]/2G_m^2(k)+\frac{W}{2\varepsilon_d}\big\{-4\big(g_{\rm in}G_m(k)$$
$$+g_{\rm ex}H_m(k)\big)-2g_{\rm ex}^2H_m^2(k)+2(k^2+m^2)$$
$$\times\big(g_{\rm in}+2H_m(k)g_{\rm ex}^2\big)-k^2\big[2-5g_{\rm ex}\big(1-H_m(k)\big)\big]$$
$$-m^2\big[4-g_{\rm ex}\big(11-5H_m(k)\big)\big]+\varepsilon_d 2[2+3g_{\rm ex}H_m(k)$$
$$+g_{ex}^2H_m^2(k)]+\varepsilon_d k^2\big[4-g_{\rm ex}\big(7-9H_m(k)\big)\big]$$
$$+\varepsilon_d m^2\big[8-g_{\rm ex}\big(17-9H_m(k)\big)+2g_{\rm ex}^2\big]$$
$$-\varepsilon_d 8(k^2+m^2)H_m(k)g_{\rm ex}^2-\varepsilon_d^2 2(1-g_{\rm ex})$$
$$\times\big[2(k^2+m^2)g_{\rm ex}H_m(k)+k^2+m^2(2-g_{\rm ex})\big]\big\}$$
$$+c_1\mu I_{2m}(2k)G_{2m}(2k)-1-0.5(k^2-9m^2)$$
$$+3k^2m^2+1.5(k^4+m^4)+1.5\omega^2;$$

$$\Upsilon_2=a_1\bigg\{2-\omega^2+2k^2-8m^2$$
$$+\frac{W}{\varepsilon_d}\big[(k^2(2-3g_{\rm ex})-m^2)(2-g_{\rm ex})$$
$$+2\big(g_{\rm in}G_m(k)+g_{\rm ex}H_m(k)\big)+1$$
$$-\varepsilon_d\big[3+k^2(4-5g_{\rm ex})-m^2(4-3g_{\rm ex})+2g_{\rm ex}H_m(k)\big]$$
$$+\varepsilon_d^2 2(k^2-m^2)(1-g_{\rm ex})\big]\bigg\}+2a_2\bigg\{2-\omega^2+2(k^2-m^2)$$
$$+\frac{W}{\varepsilon_d}\big[1+2\big(g_{\rm in}G_m(k)+g_{\rm ex}H_m(k)\big)+k^2(2-3g_{\rm ex})$$
$$-m^2g_{\rm ex}-\varepsilon_d\big[3+k^2(4-5g_{\rm ex})-m^2g_{\rm ex}+2g_{\rm ex}H_m(k)\big]$$
$$+\varepsilon_d^2 2k^2(1-g_{\rm ex})\big]\bigg\}+c_1\mu I_{2m}(2k)G_{2m}(2k)$$
$$+b_1\omega I_{2m}(2k)\big[2(k^2-m^2)/G_m(k)-3G_{2m}(2k)\big]$$
$$+b_2 2\omega I_0(2k)\big[2k^2/G_m(k)-3G_0(2k)\big]$$
$$+d_1\mu\,\frac{\varepsilon_d-1}{2\varepsilon_d}K_{2m}(2k)\big[2(3k^2+m^2)-g_{\rm in}G_m(k)H_{2m}(2k)$$
$$-\varepsilon_d 2(k^2-m^2)(1-g_{\rm ex})\big]+d_2\mu\,\frac{\varepsilon_d-1}{\varepsilon_0}\,K_0(2k)$$
$$\times\big[6k^2-g_{\rm in}G_m(k)H_0(2k)-\varepsilon_d 2k^2(1-g_{\rm ex})\big]$$
$$+c_2 2\mu I_0(2k)G_0(2k)+\frac{W}{2\varepsilon_d}\big\{-12\big(g_{\rm in}G_m(k)$$
$$+g_{\rm ex}H_m(k)\big)-6g_{\rm ex}^2H_m^2(k)+4(3k^2+m^2)H_m(k)g_{\rm ex}^2$$
$$-3k^2\big[2-2g_{\rm in}-5g_{\rm ex}\big(1-H_m(k)\big)\big]+m^2\big[4+6g_{\rm in}$$
$$+g_{\rm ex}\big(9+H_m(k)\big)\big]+\varepsilon_d 6\big[2+3g_{\rm ex}H_m(k)$$
$$+g_{\rm ex}^2H_m^2(k)\big]+\varepsilon_d 3k^2\big[4-g_{\rm ex}\big(7-9H_m(k)\big)$$
$$-8g_{\rm ex}^2H_m(k)\big]-\varepsilon_d m^2\big[g_{\rm ex}\big(3+5H_m(k)\big)+8+2g_{\rm ex}^2\big]$$
$$-\varepsilon_d^2 2(1-g_{\rm ex})\big[3k^2\big(1+2g_{\rm ex}H_m(k)\big)$$
$$-m^2\big(2-g_{\rm ex}+2g_{\rm ex}H_m(k)\big)\big]\big\}+4.5\omega^2$$
$$-\omega^2\big[(3k^2+11m^2)G_m(k)-2m^2\big]/2G_m^2(k)-3-k^2m^2$$
$$+1.5(3k^4-m^4-k^2+5m^2);$$

$$\Upsilon_3=a_1\bigg\{2-\omega^2-2k^2-12m^2+\frac{W}{\varepsilon_d}\big[m^2(2-3g_{\rm ex})$$
$$-k^2(2-g_{\rm ex})+2\big(g_{\rm in}G_m(k)+g_{\rm ex}H_m(k)\big)+1$$
$$-\varepsilon_d\big[3-k^2(4-3g_{\rm ex})+m^2(4-5g_{\rm ex})+2g_{\rm ex}H_m(k)\big]$$
$$-\varepsilon_d^2 2(k^2-m^2)(1-g_{\rm ex})\big]\bigg\}+2a_3\bigg\{2-\omega^2-12m^2$$
$$+\frac{W}{\varepsilon_d}\big[1+2\big(g_{\rm in}G_m(k)+g_{\rm ex}H_m(k)\big)-k^2g_{\rm ex}$$
$$+m^2(2-3g_{\rm ex})-\varepsilon_d\big[3-k^2g_{\rm ex}+m^2(4-5g_{\rm ex})$$
$$+2g_{\rm ex}H_m(k)\big]+\varepsilon_d^2 2m^2(1-g_{\rm ex})\big]\bigg\}$$
$$+c_1\mu I_{2m}(2k)G_{2m}(2k)+c_3\,4\mu m+b_1\omega I_{2m}(2k)$$
$$\times\big[2(k^2-m^2)/G_m(k)-G_{2m}(2k)\big]+d_1\mu\,\frac{\varepsilon_d-1}{2\varepsilon_d}\,K_{2m}(2k)$$
$$\times\big[2(k^2+3m^2)-g_{\rm in}G_m(k)H_{2m}(2k)$$
$$+\varepsilon_d 2(k^2-m^2)(1-g_{\rm ex})\big]+d_3\mu\,\frac{\varepsilon_d-1}{\varepsilon_d}\,2m\big[3m+g_{\rm in}G_m(k)$$
$$-\varepsilon_d m(1-g_{\rm ex})\big]+0.5\omega^2+\frac{W}{2\varepsilon_d}\big\{-12\big(g_{\rm in}G_m(k)$$
$$+g_{\rm ex}H_m(k)\big)-6g_{\rm ex}^2H_m^2(k)+4(k^2+3m^2)H_m(k)g_{\rm ex}^2$$
$$+k^2\big[2+6g_{\rm in}+g_{\rm ex}\big(7+H_m(k)\big)\big]-3m^2\big[4-2g_{\rm in}$$
$$-g_{\rm ex}\big(11-5H_m(k)\big)\big]+\varepsilon_d 6[2+3g_{\rm ex}H_m(k)$$
$$+g_{\rm ex}^2H_m^2(k)]-\varepsilon_d k^2\big[4+5g_{\rm ex}\big(1+H_m(k)\big)\big]$$
$$+\varepsilon_d 3m^2\big[8-g_{\rm ex}\big(17-9H_m(k)\big)+\big(2-8H_m(k)\big)g_{\rm ex}^2\big]$$
$$+\varepsilon_d^2 2(1-g_{\rm ex})\big[k^2\big(1+2g_{\rm ex}H_m(k)\big)-3m^2\big(2-g_{\rm ex}$$
$$+2g_{\rm ex}H_m(k)\big)\big]\big\}+\omega^2\big[(5k^2-3m^2)G_m(k)+2m^2\big]/2G_m^2(k)$$
$$-3-k^2m^2+0.5(-3k^4+9m^4+k^2+27m^2);$$

$$\Upsilon_4=a_1\bigg\{2-\omega^2-2k^2-8m^2+\frac{W}{\varepsilon_d}\big[1-(k^2+m^2)$$
$$\times(2-g_{\rm ex})+2\big(g_{\rm in}G_m(k)+g_{\rm ex}H_m(k)\big)$$
$$-\varepsilon_d\big[3(k^2+m^2)(4-3g_{\rm ex})+2g_{\rm ex}H_m(k)\big]-\varepsilon_d^2 2(k^2+m^2)$$

$$\times (1-g_{\mathrm{ex}})]\Big\} + b_1\omega I_{2m}(2k)\big[2(k^2+m^2)/G_m(k)$$

$$-G_{2m}(2k)\big] + d_1\mu\,\frac{\varepsilon_d-1}{2\varepsilon_d}\,K_{2m}(2k)\big[2(k^2+m^2)$$

$$-g_{\mathrm{in}}G_m(k)H_{2m}(2k) + \varepsilon_d 2(k^2+m^2)(1-g_{\mathrm{ex}})]$$

$$+\omega^2\big[5(k^2+m^2)G_m(k)-6m^2\big]/2G_m^2(k)$$

$$+\frac{W}{2\varepsilon_d}\big\{-2-16\big(g_{\mathrm{in}}G_m(k)+g_{\mathrm{ex}}H_m(k)\big)-6g_{\mathrm{ex}}^2H_m^2(k)$$

$$+2(k^2+m^2)\big(3g_{\mathrm{in}}+2H_m(k)g_{\mathrm{ex}}^2\big)$$

$$+k^2\big[2+g_{\mathrm{ex}}\big(9+H_m(k)\big)\big]+m^2\big[4+g_{\mathrm{ex}}(11+H_m(k))\big]$$

$$+\varepsilon_d 2[9+11g_{\mathrm{ex}}H_m(k)+3g_{\mathrm{ex}}^2H_m^2(k)]$$

$$-\varepsilon_d k^2\big[4+g_{\mathrm{ex}}\big(7+5H_m(k)\big)\big]-\varepsilon_d m^2\big[8+5g_{\mathrm{ex}}\big(1+H_m(k)\big)$$

$$+2g_{\mathrm{ex}}^2\big]+\varepsilon_d^2 2(1-g_{\mathrm{ex}})\big[2(k^2+m^2)g_{\mathrm{ex}}H_m(k)+k^2$$

$$+m^2(2-g_{\mathrm{ex}})\big]\big\}-d_4\mu\,\frac{\varepsilon_d-1}{\varepsilon_d}\,g_{\mathrm{in}}G_m(k)$$

$$+c_1\mu I_{2m}(2k)G_{2m}(2k)-5+0.5(k^2+19m^2)$$

$$-3k^2m^2-1.5(k^4+m^4)+1.5\omega^2;$$

$$\Upsilon_5 = 2a_2\Big\{2-\omega^2-2(k^2+m^2)+\frac{W}{\varepsilon_d}\big[1-k^2(2-g_{\mathrm{ex}})$$

$$-m^2g_{\mathrm{ex}}+2\big(g_{\mathrm{in}}G_m(k)+g_{\mathrm{ex}}H_m(k)\big)$$

$$-\varepsilon_d\big[3-k^2(4-3g_{\mathrm{ex}})-m^2g_{\mathrm{ex}}+2g_{\mathrm{ex}}H_m(k)\big]$$

$$-\varepsilon_d^2 2k^2(1-g_{\mathrm{ex}})\big]\Big\}+2a_3\big\{2-\omega^2-8m^2$$

$$+\frac{W}{\varepsilon_d}\big[1+2\big(g_{\mathrm{in}}G_m(k)+g_{\mathrm{ex}}H_m(k)\big)-k^2g_{\mathrm{ex}}$$

$$-m^2(2-g_{\mathrm{ex}})-\varepsilon_d\big[3-k^2g_{\mathrm{ex}}-m^2(4-3g_{\mathrm{ex}})$$

$$+2g_{\mathrm{ex}}H_m(k)\big]-\varepsilon_d^2 2m^2(1-g_{\mathrm{ex}})\big]\big\}$$

$$+b_2 2\omega I_0(2k)[2k^2/G_m(k)-G_0(2k)]+c_3 4\mu m$$

$$+c_2 2\mu I_0(2k)G_0(2k)+d_2\mu\,\frac{\varepsilon_d-1}{\varepsilon_d}\,K_0(2k)$$

$$\times\big[2k^2-g_{\mathrm{in}}G_m(k)H_0(2k)+\varepsilon_d 2k^2(1-g_{\mathrm{ex}})\big]$$

$$+d_3\mu\,\frac{\varepsilon_d-1}{\varepsilon_d}2m\big[m+g_{\mathrm{in}}G_m(k)\varepsilon_d m(1-g_{\mathrm{ex}})\big]$$

$$-d_4\mu\frac{\varepsilon_d-1}{\varepsilon_d}\,g_{\mathrm{in}}G_m(k)+\frac{W}{\varepsilon_d}\big\{-1-14\big(g_{\mathrm{in}}G_m(k)$$

$$+g_{\mathrm{ex}}H_m(k)\big)-6g_{\mathrm{ex}}^2H_m^2(k)+4(k^2+m^2)H_m(k)g_{\mathrm{ex}}^2$$

$$+k^2\big[g_{\mathrm{in}}\big(6+G_m(k)\big)+8g_{\mathrm{ex}}\big]+m^2\big[2+g_{\mathrm{in}}\big(6+G_m(k)\big)$$

$$+10g_{\mathrm{ex}}\big]+\varepsilon_d[15+20g_{\mathrm{ex}}H_m(k)+6g_{\mathrm{ex}}^2H_m^2(k)]$$

$$-\varepsilon_d k^2\big[4+g_{\mathrm{ex}}\big(6+5H_m(k)\big)\big]-\varepsilon_d m^2\big[8+g_{\mathrm{ex}}\big(4+5H_m(k)\big)$$

$$+2g_{\mathrm{ex}}^2\big]+\varepsilon_d^2 2(1-g_{\mathrm{ex}})\big[k^2\big(1+2g_{\mathrm{ex}}H_m(k)\big)$$

$$+m^2\big(2-g_{\mathrm{ex}}+2g_{\mathrm{ex}}H_m(k)\big)\big]\big\}+2\omega^2$$

$$+\omega^2\big[(5k^2-3m^2)G_m(k)+2m^2\big]/2G_m^2(k)$$

$$-8+2k^2m^2-3(k^4+m^4)+k^2+17m^2;$$

$$\Pi_1 = -\frac{2\pi\mu}{3}-\frac{\pi\mu}{\varepsilon_d}\,g_{\mathrm{in}}\big(k^2+m^2-G_m(k)\big)$$

$$+\pi\mu g_{\mathrm{ex}}\big(k^2+m^2-H_m(k)\big)+a_1\,\frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d}\,[M-0.5(\varepsilon_d+1)]$$

$$-c_1I_{2m}(2k)G_{2m}(2k)+d_1K_{2m}(2k)H_{2m}(2k);$$

$$\Pi_2 = -2\pi\mu-\frac{3\pi\mu}{\varepsilon_d}\,g_{\mathrm{in}}\big(k^2+m^2-G_m(k)\big)$$

$$+3\pi\mu g_{\mathrm{ex}}\big(k^2+m^2-H_m(k)\big)+(a_1+2a_2)\,\frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d}$$

$$\times[M-0.5(\varepsilon_d+1)]-c_1I_{2m}(2k)G_{2m}(2k)$$

$$-c_2 2I_0(2k)G_0(2k)+d_1K_{2m}(2k)H_{2m}(2k)$$

$$+d_2 2K_0(2k)H_0(2k);$$

$$\Pi_3 = -2\pi\mu-\frac{3\pi\mu}{\varepsilon_d}\,g_{\mathrm{in}}\big(k^2+m^2-G_m(k)\big)$$

$$+3\pi\mu g_{\mathrm{ex}}\big(k^2+m^2-H_m(k)\big)-(c_3+d_3)4m$$

$$+(a_1+2a_3)\frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d}\,[M-0.5(\varepsilon_d+1)]-c_1I_{2m}(2k)G_{2m}(2k)$$

$$+d_1K_{2m}(2k)H_{2m}(2k);$$

$$\Pi_4 = -6\pi\mu-\frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d}-\frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d}\,g_{\mathrm{in}}\big(3k^2+3m^2-4G_m(k)\big)$$

$$+2\pi\mu g_{\mathrm{ex}}\big(3k^2+3m^2-4H_m(k)\big)$$

$$+(a_2+a_3)\,\frac{4\pi\mu}{\varepsilon_d}[M-0.5(\varepsilon_d+1)]-c_2 2I_0(2k)G_0(2k)$$

$$-(c_3+d_3)4m+d_2 2K_0(2k)H_0(2k);$$

$$\Pi_5 = -4\pi\mu-\frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d}-\frac{\pi\mu}{\varepsilon_d}\,g_{\mathrm{in}}\big(3k^2+3m^2-5G_m(k)\big)$$

$$+\pi\mu g_{\mathrm{ex}}\big(3k^2+3m^2-5H_m(k)\big)$$

$$+a_1\,\frac{2\pi\mu}{\varepsilon_d}[M-0.5(\varepsilon_d+1)]-c_1I_{2m}(2k)G_{2m}(2k)$$

$$+d_1K_{2m}(2k)H_{2m}(2k);$$

$$\Delta_1 = -2\pi\mu(3k^2+3m^2+1)+\pi\mu(k^2+7m^2)(g_{\text{in}}-g_{\text{ex}})$$
$$-a_1 6\pi\mu(k^2+m^2)(g_{\text{in}}-g_{\text{ex}})$$
$$-c_1\varepsilon_d I_{2m}(2k)\big(6k^2+6m^2-G_{2m}(2k)\big)$$
$$+d_1 K_{2m}(2k)\big(6k^2+6m^2-H_{2m}(2k)\big);$$
$$\Delta_2 = -2\pi\mu(9k^2+m^2+3)+\pi\mu(3k^2+5m^2)(g_{\text{in}}-g_{\text{ex}})$$
$$-a_1 2\pi\mu(3k^2-m^2)(g_{\text{in}}-g_{\text{ex}})$$
$$-a_2 4\pi\mu(3k^2+m^2)(g_{\text{in}}-g_{\text{ex}})$$
$$-c_1\varepsilon_d I_{2m}(2k)\big(6k^2+2m^2-G_{2m}(2k)\big)$$
$$-c_2\varepsilon_d 2I_0(2k)[6k^2-G_0(2k)]+d_1K_{2m}(2k)\big(6k^2+2m^2$$
$$-H_{2m}(2k)\big)+d_2 2K_0(2k)\big(6k^2-H_0(2k)\big);$$
$$\Delta_3 = -2\pi\mu(k^2+9m^2+3)+3\pi\mu(k^2+7m^2)(g_{\text{in}}-g_{\text{ex}})$$
$$+a_1 2\pi\mu(k^2-3m^2)(g_{\text{in}}-g_{\text{ex}})$$
$$-a_3 4\pi\mu(k^2+3m^2)(g_{\text{in}}-g_{\text{ex}})$$
$$-c_1\varepsilon_d I_{2m}(2k)\big(2k^2+6m^2-G_{2m}(2k)\big)-c_3\varepsilon_d 4m(3m-1)$$
$$+d_1K_{2m}(2k)\big(2k^2+6m^2-H_{2m}(2k)\big)+d_3 4m(3m+1);$$
$$\Delta_4 = -4\pi\mu(k^2+m^2+3)+4\pi\mu(2k^2+3m^2)(g_{\text{in}}-g_{\text{ex}})$$
$$+4\pi\mu(a_2-a_3)(k^2-m^2)(g_{\text{in}}-g_{\text{ex}})$$
$$-c_2\varepsilon_d 2I_0(2k)\big(2k^2-G_0(2k)\big)-c_3\varepsilon_d 4m(m-1)$$
$$+d_2 2K_0(2k)\big(2k^2-H_0(2k)\big)+d_3 4m(m+1);$$
$$\Delta_5 = -2\pi\mu(k^2+m^2+3)+\pi\mu(5k^2+7m^2)(g_{\text{in}}-g_{\text{ex}})$$
$$+a_1 2\pi\mu(k^2+m^2)(g_{\text{in}}-g_{\text{ex}})$$
$$-c_1\varepsilon_d I_{2m}(2k)\big(2k^2+2m^2-G_{2m}(2k)\big)$$
$$+d_1K_{2m}(2k)\big(2k^2+2m^2-H_{2m}(2k)\big).$$

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 05-08-01147а и 0.6-01-00066а.

Список литературы

[1] *Ентов В.М., Ярин А.Л.* // Итоги науки и техники. Механика жидкости и газа. М.: Изд-во ВИНИТИ, 1984. Т. 17. С. 112–197.
[2] *Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городов А.К.* и др. Монодиспергирование вещества: принципы и применение. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.
[3] *Yuen M.C.* // J. Fluid Mech. 1968. Vol. 33. P. 151–163.
[4] *Nayfeh F.H.* // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. N 4. P. 841–847.
[5] *Chaudhary K., Redekopp L.* // J. Fluid Mech. 1980. Vol. 96. P. 257–274.
[6] *Блаженков В.В., Гиневский А.Ф., Гунбин В.Ф.* и др. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1993. № 3. С. 54–60.
[7] *Горшков В.Н., Чабан М.Г.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 11. С. 1–9.
[8] *Чесноков Ю.Г.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 8. С. 31–38.
[9] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В.* // ЭОМ. 2003. № 1. С. 38–43.
[10] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 8. С. 6–14.
[11] *Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 9. С. 31–41.
[12] *Белоножко Д.Ф., Ширяева С.О., Григорьев А.И.* Нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2006. 288 с.
[13] *Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 2. С. 46–55.