

## Трансмиссионная томография пропорциональных рассеивающих сред

© С.А. Терещенко

Московский государственный институт электронной техники (технический университет),  
124498 Москва, Россия  
e-mail: tsa@miee.ru

(Поступило в Редакцию 10 апреля 2007 г.)

Рассмотрена реконструкция пространственного распределения коэффициента экстинкции в трансмиссионной томографии пропорциональных рассеивающих сред (ПРС). Дано точное аналитическое решение уравнения переноса, соответствующего ПРС, для произвольного распределения источников излучения. Приведено точное решение обратной томографической задачи в ПРС, не использующее дополнительных предположений. Обсуждены проблемы реализации томографического алгоритма, исследована проблема неточного знания коэффициента пропорциональности для ПРС. Полученные результаты могут быть полезны при разработке новых типов трансмиссионных оптических томографов.

PACS: 42.30.Wb

### Введение

Трансмиссионная томография сильнорассеивающих сред (СРС), в том числе трансмиссионная оптическая томография (ТОТ) биологических объектов, является одной из областей, к которым проявляется неослабевающий интерес мирового научного сообщества уже более 10 лет [1–6]. Актуальность такого вида томографии объясняется меньшей травматичностью по сравнению, например, с рентгеновской томографией, компактностью и меньшей стоимостью необходимого оборудования, а также потенциальными преимуществами, связанными с получением пространственных распределений коэффициента поглощения для существенно иной энергии квантов излучения и с возможностью визуализации еще одной физической характеристики СРС — индикатрисы рассеяния или производных от нее величин.

В то же время, несмотря на то что для решения этой проблемы были приложены значительные усилия, ТОТ до сих пор не может считаться разработанной. Это обусловлено сложностью процессов взаимодействия оптического излучения с веществом СРС и их физико-математического описания. Как известно, хорошо разработанный математический аппарат рентгеновской вычислительной томографии, опирающийся на преобразование Радона, возникает после решения уравнения переноса излучения (УПИ) в его простейшей форме, соответствующей чисто поглощающим средам (ЧПС) [7–9]. УПИ, учитывающее рассеяние, является основой и для разработки ТОТ. Однако в этом случае УПИ общего аналитического решения не имеет, что вынуждает использовать различные дополнительные предположения, позволяющие его упростить.

В УПИ для СРС, в отличие от ЧПС, дополнительно входит дифференциальный по углам коэффициент рассеяния (индикатриса рассеяния), зависящий в общем случае от семи переменных — трех пространственных

и четырех угловых. При этом полная реконструкция, по существу, и не требуется, так как интерпретация семимерной функции крайне затруднительна. Поэтому желательно свести ее к некоторой функции трех пространственных переменных, рассматриваемой в двумерных сечениях. Для упрощения УПИ возможны три способа введения дополнительных предположений: условия, накладываемые на рассеивающие свойства СРС, т.е. на индикатрису рассеяния, условия, накладываемые на вид УПИ (модификация уравнения переноса), и условия, заранее накладываемые на решение УПИ. Очевидно, что чем меньше предположений сделано для упрощения УПИ и чем они более слабы, тем более точно результат описывает прохождение излучения через среду. В этом смысле наиболее привлекательными являются предположения первой группы, затрагивающие только свойства рассеивающей среды. По-видимому, успех рентгеновской томографии обусловлен тем, что в ее основу положено единственное предположение о свойствах исследуемой среды, а именно об отсутствии рассеяния излучения, т.е. равенство индикатрисы рассеяния нулю.

Тем не менее, в большинстве работ по ТОТ в основу математических моделей закладывается так называемое диффузионное приближение уравнения переноса, в котором используются все три вида дополнительных предположений одновременно [10–13]. Многочисленность предположений должна, по-видимому, приводить к определенным недостаткам этой модели. Действительно, известно, что диффузионное приближение УПИ плохо работает вблизи источников излучения, на границах объекта, а также в областях с малым рассеянием и резкими неоднородностями. Кроме того, прошедшие через СРС без взаимодействия так называемые баллистические фотоны принципиально не могут описываться диффузионным уравнением. Далее, для диффузионного уравнения, так же как и для первоначального УПИ,

не удастся найти точного аналитического решения в общем случае. Поэтому для перехода к томографии необходимо использовать дополнительные предположения, что, естественно, не повышает точности реконструкции.

Поскольку в ТОТ восстановлению подлежат уже две неизвестные функции, в обычной томографической схеме измерений информации принципиально недостаточно. Используются различные подходы, увеличивающие количество исходной информации. Основными среди них являются следующие:

— регистрация прошедшего излучения не только на оси первоначального луча, но и в других точках поверхности объекта;

— использование высокочастотной модуляции непрерывного излучения и регистрации прошедшего через СРС излучения на частоте модуляции;

— использование импульсного излучения и регистрации временного распределения прошедшего через СРС излучения.

Однако существует рассеивающая среда с особыми свойствами, названная пропорциональной рассеивающей средой (ПРС), для которой возможно точное аналитическое решение УПИ, позволяющее, в свою очередь, точно решить обратную томографическую задачу без дополнительных предположений. ПРС является промежуточной между ЧПС и произвольной СРС, так как с одной стороны, в ней присутствует рассеяние излучения, а с другой при стремлении коэффициента рассеяния к нулю происходит непрерывный переход к соотношениям, справедливым для ЧПС, что невозможно, например, для диффузионного приближения. Поскольку в ПРС сохраняется понятие линии проецирования, теряющее смысл в произвольной СРС, и неизвестной является только одна пространственная функция, возможно использование непрерывного излучения и обычных геометрических схем томографических измерений.

## Пропорциональная рассеивающая среда

Задачей трансмиссионной томографии СРС является восстановление пространственных распределений характеристик рассеивающей среды, которые входят в качестве феноменологических параметров в уравнение переноса излучения — так называемая обратная задача. Этими характеристиками являются коэффициент поглощения излучения  $\mu_a(\mathbf{r})$  и пространственно неоднородный дифференциальный по углам коэффициент рассеяния излучения (индикатриса рассеяния)  $\mu_s(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega)$ , где  $\mathbf{r}$  — точка среды,  $\Omega'$  и  $\Omega$  — направления фотона до и после рассеяния соответственно. Для описания взаимодействия излучения со средой используется уравнение

переноса излучения, которое можно записать в виде

$$\Omega \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}, \Omega) + \mu(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, \Omega)$$

$$- \oint_{4\pi} \Phi(\mathbf{r}, \Omega) \mu_s(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega' = S(\mathbf{r}, \Omega). \quad (1)$$

где  $\Phi(\mathbf{r}, \Omega)$  — плотность потока фотонов в точке  $\mathbf{r}$ , движущихся в направлении  $\Omega$ ,  $S(\mathbf{r}, \Omega)$  — функция распределения источников излучения и  $\mu(\mathbf{r}) = \mu_a(\mathbf{r}) + \oint_{4\pi} \mu_s(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) d\Omega'$  — коэффициент экстинкции (ослабления).

Определить понятие пропорциональной среды можно в два этапа. На первом этапе определим рассеивающую среду с „рассеянием прямо назад“ [9,14], для которой

$$\mu_s(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) = \mu_s(\mathbf{r})\delta_2(-\Omega\Omega'), \quad (2)$$

где  $\mu_s(\mathbf{r})$  — коэффициент рассеяния этой модели, а  $\delta_2(\bullet)$  — поверхностная дельта-функция (двумерная дельта-функция на поверхности единичной сферы) [10]. При этом процесс рассеяния, по существу, сводится к обратному рассеянию. Основным физическим свойством такой рассеивающей среды, обеспечивающим эффективность сделанного предположения, является то, что сохраняется понятие линии проецирования, т.е. если фотон двигался вдоль некоторой прямой линии, то он останется на этой линии, лишь изменяя время от времени направление движения на противоположное. По-видимому, предположение (2) единственное, обладающее таким свойством, если не считать тривиальное „рассеяние прямо вперед“, при котором  $\mu_s(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) = \mu_s(\mathbf{r})\delta_2(+\Omega\Omega')$ , среда превращается в чисто поглощающую, и ее рассеивающие свойства полностью теряются. При использовании предположения (2) УПИ резко упрощается

$$\Omega \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}, \Omega) + \mu(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}, \Omega) - \Phi(\mathbf{r}, -\Omega)\mu_s(\mathbf{r}) = S(\mathbf{r}, \Omega). \quad (3)$$

Оказалось, что эта модель вполне точно описывает временное распределение прошедшего через СРС излучения импульсного лазера [15]. Разделив баллистическую и рассеянную компоненты в измеренном временном распределении, можно осуществить одновременную томографическую реконструкцию двух независимых пространственных распределений коэффициентов рассеяния и поглощения. На этом пути особое значение имеет реализация условий, при которых разделяются баллистические и рассеянные фотоны, которая оказалась достаточно трудной экспериментальной задачей [16].

Так как в обычной томографической схеме невозможно одновременно восстановить две неизвестные функции  $\mu(\mathbf{r})$  и  $\mu_s(\mathbf{r})$ , необходимо дополнительное предположение, уменьшающее количество неизвестных. Например, можно считать, что одна из этих функций известна, в том числе равна известной константе. Аналогичный прием был использован при выведении экспоненциального преобразования Радона [9]. Однако более интересен

другой путь — установление связи между функциями  $\mu(\mathbf{r})$  и  $\mu_s(\mathbf{r})$ . Предположим, что пространственно неоднородные коэффициенты рассеяния и экстинкции связаны соотношением

$$\mu_s(\mathbf{r}) = \beta\mu(\mathbf{r}), \quad (4)$$

где  $\beta$  — не зависящий от координат коэффициент. Такую рассеивающую среду и будем называть пропорциональной рассеивающей средой. Обоснованием предположения (4) может служить представление о поглощающе-рассеивающих центрах, неравномерно распределенных в пространстве, каждый из которых может с некоторой вероятностью поглотить и рассеять фотон. Тогда и коэффициент поглощения, и коэффициент рассеяния должны быть пропорциональны одной и той же плотности таких центров. Объединив (2) и (4), получим соотношение, определяющее ПРС:

$$\mu_s(\mathbf{r}, \Omega' \rightarrow \Omega) = \beta\mu(\mathbf{r})\delta_2(-\Omega\Omega'). \quad (5)$$

Рассматривая уравнение (3) для двух направлений  $\Omega$  и  $-\Omega$  и учитывая (4), можно получить одно дифференциальное уравнение второго порядка в виде

$$\begin{aligned} & (\Omega \operatorname{grad}(\Omega \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}, \Omega))) - \frac{(\Omega \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}, \Omega))(\Omega \operatorname{grad} \mu(\mathbf{r}))}{\mu(\mathbf{r})} \\ & - \Phi(\mathbf{r}, \Omega)(1 - \beta^2)\mu^2(\mathbf{r}) = (\Omega \operatorname{grad} S(\mathbf{r}, \Omega)) \\ & - \left( \mu(\mathbf{r}) + \frac{(\Omega \operatorname{grad} \mu(\mathbf{r}))}{\mu(\mathbf{r})} \right) S(\mathbf{r}, \Omega) - \beta\mu(\mathbf{r})S(\mathbf{r}, -\Omega). \end{aligned} \quad (6)$$

Заметим, что уравнение (6) является точным УПИ для определенной СРС, а именно для ПРС, обладающей свойством (5), в то время как уравнения в других подходах, например диффузионное уравнение, являются всего лишь приближениями для УПИ в любой СРС. Поэтому решение уравнения (6) может служить некоторым эталоном для оценки других приближенных моделей, претендующих на описание прохождения излучения через произвольные СРС, в том числе и ПРС.

Так как  $\Omega \operatorname{grad} \Phi(\mathbf{r}, \Omega) = \lim_{R \rightarrow 0} \frac{d}{dR} \Phi(\mathbf{r} + R\Omega, \Omega)$  — производная по направлению  $\Omega$ , запишем уравнение (6) для произвольной точки  $\mathbf{r} = \mathbf{r} + R\Omega$  на линии, проходящей через точку  $\mathbf{r}$  в направлении  $\Omega$  (рис. 1):

$$\begin{aligned} & \frac{d^2}{dR^2} \Phi(\mathbf{r} + R\Omega, \Omega) - \frac{d}{dR} \mu(\mathbf{r} + R\Omega) \frac{d}{dR} \Phi(\mathbf{r} + R\Omega, \Omega) \\ & - [(1 - \beta^2)\mu^2(\mathbf{r} + R\Omega)] \Phi(\mathbf{r} + R\Omega, \Omega) = S_1(\mathbf{r} + R\Omega, \Omega), \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{r} + R\Omega, \Omega) &= \frac{d}{dR} S(\mathbf{r} + R\Omega, \Omega) \\ &- \left( \mu(\mathbf{r} + R\Omega) + \frac{d}{dR} \mu(\mathbf{r} + R\Omega) \right) S(\mathbf{r} + R\Omega, \Omega) \\ &- \beta\mu(\mathbf{r} + R\Omega)S(\mathbf{r} + R\Omega, -\Omega). \end{aligned}$$

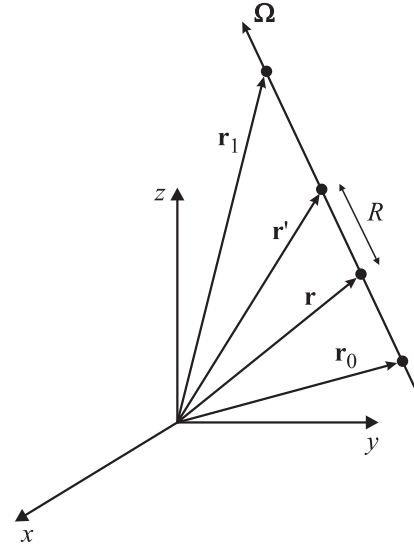


Рис. 1. К решению уравнения (6).

Обозначим на линии, проходящей через точку  $\mathbf{r}$  в направлении  $\Omega$ , две точки — входа в рассеивающую область  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r} + R_0\Omega$  и выхода из рассеивающей области  $\mathbf{r} = \mathbf{r} + R_1\Omega$  (рис. 1). Считая, что излучение порождается только источниками, находящимися внутри рассеивающей области, и никакого излучения, входящего извне внутрь рассеивающей области, нет, и используя уравнение (3), можно получить следующие точные граничные условия:

$$\begin{cases} \Phi(\mathbf{r} + R_0\Omega, \Omega) = 0, \\ \left. \frac{d}{dR} \Phi(\mathbf{r} + R\Omega, \Omega) \right|_{R=R_1} + \mu(\mathbf{r} + R_1\Omega)\Phi(\mathbf{r} + R_1\Omega, \Omega) = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Решив уравнение (7) с граничными условиями (8) и устремляя  $R$  к нулю, можно получить решение уравнения (6) в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, \Omega) &= \int_{R_0}^0 \frac{S_1(\mathbf{r} + R\Omega, \Omega)}{\sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} + R\Omega)} \operatorname{sh} \left( \int_R^0 \sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} + R'\Omega) dR' \right) dR \\ &- \frac{\operatorname{sh} \left( \int_{R_0}^0 \sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} + R\Omega) dR \right)}{\sqrt{1 - \beta^2} \operatorname{ch} \left( \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} + R\Omega) dR \right) + \operatorname{sh} \left( \int_{R_0}^{R_1} \sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} + R\Omega) dR \right)} \\ & S_1(\mathbf{r} + R\Omega, \Omega) \left[ \sqrt{1 - \beta^2} \operatorname{ch} \left( \int_R^{R_1} \sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} + R'\Omega) dR' \right) + \right. \\ & \left. + \operatorname{sh} \left( \int_R^{R_1} \sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} + R'\Omega) dR' \right) \right] \\ & \times \int_{R_0}^{R_1} \frac{dR}{\sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} + R\Omega)}. \end{aligned} \quad (9)$$

Решение (9) является точным аналитическим решением для уравнения переноса излучения в пропорциональ-

ной рассеивающей среде с произвольным распределением источников излучения.

## Томографическая реконструкция в ПРС

Рассмотрим томографическую реконструкцию пространственного распределения коэффициента экстинкции в пропорциональной рассеивающей среде, опираясь на решение уравнения переноса излучения (9). Так как понятие линии проецирования в ПРС сохраняется, можно проводить реконструкцию в каждом двумерном сечении независимо. Зафиксируем координату  $z$  и рассмотрим сечение объекта в плоскости  $z = z_0$  (рис. 2, *a*). Как обычно в томографии, введем в плоскости сечения наряду с неподвижной системой координат  $(x, y)$  вращающуюся (повернутую на угол  $\theta$ ) систему координат  $(\xi, \zeta)$ , в которой ось  $\xi$  всегда параллельна линии проецирования, вдоль которой объект облучается узким направленным пучком излучения (рис. 2, *b*).

Будем считать, что в точке  $\mathbf{r}_0 = (\xi_0, \zeta_0, z_0)$  расположен точечный мононаправленный источник, излучающий в направлении  $\Omega_0$ . Тогда

$$S(\mathbf{r}, \Omega) = A\delta_2(\Omega\Omega_0)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0),$$

где  $A$  — постоянный множитель, характеризующий интенсивность источника,  $\delta_2(\Omega\Omega_0)$  — поверхностная

дельта-функция, а  $\delta(\mathbf{r})$  — обычная трехмерная дельта-функция Дирака. Во вращающейся системе координат

$$S(\mathbf{r}, \Omega) = A\delta_2(\Omega\Omega_0)\delta(\xi - \xi_0)\delta(\zeta - \zeta_0)\delta(z - z_0),$$

где  $\delta(\bullet)$  — обычная одномерная дельта-функция Дирака, и

$$\begin{aligned} S_1(\mathbf{r} + R\Omega, \Omega) &= A\delta_2(\Omega\Omega_0)\delta(\xi - \xi_0)\delta(z - z_0) \\ &\times \delta'(\xi + R - \xi_0) - A\delta_2(\Omega\Omega_0) \left( \mu(\xi, \zeta + R, z) \right. \\ &+ \left. \frac{d}{dR}\mu(\xi, \zeta + R, z) \right) \delta(\xi - \xi_0)\delta(z - z_0)\delta(\xi + R - \xi_0) \\ &- \beta\mu(\xi, \zeta + R, z)A\delta_2(-\Omega\Omega_0)\delta(\xi - \xi_0) \\ &\times \delta(\xi + R - \xi_0)\delta(z - z_0), \end{aligned} \quad (10)$$

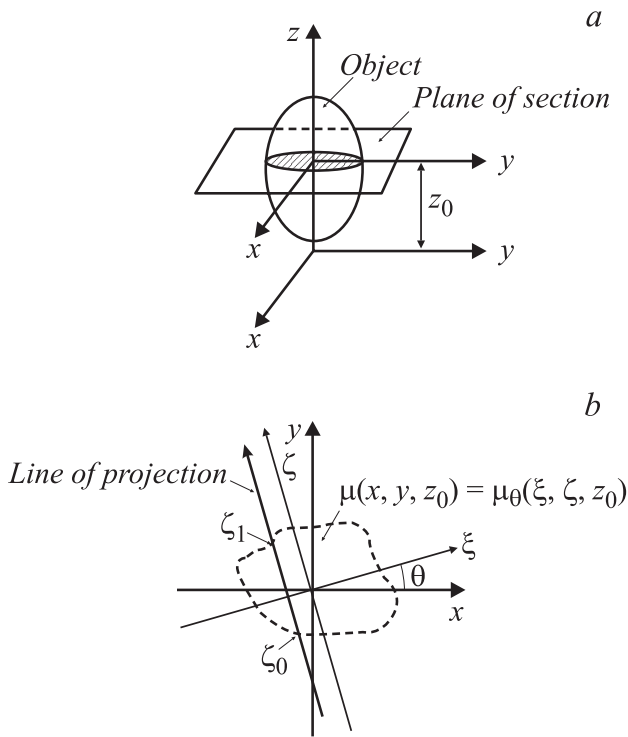
где  $\delta'(\bullet)$  — производная одномерной дельта-функции Дирака. Подставив выражение (10) в соотношение (9) и выполнив интегрирование, получим для произвольной точки  $\mathbf{r} = (\xi, \zeta, z)$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}, \Omega) &= -A\delta_2(\Omega\Omega_0)\delta(\xi - \xi_0)\delta(z - z_0) \\ &\times \frac{\text{sh}\left(\int_0^{\xi - \xi_0} \sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} - R\Omega)dR\right)}{\sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} - (\xi - \xi_0)\Omega)} \\ &\times \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \text{sh}\left(\int_{\xi - \xi_1}^{\xi - \xi_0} \sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} - R\Omega)dR\right) + \text{ch}\left(\int_{\xi - \xi_1}^{\xi - \xi_0} \sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} - R\Omega)dR\right)}{\sqrt{1 - \beta^2} \text{ch}\left(\int_{\xi - \xi_1}^{\xi - \xi_0} \sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} - R\Omega)dR\right) + \text{sh}\left(\int_{\xi - \xi_1}^{\xi - \xi_0} \sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} - R\Omega)dR\right)} \\ &+ A\delta_2(\Omega\Omega_0)\delta(\xi - \xi_0)\delta(z - z_0) \\ &\times \frac{\text{ch}\left(\int_0^{\xi - \xi_0} \sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} - R\Omega)dR\right)}{\sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r} - (\xi - \xi_0)\Omega)}. \end{aligned}$$

В точке  $\mathbf{r}_d = (\xi, \zeta_1, z)$

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}_d, \Omega) &= \\ &= \frac{A\delta_2(\Omega\Omega_0)\delta(\xi - \xi_0)\delta(z - z_0)}{\mu(\mathbf{r}_0)} \frac{2\sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}} \\ &\times \frac{e^{\int_0^{\xi_1 - \xi_0} \sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r}_d - R\Omega)dR} - \frac{1 - \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}} e^{-\int_0^{\xi_1 - \xi_0} \sqrt{1 - \beta^2}\mu(\mathbf{r}_d - R\Omega)dR}}{1 + \sqrt{1 - \beta^2}}. \end{aligned} \quad (12)$$

Выражение (12) существенно сложнее, чем закон экспоненциального ослабления для чисто поглощающей



**Рис. 2.** Выделение двумерного сечения в трехмерном объеме (*a*); неподвижная  $(x, y)$  и вращающаяся  $(\xi, \zeta)$  системы координат в геометрической схеме измерений с параллельными проекциями (*b*).

среды. В то же время при значении  $\beta$ , стремящемся к нулю, выражение (12) непрерывно переходит в закон экспоненциального ослабления, что позволяет использовать его как для сред с сильным рассеянием, так и для сред со слабым рассеянием.

Для получения данных, измеренных детектором, необходимо проинтегрировать (12) по площади чувствительной поверхности детектора  $\Delta S$  и по углам падения излучения на детектор:

$$U(\xi_0, \theta) = \iint_{\Delta S} \left[ \iint_{2\pi} \Phi(\mathbf{r}_d, \Omega)(\mathbf{n}\Omega) d\Omega \right] d\xi dz,$$

где  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к поверхности детектора. Для плоского детектора, перпендикулярного  $\Omega_0$ ,

$$U(\xi_0, \theta) = \frac{U_0 \frac{2\sqrt{1-\beta^2}}{1+\sqrt{1-\beta^2}} \int_0^{\xi_1-\xi_0} \sqrt{1-\beta^2} \mu(\mathbf{r}_d - R\Omega) dR - \frac{1-\sqrt{1-\beta^2}}{1+\sqrt{1-\beta^2}} e^{-\int_0^{\xi_1-\xi_0} \sqrt{1-\beta^2} \mu(\mathbf{r}_d - R\Omega) dR}}{e^{-\int_0^{\xi_1-\xi_0} \sqrt{1-\beta^2} \mu(\mathbf{r}_d - R\Omega) dR}}, \quad (13)$$

где  $U_0 = A$ . Если определить проекции в традиционном для рентгеновской томографии виде, как  $p(\xi_0, \theta) = -\ln(U(\xi_0, \theta)/U_0)$ , то применение к ним обратного преобразования Радона приведет к очевидным искажениям реконструированной томограммы, так как при этом проекция не будет являться интегралом вдоль прямой линии. Однако, используя (12), можно выразить интеграл вдоль прямой линии

$$\int_0^{\xi_1-\xi_0} \mu(\mathbf{r}_1 - R\Omega) dR$$

через измеренные данные и получить правильное определение проекции:

$$p(\xi_0, \theta) = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \times \ln \left( \frac{(U(\xi_0, \theta)/U_0)(1 + \sqrt{1-\beta^2})}{\sqrt{1-\beta^2} + \sqrt{1-\beta^2 + \beta^2(U(\xi_0, \theta)/U_0)^2}} \right). \quad (14)$$

Поскольку теперь  $p(\xi_0, \theta)$  будет представлять собой преобразование Радона функции  $\mu(x, y)$ , применив обратное преобразование Радона  $\mathfrak{R}^{-1}\{\bullet\}$ , получим пространственное распределение коэффициента экстинкции  $\mu(x, y)$ :

$$\mu(x, y) = \mathfrak{R}^{-1}\{p(\xi_0, \theta)\}. \quad (15)$$

Таким образом, соотношения (14), (15) представляют собой точное решение задачи томографической реконструкции пространственного распределения коэффициента экстинкции в пропорциональной рассеивающей среде.

## Влияние коэффициента пропорциональности ПРС на точность томографической реконструкции

Коэффициент пропорциональности  $\beta$  в (14) должен быть задан независимо, поэтому представляет интерес исследовать влияние неточного знания коэффициента  $\beta$  при реконструкции на точность восстановления пространственного распределения коэффициента экстинкции. Запишем, для краткости,  $\xi$  вместо  $\xi_0$ , а истинное значение коэффициента  $\beta$ , при котором получены измеренные данные, укажем в списке аргументов  $U(\xi, \theta) = U(\xi, \theta, \beta)$ . Значение коэффициента пропорциональности, при котором производится восстановление, обозначим  $\beta_r$ . Тогда вместо (14) получим

$$p_r(\xi, \theta) = -\frac{1}{\sqrt{1-\beta_r^2}} \times \ln \left( \frac{-\sqrt{1-\beta_r^2} + \sqrt{1-\beta_r^2 + \beta_r^2(U(\xi, \theta, \beta)/U_0)^2}}{(U(\xi, \theta, \beta)/U_0)(1 + \sqrt{1-\beta_r^2})} \right), \quad (16)$$

где  $p_r(\xi, \theta)$  — проекции, соответствующие неточному значению коэффициента пропорциональности  $\beta_r$ . Соответственно восстановленное распределение коэффициента экстинкции будет находиться по формуле

$$\mu_r(x, y) = \mathfrak{R}^{-1}\{p_r(\xi, \theta)\}. \quad (17)$$

В качестве исходного тестового распределения коэффициента экстинкции возьмем однородное распределение внутри круга радиуса  $R$ :

$$\mu(x, y) = \mu_0 \eta(R - \sqrt{x^2 + y^2}), \quad (18)$$

где  $\eta(\bullet)$  — ступенчатая функция Хевисайда. В соответствии с (12) получим

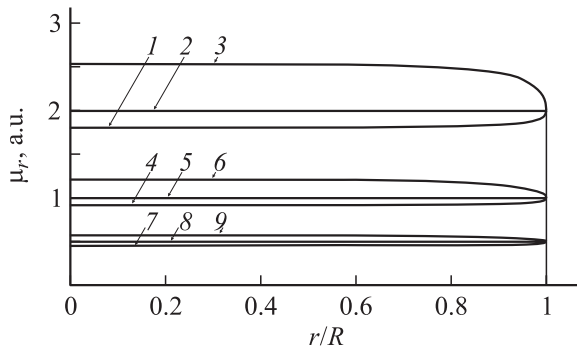
$$U(\xi, \theta, \beta) = \frac{U_0 \sqrt{1-\beta^2}}{\sqrt{1-\beta^2} \operatorname{ch}(2\mu_0 R \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{1-\xi^2}) + \operatorname{sh}(2\mu_0 R \sqrt{1-\beta^2} \sqrt{1-\xi^2})}. \quad (19)$$

Отклонение восстановленного распределения коэффициента экстинкции  $\mu_r(x, y) = \mathfrak{R}^{-1}\{p_r(\xi_0, \theta)\}$  от истинного  $\mu(x, y)$  будем оценивать по значениям нормированного критерия точности в квадратичной метрике, вычисляемых по формуле:

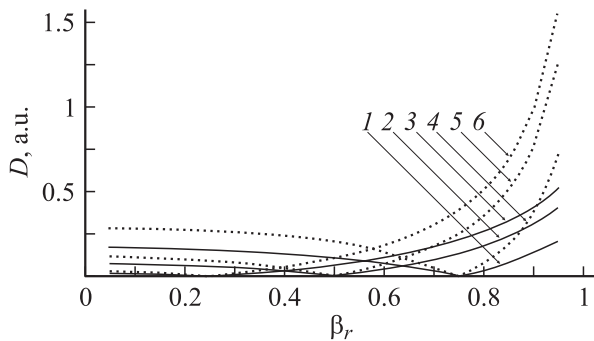
$$D = \frac{1}{\mu_0} \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n (\mu(x_j, y_j) - \mu_r(x_j, y_j))^2}, \quad (20)$$

где  $n$  — количество точек в дискретных версиях  $\mu(x, y)$  и  $\mu_r(x, y)$ .

Отклонение восстановленного распределения коэффициента экстинкции от истинного будет зависеть как



**Рис. 3.** Восстановленные профили радиальных сечений при  $\beta = 0.5$  для  $\mu_0 R = 0.5$  (7, 8, 9), 1 (4, 5, 6), 2 (1, 2, 3) и  $\beta_r = 0.25$  (1, 4, 7), 0.5 (2, 5, 8), 0.75 (3, 6, 9).



**Рис. 4.** Зависимости отклонения восстановленного распределения коэффициента экстинкции от истинного при  $\mu_0 R = 0.5$  (1, 2, 3), 2 (4, 5, 6) и  $\beta = 0.25$  (3, 6), 0.5 (2, 5), 0.75 (1, 4).

от соотношения коэффициентов пропорциональности  $\beta$  и  $\beta_r$ , так и от значения  $\mu_0 R$ . На рис. 3 показаны профили радиального сечения восстановленного распределения коэффициента экстинкции при различных сочетаниях  $\mu_0 R$ ,  $\beta$  и  $\beta_r$ .

Можно сделать следующие выводы.

1. При неточном знании коэффициента пропорциональности наибольшим искажениям подвергаются внутренние области объекта.

2. При  $\beta_r < \beta$  значения восстановленного коэффициента экстинкции меньше истинных, а при  $\beta_r > \beta$  значения восстановленного коэффициента экстинкции больше истинных. Кроме того, величина искажений увеличивается с ростом  $\mu_0 R$ .

На рис. 4 показаны зависимости от  $\beta_r$  нормированного критерия отклонения восстановленного распределения коэффициента экстинкции от истинного при различных сочетаниях  $\mu_0 R$  и  $\beta$ . Кроме дополнительного подтверждения, о том что величина искажений увеличивается с ростом  $\mu_0 R$ , приведенные зависимости позволяют сделать вывод о предпочтительности занижения коэффициента пропорциональности при реконструкции

относительно истинного значения по сравнению с его завышением.

## Заключение

В работе рассмотрено понятие пропорциональности рассеивающей среды, в настоящее время единственной, позволяющей точно решить задачу томографической реконструкции физической характеристики рассеивающей среды — коэффициента экстинкции (ослабления), так же, как это было сделано для чисто поглощающей среды в случае, например, рентгеновской трансмиссионной томографии. Получено точное аналитическое решение уравнения переноса, соответствующего пропорциональной рассеивающей среде, для произвольного распределения источников излучения. Приведено точное решение задачи томографической реконструкции пространственного распределения коэффициента экстинкции ПРС. Исследовано влияние ошибочного знания коэффициента пропорциональности ПРС на точность реконструкции. Поскольку решение для ПРС является точным, оно может служить критерием для оценки точности других моделей томографической реконструкции физических характеристик рассеивающих сред, претендующих на применимость к произвольным рассеивающим средам, а следовательно и к ПРС. Полученные результаты могут быть полезны при разработке новых типов трансмиссионных оптических томографов.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (проект № РНП.2.1.1.4553).

## Список литературы

- [1] *Medical optical tomography: functional imaging and monitoring* // Proc. SPIE. 1993. Vol. IS11. 656 p.
- [2] *Optical Tomography, Photon Migration, and Spectroscopy of Tissue and Model Media: Theory, Human Studies, and Instrumentation* // Proc. SPIE. 1995. Vol. 2389. 894 p.
- [3] *Тучин В.В.* // УФН. 1997. Т. 167. № 5. С. 517–539.
- [4] *Selected Papers on Optical Tomography: Fundamentals and Applications in Medicine* // Proc. SPIE. 1998. Vol. MS147/HC. 736 p.
- [5] *Arridge S.R.* // Inverse Problems. 1999. Vol. 15. P. R41–R93.
- [6] *Optical Tomography and Spectroscopy of Tissue VI* // Proc. SPIE. 2005. Vol. 5693. 799 p.
- [7] *Image Reconstruction from Projections: Implementation and Applications* / Ed. by G.T. Herman. Berlin; N.Y.: Springer-Verlag, 1979. 252 p.
- [8] *Хермен Г.* Восстановление изображений по проекциям: Основы реконструктивной томографии / Пер. с англ. М.: Мир, 1983. 352 с.
- [9] *Терещенко С.А.* Методы вычислительной томографии. М.: Физматлит, 2004. 320 с.
- [10] *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса. М.: Мир, 1972. 386 с.

- [11] Кольчужкин А.М., Учайкин В.В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. М.: Атомиздат, 1978. 256 с.
- [12] Исимару А. Распространение и рассеяние волн в случайно-неоднородных средах. М.: Мир, 1981. Т. 1. 280 с.
- [13] Апресян Л.А., Кравцов Ю.А. Теория переноса излучения. М.: Наука, 1983. 216 с.
- [14] Селищев С.В., Терещенко С.А. // ЖТФ. 1997. Т. 67. Вып. 5. С. 61–65.
- [15] Терещенко С.А., Подгаецкий В.М., Воробьев Н.С., Смирнов А.В. // Квантовая электроника. 1996. Т. 23. № 3. С. 265–268.
- [16] Podgaetsky V.M., Tereshchenko S.A., Smirnov A.V., Vorob'ev N.S. // Optics Communications. 2000. Vol. 180. P. 217–223.