

Развитие теории двумерного преобразования Адамара для пространственной локализации аддитивного шума

© Б.Г. Подласкин, Е.Г. Гук, А.А. Сухарев

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: bgp@holo.ioffe.rssi.ru

(Поступило в Редакцию 9 октября 2007 года)

Представлены анализ и результаты моделирования пространственной локализации спектра шума с известной корреляционной характеристикой при использовании пространственно-секвентивной комбинаторики в случае строчного и столбцового упорядочивания элементов матрицы преобразования Уолша–Адамара в процессе их передачи по каналу связи.

PACS: 02.10.Yn, 02.50.Ey

Введение

Обработке изображений с помощью преобразования Адамара в настоящее время уделяется значительное внимание. Основными целями, которые преследуются при использовании этого преобразования, являются сжатие передаваемой информации, фильтрация изображений, распознавание образов в случае достаточного взаимного различия их пространственных спектров и ряд других задач, связанных с удобством кодирования и восстановления сигналов [1,2]. В работах [3,4] была поставлена и обоснована задача пространственной локализации аддитивного шума путем перестановки функций Уолша, составляющих матрицу преобразования при кодировании изображений с помощью матрицы Адамара.

Специфика современной элементной базы, главным образом двумерных многоэлементных фотоприемников, которые используются для устройств ввода анализируемых изображений, оставляет реализацию преобразования Адамара в рамках достаточно быстрых, но тем не менее последовательных методов обработки двумерных массивов информации, которые представляют собой различного рода изображения. При сколь-нибудь значительных размерностях обрабатываемых изображений это обстоятельство не только замедляет процесс вычисления спектральных трансформант преобразования, но и существенным образом затрудняет использование сложных алгоритмов и адаптивной комбинаторики, которые могут быть использованы с целью наиболее эффективной локализации дисперсии шума в пространстве восстановленного изображения.

Возможный вариант фоточувствительного устройства параллельного действия на основе встречно включенных фотодиодов с кодированием распределения чувствительности по всему полю за один такт работы устройства уже предлагался в [5], однако он не мог быть реализован с точки зрения достаточной размерности и быстродействия вследствие ограниченности технологических возможностей того времени.

При современном развитии полупроводниковых технологий размерность фотоприемных матриц достигает 10^7 пикселей, площадь которых составляет единицы квадратных микрометров [6]. Это обстоятельство позволяет ставить задачи, рассчитанные на использование в качестве устройств ввода оптической информации фоточувствительных матриц с кодируемой апертурой и возможностью применения интегральных преобразований оптических изображений непосредственно на входе регистрирующих устройств.

В настоящее время накоплен большой опыт по обработке, сжатию и фильтрации изображений, в том числе с использованием интегральных бинарных преобразований типа преобразования Уолша–Адамара [7]. Такая задача может быть успешно решена при предварительном представлении исходных данных в виде двумерных массивов. Известны работы по кодированию и дальнейшей передаче временных сигналов в формате преобразования Адамара размерностью 2×2 , 4×4 [8], в которых показана возможность сокращения объема передаваемой информации за счет отсечения слабых спектральных коэффициентов. При определенных условиях используются такие интегральные преобразования, как преобразование Карунен–Лоэва, преобразование Фурье, метод кодирования Хаффмана, и другие, обеспечивающие сжатие и защищенное от ошибок восстановление сигналов [9,10].

Однако в отличие от известных работ наше внимание сосредоточено на организации и обработке сигнала в препроцессоре с целью не столько предварительного сжатия информации, сколько обеспечения максимального подавления шумов канала связи на основе метода пространственной локализации дисперсии шума.

Исследование пространственной локализации аддитивного шума путем перестановки базисных функций является фундаментальной задачей при изучении комбинаторных свойств интегральных преобразований. Разработка новых информационных технологий, основанных на использовании таких матриц, актуальна как для со-

здания новых форматов передачи информации, так и для аргументации технологических усилий по разработке фоточувствительных матриц параллельного действия с кодированием апертуры.

Исследование пространственной локализации дисперсии при ортогональном отображении спектрального представления шума

В настоящей работе рассматривается расширенная математическая модель пространственной локализации (фильтрации) временных шумов канала связи. Гипотеза о возможности такой локализации была выдвинута и частично проанализирована в работе [4]. Математическое обоснование локализации шума, связанное с анализом разложения Уолша со случайными коэффициентами, проработано в [3].

Данная гипотеза базируется на следующих соображениях. При любом интегральном преобразовании одномерного или двумерного сигналов, являющихся функциями времени или пространственных координат, производится замена переменных, являющихся аргументом исходного сигнала, на аргумент системы базисных функций, по которым производится преобразование. Таким образом, происходит замена координат, в которых описываются входные сигналы. Так, например, в случае преобразования Фурье происходит замена временной координаты t на координату f , представляющую собой частоту, по которой производится спектральное представление сигналов.

В случае преобразования Адамара также происходит замена переменных. В матрице Адамара систему базисных функций образуют функции Уолша, заданные на интервале $[0,1)$, принимающие значения $+1$ и -1 . Эти функции различаются между собой числом (секвентой) перемен знака на интервале $[0,1)$ и образуют полную ортогональную базисную систему. Таким образом, с помощью преобразования Адамара производится разложение сигналов по секвентам функций Уолша, подобно тому как путем преобразования Фурье производится разложение по частоте гармонических функций. В случае преобразования сигналов и изображений значение секвенты „ i “ в разложении Адамара соответствует пространственной частоте исходного сигнала. При обратном преобразовании спектр исходного сигнала превращается в пространственное распределение. При преобразовании изображений важным для нас обстоятельством является замена пространственной переменной „ x “ на пространственную частоту (секвенту) „ i “ при прямом преобразовании Адамара H сигнала F и обратная замена „ i “ на „ x “ при обратном преобразовании HFH^T .

Обозначим матрицу коэффициентов прямого преобразования Уолша–Адамара как $|W_{i,j}|$

$$|W_{i,j}| = |F_{i,j}| |H_{i,j}|, \quad (1)$$

где

$$|F_{i,j}| = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1N} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ f_{N1} & f_{N2} & \dots & f_{NN} \end{vmatrix},$$

$$|H_{i,j}| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & -1 \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ 1 & -1 & \dots & -1 \end{vmatrix},$$

$$|W_{i,j}| = \begin{vmatrix} w_{11} & w_{12} & \dots & w_{1N} \\ w_{21} & w_{22} & \dots & w_{2N} \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \dots & \cdot \\ w_{N1} & w_{N2} & \dots & w_{NN} \end{vmatrix}. \quad (2)$$

Для последовательной передачи по каналу связи элементов матрицы $|W_{i,j}|$ (трансформант изображения F) необходимо ввести некий оператор L , преобразующий матрицу $|W_{i,j}|$ в вектор LW длиной N^2 , где N соответствует размерности преобразования. Именно на этот вектор в канале связи накладывается аддитивный шум ψ . Заметим, что при пиксельной передаче такого изображения длина передаваемого вектора также будет равна N^2 . При обратном преобразовании восстанавливается новое изображение F' , представляющее собой сумму исходного изображения F и аддитивного члена $H^T(L\psi)$, который является изображением спектра шума ψ в базисе H , т.е.

$$F' = F + H^T(L\psi). \quad (3)$$

От вида оператора L , так же как от порядка расположения базисных функций Уолша, зависят очередность следования в канале связи трансформант $w_{i,j}$, и следовательно, форма изображения спектра шума после восстановления сигнала. В работах [3,4] LW рассматривается как строчная матрица $[N^2, 1]$, вследствие чего пространственная локализация шума при различных видах упорядочивания матрицы Адамара носит явно выраженный строчный характер.

На рис. 1 показано, как меняется распределение дисперсии шума от способа упорядочивания матрицы Адамара. При расположении функций Уолша по степени нарастания их секвент дисперсия шума концентрируется в верхней области поля (рис. 1, *a*), при расположении функций Уолша сначала по степени нарастания их секвент, а затем по их убыванию, дисперсия шума распадается на две области, сгруппированные в верхней и нижней областях поля изображения, оставляя центральную зону в области малых шумов (рис. 1, *b*).

Поставим задачу модернизации интегрального преобразования с целью получения возможности двумерной концентрации дисперсии шума. Функциональные возможности оператора L как последовательности считывания трансформант $w_{i,j}$ могут быть значительно

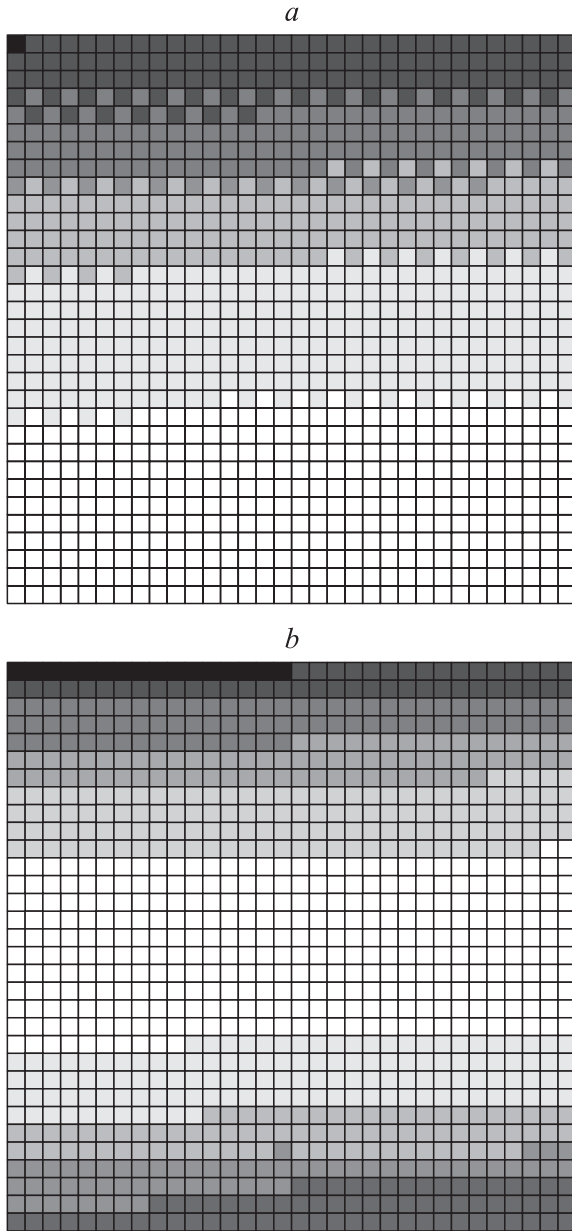


Рис. 1. Пространственное распределение шума при размерности преобразования 32×32 в случае различного секвентивного упорядочивания функций Уолша: *a* — распределение дисперсии при упорядочивании функций Уолша по нарастанию секвенты; *b* — распределение дисперсии при упорядочивании функций Уолша сначала по нарастанию, а затем по убыванию секвенты.

расширены. Используемый в качестве оператора, формулирующего упорядочивание матрицы Адамара, он может быть использован и как оператор, формулирующий любую перестановку базисных функций, в том числе реализующие перестановочную матрицу преобразования Грея, подобно случаю, рассмотренному в [4].

Рассмотрим вариант пространственной локализации дисперсии шума при совместном использовании оператора L как оператора строчной развертки, представляю-

щего матрицу $|W_{i,j}|$ в виде матрицы-строки вида

$$L|W_{i,j}| = |w_{(N-1)\cdot i+j}, \mathbf{1}|$$

и дополнительного оператора L^* , осуществляющего развертку матрицы $|W_{i,j}|$ по столбцам и формулирующего матрицу вида

$$L^*|W_{i,j}| = |\mathbf{1}, w_{(N-1)\cdot j+i}|.$$

Матрица $L|W_{i,j}|$ является строчной, а $L^*|W_{i,j}|$ — столбцовой и для совместной передачи по каналу связи их необходимо привести к идентичному виду. Поскольку $L^*|W_{i,j}| = L|W_{i,j}|^T$, то при замене исходной матрицы $|W_{i,j}|$ на транспонированную $|W_{i,j}|^T = |W_{j,i}|$ оператор L превращает столбцовое распределение элементов матрицы $|W_{i,j}|$ в матрицу-строку. Тогда обе линейные матрицы приобретают строчный вид при применении одного и того же оператора L : $L|W_{i,j}| = |w_{(N-1)\cdot i+j}, \mathbf{1}|$ и $L|W_{i,j}|^T = |w_{(N-1)\cdot j+i}, \mathbf{1}|$.

Пусть Λ представляет собой вектор-строку, состоящую из $L|W_{i,j}|$ и $L|W_{i,j}|^T$, последовательность передачи коэффициентов которых задана определенной комбинаторикой. В простейшем случае будем считать, что $L|W_{i,j}|$ и $L|W_{i,j}|^T$ передаются по каналу связи последовательно, образуя вектор $\Lambda = |w_{(N-1)\cdot i+j}, w_{N+(N-1)\cdot j+1}, \mathbf{1}|$ размерностью $2N^2$.

Рассматривая помеху ψ как случайный вектор, определим вероятностные характеристики погрешности ψ как случайного процесса

$$\Delta F = F' - F = \Lambda H \psi. \quad (4)$$

Поскольку ψ — стационарный в широком смысле вещественный случайный процесс, централизованный математическим ожиданием, то $M[\psi_i] = 0$ и смешанный момент второго порядка равен

$$M[\psi_i \psi_j] = K(i - j) = K(m) \quad (5)$$

при $i - j = m$, где K — корреляционная функция шума.

Дисперсия компонент вектора $H\psi$ в отличие от ранее рассмотренного варианта вычисляется с помощью суммарной ковариационной матрицы C вектора $\Lambda H \psi$:

Ковариационная матрица вектора $\Lambda H \psi$ равна HCH^T . Поскольку матрица Адамара симметрична, то $H\psi = HCH$. Элементы матрицы HCH равны

$$(HCH)_{il} = \frac{1}{N} \sum_{k,j} h_{ik} K(|k - j|) h_{jl} \quad (6)$$

или при $k - j = m$

$$(HCH)_{il} = \frac{1}{N} \left(NK(0) + 2 \sum_{m=1}^{N-1} K(m) \sum_{k=0}^{N-m-1} h_{ik} h_{l,k+m} \right). \quad (7)$$

Здесь с учетом того, что $\Lambda = |w_{(N-1)\cdot i+j}, w_{N+(N-1)\cdot j+1}, \mathbf{1}|$, число элементов вектора ψ равно $2N^2$.

Дисперсия компонент вектора $H\psi$ определяется диагональными элементами суммарной ковариационной матрицы, где i принимает значения от 1 до $2N$. С учетом размерности вектора Λ величина дисперсии принимает вид:

$$\begin{aligned} \sigma^2((H\psi)_{i,j}) &= K(0) \\ &+ \frac{2}{N} \sum_{m=1}^{N-1} K(m) \sum_{k=0}^{N-m-1} (h_{N(i-1)+j,k} h_{N(i-1)+j,k+m} \\ &+ h_{N(j-1)+i,k} h_{N(j-1)+i,k+m}). \end{aligned} \quad (8)$$

Здесь следует обратить внимание на то, что величина дисперсии и ее распределение по полю изображения при известной корреляционной функции шума ψ становятся зависимыми только от упорядочивания функций Уолша в матрице Адамара, но также и от порядка чередования передачи коэффициентов матриц $L|W_{i,j}| = |w_{(N-1)\cdot i+j}, 1|$ и $L|W_{i,j}|^T = |w_{(N-1)\cdot j+i}, 1|$, т.е. от вида упорядочивания вектора Λ .

При прохождении через канал связи с аддитивным шумом на приемное устройство поступает вектор $\Lambda' = |\Lambda + \psi|$, который по способу, тождественному использованному на передающей стороне для упорядочивания вектора Λ , разделяется на векторы $L'|W'_{i,j}|$ и $L'|W'_{i,j}|^T$. Производится обратное преобразование строчных векторов с восстановлением матриц $|W'_{i,j}|$ и $|W'_{j,i}|$ при дополнительном транспонировании $|W'_{j,i}|^T = |W'_{i,j}|$. Над обеими матрицами производится обратное преобразование Адамара:

$$H^T |W'_{i,j}| = F'_1 = F + H^T \psi_1, \quad (9)$$

$$H^T |W'_{j,i}|^T = F'_2 = F + H^T \psi_2, \quad (10)$$

где ψ_1 и ψ_2 — выборки шума канала связи, соответствующие моментам передач элементов матриц $L'|W'_{i,j}|$ и $L'|W'_{i,j}|^T$.

В отличие от ранее известных работ при такой организации вектора Λ образуется возможность представления спектра шума в поле изображения в виде суммы двух ортогональных друг другу реализаций изображения спектра шума. При последовательной передаче по каналу связи векторов $L|W_{i,j}| = |w_{(N-1)\cdot i+j}, 1|$ и $L|W_{i,j}|^T = |w_{(N-1)\cdot j+i}, 1|$, шум, аддитивно складывающийся с элементами векторов, оказывается некоррелированным, и значение дисперсии, приобретающей симметричное распределение с концентрацией максимумов в углах поля изображения, увеличивается.

На рис. 2 приведен результат моделирования распределения дисперсии шума на передаче элементов матрицы преобразования Адамара размерностью 32×32 над изображением F при считывании их сначала вдоль строк матрицы, а затем вдоль ее столбцов. Там же представлена условная модель сигнала F , расположенного в центральной области поля изображения. Величина дисперсии гауссова шума выбрана равной 0.25, что по

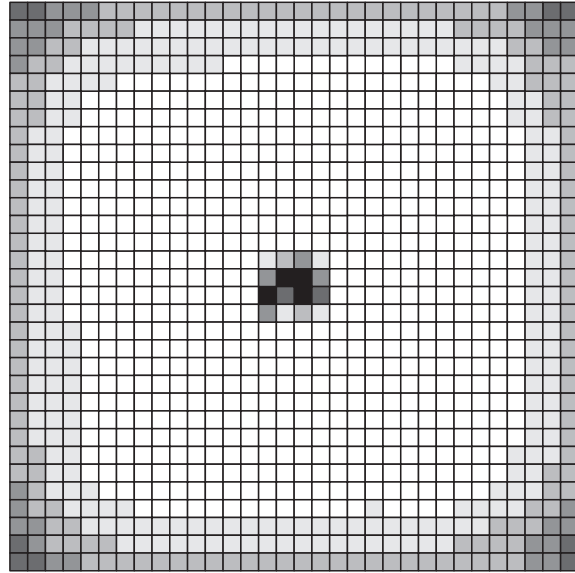


Рис. 2. Пространственное распределение шума при размерности преобразования 32×32 в случае двойного ортогонального преобразования.

отношению к минимальному уровню сигнала, принятого за единицу, дает следующее соотношение сигнал/шум:

$$\rho = \frac{I_{\text{sign}}}{\sqrt{\sigma^2}} = 2.$$

При поэлементной передаче сигнала такое соотношение сигнал/шум равномерно распределяется по всему полю при соответственно постоянном значении дисперсии. Результаты данной работы показали, что использование двойного ортогонального преобразования Уолша–Адамара позволяет повысить степень локализации дисперсии шума по полю изображения. В приведенной модели количество элементов в поле 32×32 , величина дисперсии в которых находится ниже среднего уровня дисперсии равного 0.25, составило 720 элементов, что позволяет условно оценить коэффициент пространственной фильтрации при таких условиях как ~ 0.7 .

Можно представить такую организацию передачи коэффициентов $L|W_{i,j}|$ и $L|W_{i,j}|^T$, при которой коэффициенты, соответствующие одинаковым значениям секвент функций Уолша, передаются в непосредственной близости друг от друга, так что временной интервал между ними меньше интервала корреляции шума канала. В этом случае шум на каждом из участков матрицы преобразования коррелирован, что позволяет снизить величину дисперсии распределенного изображения спектров шума. Анализ этого режима в условиях различной спектральной плотности шума, размерности преобразования и комбинаторики передачи коэффициентов представляет собой задачу для дальнейших исследований.

Заключение

Разработанный подход к возможности спектрального представления аддитивных шумов при использовании различных вариантов преобразования Уолша–Адамара в процессе предварительного кодирования изображений и передачи по каналу связи трансформант полученного преобразования продемонстрировал широкие возможности пространственной локализации дисперсии шума в поле изображения. Использование различной комбинаторики по отношению к упорядочиванию базисных функций преобразования, а также по отношению к порядку передачи трансформант интегральных преобразований позволяет управлять расположением областей максимальной концентрации дисперсии, перемещая их в априори малоинформационные участки поля изображения.

В настоящей работе показаны основные принципы подхода к такому методу фильтрации изображений. Этот метод может быть расширен как за счет разработки алгоритмов, адаптивных к характеристикам и структуре шумов канала связи, так и за счет использования других интегральных преобразований типа фурье-преобразования, дискретного косинусного преобразования и т.п., что может открыть новые перспективы при пространственной локализации временного шума.

Список литературы

- [1] *Золотарев В.В., Овечкин Г.В.* Помехоустойчивое кодирование. Методы и алгоритмы: Справочник. М., 2004. 126 с.
- [2] *Величко М.А., Наний О.Е., Сусьян А.А.* // Lightwave Russian Edition. 2005. N 4. P. 21–25.
- [3] *Каргаев П.П., Фомин С.В.* // Теория вероятностей и ее применение. 1990. Т. 35. Вып. 2. С. 271–281.
- [4] *Подласкин Б.Г.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 5. С. 139–142.
- [5] *Подласкин Б.Г.* // Тр. III Междунар. конф. по голографии. Ульяновск, 1978. С. 223–224.
- [6] *Nelson E.N., Horn S.B.* Barrier layers for thin film electronic materials. US Patent 6 222 261.
- [7] *Ahmed N., Rao K.R.* // Electronics Letters. 1993. Vol. 6. N 2. P. 117–121.
- [8] *Miyaji S., Hamada T., Matsumoto Sh.* // Scripta Technica. Syst. Comp. Jpn. 2000. Vol. 31. N 5. P. 97–109.
- [9] *Saw Y.-S., Park R.-H., Grant P.M., and Hannah J.M.* // Opt. Eng. 2001. Vol. 40. N 7. P. 1387–1395.
- [10] *Miran M. and Rao K.R.* // Circuits and Signal Processing. 1992. Vol. 11. N 3. P. 377–385.
- [11] *Вернер М.* Основы кодирования. М., 2006. 286 с.