

01;05

Устойчивость мейснеровского состояния в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 29 октября 2007 г.)

Рассмотрена устойчивость мейснеровского состояния трехмерной джозефсоновской среды относительно всевозможных комбинаций малых флуктуаций скачков фазы на контактах. Получены выражения для элементов матрицы квадратичной формы для второй вариации потенциала Гиббса. Найдены значения поля „перегрева“ и формы флуктуаций, относительно которых имеют место обнаруженные неустойчивости.

Величина отношения поля перегрева H_{S1} к максимальному полю H_{S2} , при котором еще существует мейснеровское состояние, растет с увеличением параметра пиннинга I и находится в пределах от 0.84 до 1. При всех значениях параметра пиннинга критические флуктуации представляют собой быстро затухающие вглубь периодически повторяющиеся знакопеременные структуры шириной в одну ячейку.

Для очень малых значений параметра пиннинга ($I < 0.1$) неустойчивость подобного типа отсутствует. В этом диапазоне значений I отношение H_{S1}/H_{S2} близко к единице.

PACS: 74.50.+r, 03.75.Lm

Введение

В массивных сверхпроводниках 2-го рода, помещенных во внешнее магнитное поле H_e , начиная со значения $H_e = H_{C1}$ становится энергетически выгодным переход в смешанное состояние, когда магнитное поле частично проникает в толщу сверхпроводника в виде вихревых нитей. В то же время уравнения электродинамики формально допускают вплоть до термодинамического критического поля H_C равновесные решения мейснеровского типа с проникновением поля в тонкую приповерхностную область. Таким образом, существует возможность задержки проникновения вихрей в сверхпроводник для полей $H_e > H_{C1}$. Элементарное рассмотрение потенциальной энергии вихря вблизи поверхности [1] указывает на существование поверхностного энергетического барьера, возникающего в результате притяжения вихря к его „мнимому отражению“ и препятствующего входу вихрей в образец. Этот барьер может быть преодолен в поле, большем некоторого критического значения H_{S1} . Эксперименты [2,3] показали, что $H_{S1} \approx H_C$. С точки зрения термодинамики, это явление представляет собой „перегрев“ мейснеровского состояния. Максимальное значение поля H_{S1} , до которого возможен этот „перегрев“, определяется как граница устойчивости метастабильного мейснеровского состояния по отношению к малым флуктуациям. В работе [4] на базе горьковского формализма показано, что для материалов с большим значением параметра Гинзбурга–Ландау κ поле перегрева $H_{S1} \approx 0.75H_C$ при $T = T_C$ и $H_{S1} \approx 0.8H_C$ при $T = 0$. В работе [5] найдены границы существования метастабильного мейснеровского состояния на базе анализа второй вариации потенциала Гиббса для модели Гинзбурга–Ландау. Показано, что при $\kappa > 0.5$ неустойчивость возникает при некотором $H_{S1} < H_{S2}$,

где H_{S2} — поле, до которого существует мейснеровское решение уравнений Гинзбурга–Ландау. Для $\kappa \gg 1$ $H_{S1} \approx 0.745H_C$, что соответствует результатам [4].

Анализ устойчивости мейснеровского состояния важен также и потому, что позволяет понять, как происходит проникновение вихрей в сверхпроводник. В [4] предполагается, что при $H_e > H_{S1}$ флуктуации непосредственно перерастают в вихревые нити. Однако в [5] предлагается иной механизм. Рост флуктуаций при $H_e > H_{S1}$ приводит к новому метастабильному состоянию, в котором к экранирующим токам добавляется слой поверхностных вихрей чередующейся ориентации, каждый из которых, в отличие от абрикосовских, обладает нулевым флюксoidом. Это новое метастабильное состояние может существовать до поля H_{S3} , по порядку величины равного H_{S2} (при $\kappa \gg 1$ оказывается $H_{S2} = H_{S3} = H_C$). При $H_e > H_{S3}$, в образце появляются области нормальной фазы, в которых спонтанно возникают абрикосовские вихри, в результате чего образец переходит в смешанное состояние.

Представляет несомненный интерес проведение аналогичных исследований для высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП). Физика происходящих в них процессов заметно отличается от того, что происходит в обычных сверхпроводниках. Важнейшую роль играет тот факт, что ВТСП состоят из сверхпроводящих гранул, между которыми в точках касания возникают джозефсоновские контакты. Поэтому иной вид имеют вихри, иной физике соответствуют критические поля. В частности, характерные значения полей столь малы, что речь не может идти о переходе гранул в нормальное состояние (поэтому поле H_{S2} до которого существует мейснеровское решение, отличается от термодинамического поля H_C). Вихри располагаются не в отдельных гранулах, а вовлекают в себя большое количество их,

при этом токи проходят через джозефсоновские контакты между гранулами. Достаточно вспомнить, что такой контакт является существенно нелинейным элементом, чтобы представить себе сложность возникающей картины. Добавим к этому еще и зацепление (пиннинг) вихрей на пустотах между гранулами. Все эти моменты делают исследование поведения ВТСП во внешнем магнитном поле достаточно сложной задачей, требующей специального подхода.

В работах [6,7] предложена достаточно простая модель гранулированного ВТСП, представляющая собой кубическую решетку, состоящую из сверхпроводящих проводов, каждый из которых содержит один джозефсоновский контакт. На базе условий квантования флюксоида в ячейках этой среды получена система уравнений для расчета структуры возможных токовых состояний. Как показали расчеты [6–9], такой модели, которую принято называть трехмерной упорядоченной джозефсоновской средой, присущи все свойства, характерные для сверхпроводников во внешнем магнитном поле: мейсснеровские экранирующие токи, взаимодействующие друг с другом вихри, набор характерных магнитных полей и т.п., причем даже количественные соотношения аналогичны имеющим место в обычных и высокотемпературных сверхпроводниках. Поэтому использование этой модели целесообразно при анализе процессов, происходящих в реальных ВТСП.

Целью настоящей работы являются установление границ устойчивости мейсснеровского состояния и нахождение поля „перегрева“ для такой среды во внешнем магнитном поле, а также исследование формы флуктуаций, относительно которых возникает данная неустойчивость.

Рассмотрение будем, как и в [6–9], проводить на модели, представляющей собой кубическую решетку с периодом a , состоящую из сверхпроводящих проводов диаметром δ , каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт, причем все контакты имеют малые размеры и обладают одним и тем же значением критического тока J_C . Внешнее магнитное поле \mathbf{H}_e направлено вдоль главной оси решетки. Токовое распределение имеет плоскую структуру, т.е. во всех параллельных плоскостях, перпендикулярных полю \mathbf{H}_e и расположенных на расстоянии a друг от друга, токи распределены идентично.

Мейсснеровская конфигурация

Рассмотрим сначала токовую конфигурацию мейсснеровского типа, т.е. когда вдоль поверхности образца текут параллельные ей токи, замыкающиеся на бесконечности (рис. 1). Сила тока, текущего в граничном слое, равна $J_1 = J_C \sin \varphi_1$. По мере углубления в образец имеем $J_m = J_C \sin \varphi_m$ для $m = 2, 3, \dots$. В глубине образца токи равны нулю, что является одним из граничных условий.

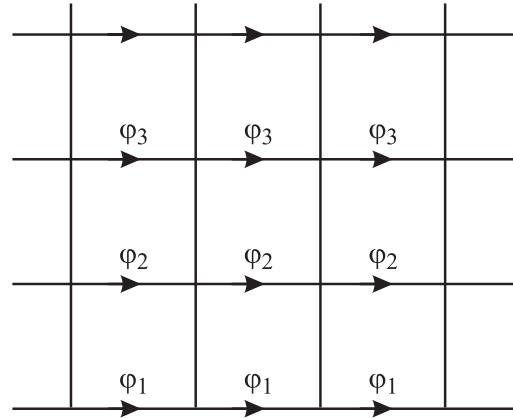


Рис. 1. Конфигурация мейсснеровского типа.

В работе [6] показано, что в каждой ячейке должно быть выполнено условие квантования флюксоида

$$2\pi\Phi_m/\Phi_0 + \varphi_m - \varphi_{m+1} = 0, \quad (1)$$

где φ_m — скачок фазы на соответствующем джозефсоновском контакте; Φ_0 — квант магнитного потока; Φ_m — полный магнитный поток через m -ю ячейку ($m \geq 1$), в рассматриваемой геометрии равный

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \mu_0 \int_{\delta}^{a-\delta} H(r) dr \\ &= \mu_0(a - 2\delta)^2 \left(\sum_{k=1}^m \frac{J_k}{a} + \frac{b}{a}(J_{m-1} - J_m) - H_e \right), \quad (2) \end{aligned}$$

где параметр

$$b = \frac{1}{2\pi(1 - 2\delta/a)} \ln \frac{1 - \exp(-2\pi(1 - \delta/a))}{1 - \exp(-2\pi\delta/a)}.$$

Следует сказать, что выражение для b уточнено и отличается от полученного в [6]. Для простоты будем считать $b = 0$.

Подставив (2) в (1) для различных m и вычтя из уравнения для $(m-1)$ -й ячейки уравнение для m -й, получим следующую систему разностных уравнений:

$$\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1} = I \sin \varphi_m \quad (m \geq 2), \quad (3)$$

где $I = 2\pi\mu_0(a - 2\delta)^2 J_C/a\Phi_0$ — так называемый параметр пиннинга, $h = 2\pi H_e/H_0$ — нормированная напряженность внешнего поля, $H_0 = \Phi_0/\mu_0 S$ — значение внешнего поля, при котором через каждую ячейку площадью $S = (a - 2\delta)^2$ проходит один квант магнитного потока Φ_0 .

В качестве граничных условий к (3) используем стремление к нулю φ_m при стремлении m к бесконечности, а также условие (1) для $m = 1$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -I \sin \varphi_1 + h. \quad (4)$$

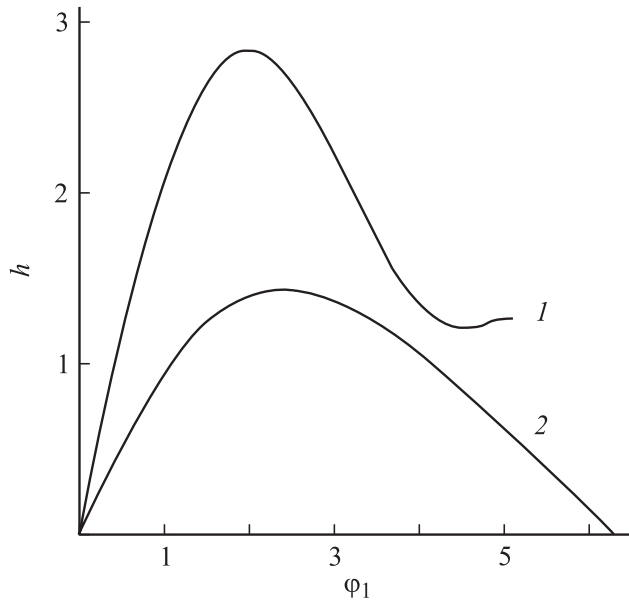


Рис. 2. Графики зависимости напряженности магнитного поля от скачка фазы в крайнем ряду мейснеровской конфигурации для некоторых значений I ($I = 1.6, 2 = 0.5$).

Найдем точное решение системы (3). Представим ее в виде рекуррентного закона

$$\varphi_{m+1} = 2\varphi_m - \varphi_{m-1} + I \sin \varphi_m \quad (m \geq 2). \quad (5)$$

Задавшись значениями φ_1 , будем численно искать соответствующие им возможные значения φ_2 , при которых существует решение в виде монотонно убывающей с ростом m комбинации значений φ_m . Из уравнения (4) найдем соответствующее полученному решению значение нормированной напряженности внешнего магнитного поля h . На рис. 2 приведены полученные графики зависимости $h(\varphi_1)$ для некоторых значений I . Начальный участок кривой до максимума соответствует мейснеровскому режиму. Максимально возможное значение h_{\max} соответствует величине магнитного поля H_{S2} , выше которой мейснеровское решение отсутствует.

Исследование устойчивости мейснеровской конфигурации

Исследуем теперь устойчивость мейснеровских конфигураций относительно малых флуктуаций скачков фазы на контактах. На рис. 3 представлена ситуация, при которой фазы, соответствующие мейснеровской конфигурации, получили бесконечно малые приращения. В связях, параллельных границе, они добавились к значениям φ_m ($m = 1, 2, 3, \dots$), а в участках, перпендикулярных ей, скачки фазы равны этим добавкам, так как ранее они равнялись нулю. Обозначим буквой D область, в которой расположено возмущение, т.е. от

границы до N -го параллельного ей ряда и от перпендикулярного границе ряда с приращениями η_k на K рядов вправо.

Значения приращений не являются независимыми, поскольку должны быть выполнены условия непрерывности токов в узлах. Это условие для узла в k -м ряду, например между контактами с фазами $(\varphi_k + \beta_k)$ и $(\varphi_k + \gamma_k)$, имеет вид

$$J_C \sin(\varphi_k + \beta_k) + J_C \sin \chi_{k-1} = J_C \sin(\varphi_k + \gamma_k) + J_C \sin \chi_k, \quad (6)$$

откуда из-за малости приращений следует $\chi_k = \chi_{k-1} + \cos \varphi_k (\beta_k - \gamma_k)$. Учитывая, что $\chi_0 = 0$, методом математической индукции приходим к выражению

$$\chi_k = \sum_{i=1}^k \cos \varphi_i (\beta_i - \gamma_i) \quad (k = 1, 2, \dots, N-1). \quad (7)$$

Непрерывность тока в узлах самого верхнего N -го ряда при отсутствии приращений в более высоких рядах позволяет выразить величины приращений в параллельных границе контактах этого ряда через их значения в нижних рядах:

$$\beta_N \cos \varphi_N = - \sum_{i=1}^{N-1} \beta_i \cos \varphi_i. \quad (8)$$

Выражения типа (7) имеют место и для других приращений в контактах, перпендикулярных границе, а типа (8) — для всех параллельных ей контактов N -го ряда в области D .

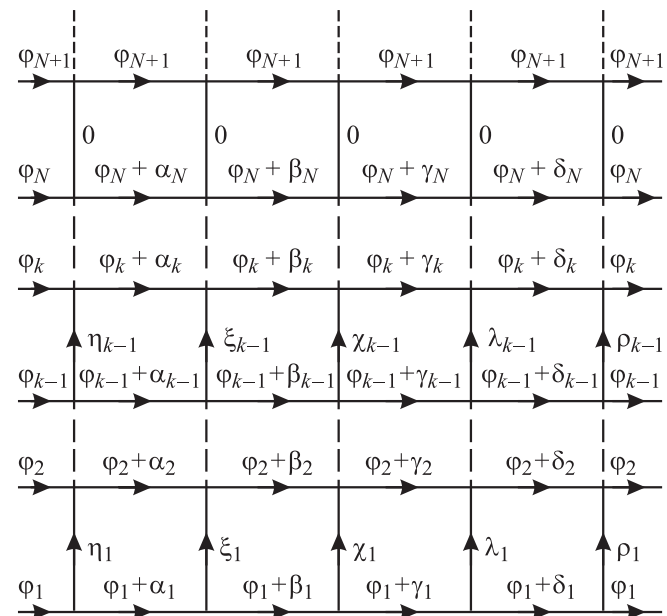


Рис. 3. Распределение скачков фазы в рассматриваемой конфигурации.

Для исследования устойчивости состояния надо проанализировать вторую вариацию потенциала Гиббса, определяемого выражением

$$G = E_J + E_H - \int BHdV, \quad (9)$$

где E_J и E_H — джозефсоновская и магнитная энергии единицы длины (вдоль \mathbf{H}_e), равные

$$E_J = \frac{E_c}{a} \sum_k (1 - \cos \varphi_k) = IE_0 \sum_k (1 - \cos \varphi_k), \quad (10)$$

$$E_H = \sum_i \frac{B_i^2}{2\mu_0} V_i = E_0 \frac{1}{2} \sum_i \left(\sum_l \varphi_{il} \right)^2, \quad (11)$$

где $E_c = \Phi_0 J_C / 2\pi$ — энергия джозефсоновского контакта; $B_i = \Phi_i / S$ — магнитная индукция в i -й ячейке; $B_i^2 / 2\mu_0$ — плотность магнитной энергии в i -й ячейке; $V_i = S$ — объем единицы длины; $E_0 = \Phi_0^2 / 4\pi^2 \mu_0 S$ — нормировочная постоянная. Суммирование по k в (10) ведется по всем джозефсоновским контактам, по i в (11) — по всем ячейкам, по l — во внутренней сумме в (11) — по всем 4-м контактам i -й ячейки (с учетом знака). При выводе (11) мы воспользовались условием квантования флюксонида, согласно которому сумма скачков фазы по замкнутому контуру с джозефсоновскими контактами должна равняться нормированному магнитному потоку через контур (аналогично (1)), т.е.

$$2\pi \Phi_i / \Phi_0 = \sum_l \varphi_{il}. \quad (12)$$

Как известно, в рассматриваемой геометрии термодинамическая напряженность магнитного поля \mathbf{H} во всех точках одна и та же и равна напряженности внешнего поля \mathbf{H}_e , поэтому последний член в (9) можно записать в виде

$$H_e \sum_i \Phi_i = \frac{H_e \Phi_0}{2\pi} \sum_i \sum_l \varphi_{il} = \frac{H_e \Phi_0}{2\pi} \sum_n \varphi_{1n}, \quad (13)$$

где φ_{il} — скачок фазы в l -м контакте i -й ячейки, а сумма по n берется по всем контактам граничного ряда. При выводе (13) учитывалось, что при суммировании по всем ячейкам значения φ_{il} для контактов внутри конфигурации входят в сумму дважды, причем с разными знаками, поэтому остается только суммирование по граничным контактам. При этом на удаленных боковых границах конфигурации скачки фазы на контактах, перпендикулярных границе образца, равны нулю, так же как и на горизонтальных контактах бесконечно удаленной границы вверху (рис. 3).

Учет формул (7), (8) и (13) приводит к тому, что независимыми аргументами в выражении для потенциала Гиббса остаются только значения приращений в горизонтальных участках первых $(N-1)$ рядов. Поскольку ширина конфигурации с приращениями, т.е. области D , равна K ячеек, то число независимых аргументов равно

$L = (N-1)K$. Тогда вторая вариация потенциала Гиббса представляет собой квадратичную форму размера $L \times L$.

Для нахождения ее вида выпишем, например, ту часть потенциала Гиббса, которая зависит от β_k , учитывая, что, согласно (7) и (8), от β_k зависят значения β_N , а также ξ_i и χ_i для $(N-1) \geq i \geq k$:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta G_{\beta_k}}{E_0} = & 0.5 \sum_{i=k-1}^{N-1} (\varphi_i - \varphi_{i+1} + \beta_i - \beta_{i+1} + \chi_i - \xi_i)^2 \\ & + 0.5(\varphi_N - \varphi_{N+1} + \beta_N)^2 + 0.5 \sum_{i=k}^{N-1} (\varphi_i - \varphi_{i+1} + \gamma_i - \gamma_{i+1} \\ & + \lambda_i - \chi_i)^2 + 0.5 \sum_{i=k}^{N-1} (\varphi_i - \varphi_{i+1} + \alpha_i - \alpha_{i+1} + \xi_i - \eta_i)^2 \\ & + I \left(-\cos(\varphi_k + \beta_k) - \cos(\varphi_N + \beta_N) + 0.5 \sum_{i=k}^{N-1} (\xi_i^2 + \chi_i^2) \right) \\ & (1 < k < N-1). \end{aligned} \quad (14)$$

Это выражение справедливо для $1 < k < N-1$. Для случаев $k=1$ или $N-1$ в (14) произойдут небольшие изменения, которые легко определить по рис. 3. Кроме того, при $k=1$ в нем появится член $h\beta_1$ из-за учета (13), где h — введенная ранее нормированная напряженность внешнего магнитного поля. Далее будем измерять G в единицах E_0 .

Подставив формулы (7) и (8) в (14) и в аналогичные ему выражения для $k=1$ и $k=N-1$ и продифференцировав сначала по β_k , а затем по другим аргументам, получим выражения для всевозможных вторых производных, которые могут быть обобщены в следующие формулы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial \beta_k \partial \beta_i} = & \cos \varphi_k \cos \varphi_i \left[\frac{2}{\cos^2 \varphi_N} + \frac{4+I}{\cos \varphi_N} \right. \\ & \left. + 2(3+I)(N-M) \right] - \delta(i+1-k) - \delta(i-1-k) \\ & + [2 + (4+I) \cos \varphi_k - \delta(k-1)] \delta(i-k) \\ & + \frac{\cos \varphi_k \delta(i+1-N) + \cos \varphi_i \delta(k+1-N)}{\cos \varphi_N}, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 G}{\partial \beta_k \partial \gamma_i} = & -\cos \varphi_k \cos \varphi_i \left[\frac{2}{\cos \varphi_N} + (4+I)(N-M) \right] \\ & - 2 \cos \varphi_k \delta(i-k), \end{aligned} \quad (16)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \beta_k \partial \delta_i} = \cos \varphi_k \cos \varphi_i (N-M). \quad (17)$$

В выражениях (15)–(17) $M \equiv \max\{k, i\}$, а $\delta(x)$ — это дельта-функция, равная единице при $x=0$ и нулю при всех других значениях. Отметим, что приравнение нулю первых производных G приводит к уравнениям

	α_1	α_2	α_3	β_1	β_2	β_3	γ_1	γ_2	γ_3	δ_1	δ_2	δ_3
α_1	A	B	C	D	E	G	H	I	K	0	0	0
α_2	B	J	L	E	N	P	I	R	S	0	0	0
α_3	C	L	T	G	P	W	K	S	Z	0	0	0
β_1	D	E	G	A	B	C	D	E	G	H	I	K
β_2	E	N	P	B	J	L	E	N	P	I	R	S
β_3	G	P	W	C	L	T	G	P	W	K	S	Z
γ_1	H	I	K	D	E	G	A	B	C	D	E	G
γ_2	I	R	S	E	N	P	B	J	L	E	N	P
γ_3	K	S	Z	G	P	W	C	L	T	G	P	W
δ_1	0	0	0	H	I	K	D	E	G	A	B	C
δ_2	0	0	0	I	R	S	E	N	P	B	J	L
δ_3	0	0	0	K	S	Z	G	P	W	C	L	T

Рис. 4. Матрица квадратичной формы для случая $N = 4$, $K = 4$.

квантования флюксоида: при $k = m > 1$ — к уравнению (3), а при $k = 1$ — к (4).

При вычислении вторых вариаций необходимо учитывать члены до второго порядка по β_k, γ_k и т.д. в выражении для потенциала Гиббса и в формулах (7), (8). Строгий расчет показывает, что при выполнении условий (3) и (4) величины поправок обращаются в нуль.

Формулы (15)–(17) остаются верными и для других переменных. Поэтому можно записать матрицу \mathbf{Q} квадратичной формы в виде, показанном на рис. 4 для случая $N = 4$, $K = 4$. Отметим, что в работе использованы значения $K = 9$ и 10 . На рис. 4 лишь поясняется характер симметрии матрицы, учитывающей следующие равенства:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \alpha_k \partial \beta_i} = \frac{\partial^2 G}{\partial \beta_i \partial \alpha_k} = \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha_i \partial \beta_k} = \frac{\partial^2 G}{\partial \beta_k \partial \alpha_i} \text{ и т.д.} \quad (18)$$

Значения элементов матрицы \mathbf{Q} при любой выбранной толщине слоя N могут быть рассчитаны по формулам (15)–(17) с использованием значений φ_k для невозмущенного мейсснеровского состояния, полученных при решении системы (5). Увеличение ширины рассматриваемой конфигурации K ведет к увеличению размеров матрицы путем многократного добавления основного матричного модуля, смещаемого на $(N-1)$ элемент по диагонали, что можно понять из рис. 4.

Конфигурация неустойчива, если квадратичная форма, соответствующая второй вариации потенциала Гиббса, не является положительно определенной. Приведем квадратичную форму к каноническому виду [10]. Для этого найдем собственные векторы матрицы \mathbf{Q} , на основе которых можно записать линейное преобразование \mathbf{S} , приводящее ее к диагональному виду $\mathbf{Q}' : \mathbf{Q}' = \mathbf{S}\mathbf{Q}\mathbf{S}^{-1}$. Собственные значения будут стоять на диагонали матрицы \mathbf{Q}' , т.е. будут являться коэффициентами при соответствующих квадратах в диагонализированной квадратичной форме. Если все собственные значения положительны, то квадратичная форма положительно определенная

и конфигурация устойчива. Существование отрицательных собственных значений говорит о неустойчивости конфигурации.

Форма флуктуации, относительно которой имеется неустойчивость, определяется той комбинацией исходных координат, которая после преобразования \mathbf{S} обращает в нуль значения всех новых координат, кроме той, которой соответствует отрицательное собственное значение. Используя для нахождения этой комбинации обратное преобразование \mathbf{S}^{-1} , действующее на диагональную матрицу, приходим к выводу, что, если отрицательным является j -е собственное значение, то j -й столбец матрицы \mathbf{S}^{-1} даст нормированные значения $\alpha_1, \dots, \alpha_{N-1}, \beta_1, \dots, \beta_{N-1}$ и т.д. „Нормированность“ в данном случае означает, что все найденные значения могут быть умножены на одно и то же произвольное бесконечно малое значение. Далее из условий типа (7) находим χ_k и другие скачки фазы в перпендикулярных границе контактах, что позволяет полностью описать форму искомой флуктуации.

Отметим, что для проверки правомочности использования матрицы \mathbf{Q} , соответствующей некоторым значениям толщины слоя N и ширины K , будем параллельно проводить те же расчеты с матрицами для комбинаций значений $(N+1, K)$ и $(N, K+1)$. Если все три подхода приводят к одному результату, то можно считать его правильным. Если нет, то следует переходить к большему значению N и K .

Результаты расчетов и их анализ

Алгоритм расчета таков. Задавшись значением φ_1 и используя рекуррентный механизм (5), находим значения φ_k для невозмущенного мейсснеровского состояния. Далее рассчитываем элементы матрицы \mathbf{Q} , используя найденные значения φ_k и находим ее собственные значения. Увеличивая выбранное значение φ_1 , определяем $\varphi_{1 \min}$, при котором среди собственных значений матрицы \mathbf{Q} появляются отрицательные. Из (4) находим значение нормированной напряженности внешнего магнитного поля $h(\varphi_{1 \min})$, которое и является полем перегрева H_{S1} . Соответствующий отрицательному собственному значению столбец матрицы \mathbf{S}^{-1} позволяет найти форму искомой флуктуации.

В табл. 1 приведены результаты расчета $\varphi_{1 \min}$ для различных значений толщины слоя N и его ширины K при значении параметра пиннинга $I = 0.4$. По данным табл. 1 можно видеть, что изменение толщины от 5 до 6 слоев не изменяет значений $\varphi_{1 \min}$, в то время

Таблица 1.

N	K	$\varphi_{1 \min}$	N	K	$\varphi_{1 \min}$
6	10	1.751	5	10	1.751
	9	1.753		9	1.753
	8	1.755		8	1.755

a

<i>H</i>	<i>I</i>	<i>K</i>	<i>D</i>	<i>E</i>	<i>G</i>
<i>I</i>	<i>R</i>	<i>S</i>	<i>E</i>	<i>N</i>	<i>P</i>
<i>K</i>	<i>S</i>	<i>Z</i>	<i>G</i>	<i>P</i>	<i>W</i>
0	0	0	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>K</i>
0	0	0	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>S</i>
0	0	0	<i>K</i>	<i>S</i>	<i>Z</i>

b

<i>H</i>	<i>I</i>	<i>K</i>	0	0	0
<i>I</i>	<i>R</i>	<i>S</i>	0	0	0
<i>K</i>	<i>S</i>	<i>Z</i>	0	0	0
<i>D</i>	<i>E</i>	<i>G</i>	<i>H</i>	<i>I</i>	<i>K</i>
<i>E</i>	<i>N</i>	<i>P</i>	<i>I</i>	<i>R</i>	<i>S</i>
<i>G</i>	<i>P</i>	<i>W</i>	<i>K</i>	<i>S</i>	<i>Z</i>

Рис. 5. К расчету матрицы для периодических бесконечных флуктуаций.

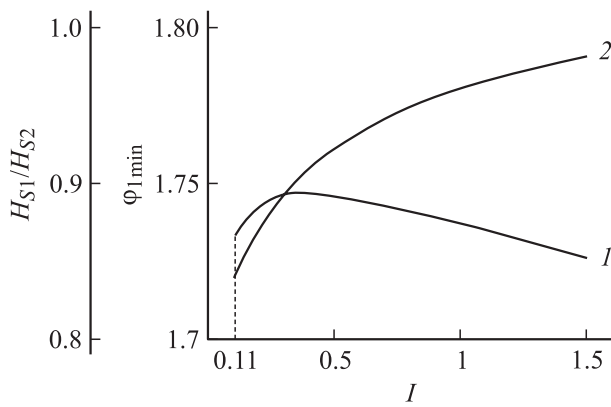


Рис. 6. Зависимости величин $\varphi_{1\min}$ (кривая 1) и H_{S1}/H_{S2} (2) от параметра I .

как увеличение ширины K ведет к систематическому заметному уменьшению $\varphi_{1\min}$. При $K < 8$ неустойчивость для $I = 0.4$ вообще не обнаруживается при любых N . Анализ показывает, что формы флуктуаций, ведущих к неустойчивости, имеют структуру, похожую на периодическую, с экстремумами чередующихся знаков. Вышеизложенные факты наводят на мысль, что в первую очередь неустойчивость возникает относительно периодических флуктуаций бесконечной ширины K . Для исследования таких флуктуаций необходимо изменить рассматриваемую конфигурацию. Пусть флуктуация имеет структуру, получаемую периодической трансляцией области D (см. рис. 3) вправо и влево, т.е. первый вертикальный ряд слева от левой границы области D совпадает с ее правым крайним рядом, а первый ряд справа от правой границы D совпадает с ее левым крайним рядом. Несложный анализ показывает, что в этом случае нужно к элементам в правом верхнем и левом нижнем углах матрицы Q прибавить соответствующие элементы структур, изображенных соответственно на рис. 5, *a, b*. При $K \geq 5$ эти структуры просто заменят соответствующие нулевые элементы в углах.

Зависимость величины $\varphi_{1\min}$, рассчитанной на базе такой матрицы Q , от параметра пиннинга I приведена на графике рис. 6. Там же представлена зависимость от I отношения внешнего магнитного поля $h(\varphi_{1\min})$, найденного из (4), к h_{\max} , или, иными словами, поля H_{S1} , соответствующего возникновению неустойчивости, к H_{S2} — полю, до которого может существовать мейсснеровское решение. Отметим, что использовались матрицы с $N = 4, 5$ и $K = 10, 8, 6$. Все они дали одинаковые результаты. Анализ графиков рис. 6 позволяет сделать следующие выводы.

1) Отношение H_{S1}/H_{S2} возрастает с увеличением параметра пиннинга и находится в пределах от 0.84 до 1, что согласуется с результатами, полученными в [4,5] для обычных сверхпроводников 2-го рода. Отметим, что, как и следовало ожидать, поле перегрева H_{S1} больше поля возможного перехода в смешанное состояние H_{C1} [7].

2) Анализ формы флуктуаций показывает, что при всех I они представляют собой быстро затухающие вглубь (на нескольких слоях) периодически повторяющиеся знакопеременные структуры шириной в одну ячейку. В табл. 2 приведены значения нормированных на какую-то малую „амплитуду“ флуктуации q добавок к скачкам фазы на параллельных границе контактах при внешнем поле, равном полю перегрева H_{S1} , для случаев $I = 0.11$ (*a*) и $I = 1$ (*b*). Быстрое затухание структур внутри образца, связанное с их знакопеременностью, объясняет возможность использования для расчета в выражениях (17) относительно небольших значений N (5 и 6) даже при малых значениях I , когда характерная длина для мейсснеровской конфигурации велика.

Полученная форма флуктуаций объясняет, почему при получении графиков рис. 6 пришлось использовать четные значения K (10, 8, 6). При нечетных значениях K знакопеременная в соседних рядах и в то же время периодическая флуктуация не может реализоваться. В этом случае сама неустойчивость существует, но начинается она при немного больших значениях $\varphi_{1\min}$

Таблица 2.

a

k	...	α_k/q	β_k/q	γ_k/q	δ_k/q	...
5	-0.001	0.001	-0.001	0.001	-0.001	0.001
4	-0.005	0.005	-0.005	0.005	-0.005	0.005
3	-0.024	0.024	-0.024	0.024	-0.024	0.024
2	-0.102	0.102	-0.102	0.102	-0.102	0.102
1	-0.298	0.298	-0.298	0.298	-0.298	0.298

b

k	...	α_k/q	β_k/q	γ_k/q	δ_k/q	...
4	-0.001	0.001	-0.001	0.001	-0.001	0.001
3	-0.010	0.010	-0.010	0.010	-0.010	0.010
2	-0.070	0.070	-0.070	0.070	-0.070	0.070
1	-0.402	0.402	-0.402	0.402	-0.402	0.402

и $h(\varphi_{1 \min})$, а флуктуация имеет слегка другую форму с соответствующим периодом. Из этих же аргументов следует, что результаты при $K = 2$ или 4 были бы теми же, что при 6, 8 и 10.

Отметим, что в табл. 2 приведены распределения добавок к скачку фазы. Если интересоваться формой токовой флуктуации, то следует иметь в виду, что ток через контакт, скачок фазы на котором равен, например, $\varphi_k + \alpha_k$, описывается выражением

$$J_C \sin(\varphi_k + \alpha_k) = J_C \sin \varphi_k + J_C \cos \varphi_k \alpha_k,$$

т.е. добавка к току равна $J_C \cos \varphi_k \alpha_k$. Поэтому в граничном ряду, на контактах которого $\varphi_1 > \pi/2$ при всех значениях I , ток во флуктуации течет в направлении, противоположном указанному на рис. 3. На рис. 7 представлена конфигурация нормированных на J_C токов во флуктуации при внешнем поле, равном полю перегрева H_{S1} , для случая $I = 0.11$. Токи в перпендикулярных границе контактах вычислены из условий непрерывности тока, а ток в самом верхнем ряду — по формуле (8). В правой части рис. 7 приведены нормированные на J_C значения невозмущенных токов мейсснеровской конфигурации для тех же I и внешнего магнитного поля. Видно, что эти токи затухают вглубь значительно медленнее токов во флуктуации.

3) Для малых значений параметра пиннинга ($I < 0.1$) неустойчивость подобного типа не обнаруживается. Можно было бы предположить, что при малых I толщина флуктуации увеличивается, и рассматриваемые значения N недостаточно велики для получения результатов. Однако, как было сказано ранее, увеличение N от 5 до 6 не изменяет результатов вплоть до $I = 0.11$, что говорит о том, что дело не в недостаточной величине N . Есть какие-то причины, по которым при $I < 0.1$

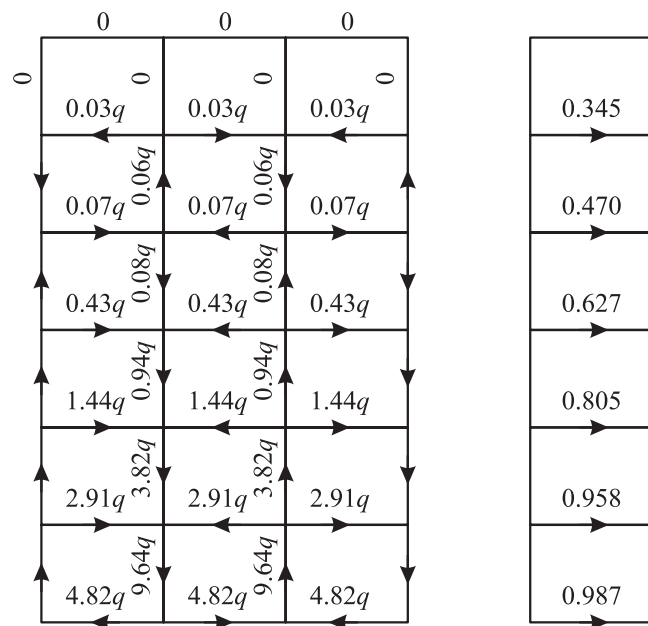


Рис. 7. Конфигурации токов во флуктуации и в мейсснеровской конфигурации для $I = 0.11$.

возникновение флуктуаций, имеющих вид периодически повторяющихся знакопеременных структур шириной в одну ячейку, не ведет к неустойчивости.

Вопрос о том, что происходит в этом случае с мейсснеровским состоянием при увеличении внешнего магнитного поля, заслуживает дополнительного исследования. Скорее всего, в диапазоне $I < 0.1$ период критических флуктуаций растет при уменьшении I , а поле перегрева H_{S1} примерно равняется границе мейсснеровского состояния H_{S2} .

Заключение

Рассмотрена устойчивость мейсснеровского состояния трехмерной джозефсоновской среды относительно малых флуктуаций скачков фазы на контактах. Получены выражения для элементов матрицы квадратичной формы для второй вариации потенциала Гиббса. Путем приведения этой матрицы к диагональной форме, т.е. квадратичной формы к каноническому виду, найдены величины поля „перегрева“ H_{S1} — минимальные значения внешнего магнитного поля, при которых среди собственных значений матрицы появляются отрицательные числа, т.е. мейсснеровское состояние становится неустойчивым. Этот подход позволяет также найти форму флуктуаций, относительно которых имеют место обнаруженные неустойчивости.

Величина H_{S1}/H_{S2} — отношение поля перегрева к максимальному полю, при котором еще существует мейсснеровское состояние — растет с увеличением параметра пиннинга I и находится в пределах от 0.84 до 1, что согласуется с результатами, полученными в [4,5] для обычных сверхпроводников 2-го рода.

Анализ формы критических флуктуаций показывает, что при всех значениях параметра пиннинга I они представляют собой быстро затухающие вглубь (на нескольких слоях) периодически повторяющиеся знакопеременные структуры шириной в одну ячейку. В работах [4,5] также речь идет о слое поверхностных вихрей чередующейся ориентации.

Несмотря на указанные аналогии, следует помнить, что, как указывалось во введении, рассматриваемая модель отличается от ситуаций, анализируемых в [4,5]. Поэтому неудивительно, что в ней имеют место и факты, не обнаруженные в обычных сверхпроводниках. При малых значениях параметра пиннинга ($I < 0.1$) неустойчивость указанного типа не обнаруживается. Вопрос о том, что происходит в этом случае с мейсснеровским состоянием при увеличении внешнего магнитного поля, заслуживает дополнительного исследования. Скорее всего, в диапазоне $I < 0.1$ период критических флуктуаций растет при уменьшении I , а поле перегрева H_{S1} примерно равняется границе мейсснеровского состояния H_{S2} .

Заслуживает дальнейшего исследования и вопрос о том, что происходит с системой после возникновения

в ней неустойчивости: переходят ли возникшие флуктуации непосредственно в решетку вихрей, как это предсказывается в работе [4], или между мейсснеровским состоянием и решеткой вихрей существуют какие-то промежуточные метастабильные состояния, о которых говорится в [5].

Список литературы

- [1] *Bean C.P., Livingston J.D.* // Phys. Rev. Lett. 1964. Vol. 12. P. 14.
- [2] *Joseph A.S., Tomash W.J.* // Phys. Rev. Lett. 1964. Vol. 12. P. 219.
- [3] *De Blois R.W., De Sorbo W.* // Phys. Rev. Lett. 1964. Vol. 12. P. 499.
- [4] *Галайко В.П.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 717.
- [5] *Kramer L.* // Phys. Rev. 1968. Vol. 170. P. 475.
- [6] *Zelikman M.A.* // Supercond. Sci. & Techn. 1997. Vol. 10. N 7. P. 469.
- [7] *Zelikman M.A.* // Supercond. Sci. & Techn. 1997. Vol. 10. N 11. P. 795.
- [8] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 4. С. 9.
- [9] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 9. С. 65.
- [10] *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. М.: Наука, 1971.