

01;03

## Модификация теории пограничного слоя для расчета осцилляций конечной амплитуды заряженной капли вязкой жидкости

© А.Н. Жаров, С.О. Ширяева, И.Г. Жарова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 13 марта 2007 г. В окончательной редакции 12 октября 2007 г.)

Существующие представления о пограничном слое вблизи свободной поверхности вязкой жидкости, связанном с ее периодическим движением, модифицированы для расчета линейных осцилляций конечной амплитуды заряженной капли вязкой жидкости. Выведены уравнения теории пограничного слоя в окрестности осциллирующей сферической свободной поверхности заряженной капли, найдено их аналитическое решение, проведено сравнение с точным решением и получена оценка толщины пограничного слоя. Определена область применимости модифицированной теории.

PACS: 47.10.A-, 47.55.dd

### Введение

Существующие качественные представления о пограничном слое вблизи свободной поверхности вязкой жидкости, совершающей периодические движения, кратко сформулированы в середине прошлого века Лонгет-Хиггинсом [1]. Предпринятая недавно [2] попытка применения теории пограничного слоя в трактовке [1] для расчета волнового движения на плоской свободной поверхности вязкой жидкости столкнулась с трудностями, связанными с большой погрешностью выполняемых расчетов, и теоретические представления [1] пришлось модифицировать. Сходная ситуация имеет место и при расчете осцилляций конечной амплитуды капли вязкой жидкости. Выполненные в последние годы аналитические, асимптотические расчеты нелинейных осцилляций заряженной капли вязкой жидкости [3–5] продемонстрировали весьма значительную громоздкость необходимых расчетов и полученных результатов, существенно затрудняющую использование последних. В этой связи возникла идея приведения аналитического исследования осцилляций конечной амплитуды заряженной капли при использовании упрощенных уравнений теории пограничного слоя в надежде получить существенно менее громоздкие финальные выражения в рамках заранее определенной погрешности. Этой проблеме и посвящена настоящая работа.

### Постановка задачи

Пусть имеется сферическая капля идеально проводящей несжимаемой вязкой электропроводной жидкости радиуса  $r_0$  с массовой плотностью  $\rho$ , коэффициентами кинематической вязкости  $\nu$  и поверхностного натяжения  $\sigma$ , имеющая электрический заряд  $Q$ , совершающая осцилляции вследствие создания в начальный момент времени виртуальной осесимметричной деформации

равновесной сферической формы капли. Зададимся целью исследовать аналитическим путем в линейном по амплитуде начальной деформации приближении временную эволюцию осцилляций. Все рассмотрение проведем в сферической системе координат  $r, \vartheta, \varphi$  с началом в центре масс невозмущенной сферической капли. Поле скоростей течения жидкости в капле обозначим  $\mathbf{U}$ , поле давлений —  $p$ , потенциалы электрического поля в окрестности капли и на ее поверхности обозначим  $\phi$  и  $\phi_S$  соответственно. Уравнение свободной поверхности капли в произвольный момент времени  $t$  запишем в виде

$$F(r, \vartheta, t) \equiv r - r_0 - \xi(\vartheta, t) = 0, \quad (1)$$

$$t = 0: \quad \xi(\vartheta) \equiv \sum_{m \in \Xi} h_m P_m(\mu); \quad \sum_{m \in \Xi} \frac{h_m}{r_0} = \varepsilon; \quad \mu \equiv \cos \vartheta, \quad (2)$$

где  $\varepsilon$  — малый параметр, характеризующий амплитуду начальной деформации;  $h_m$  — константа, определяющая парциальный вклад отдельной моды колебаний в форму начальной деформации;  $P_m(\mu)$  — полином Лежандра;  $\Xi$  — множество номеров мод, суперпозиция которых определяет начальную деформацию капли.

Математическая формулировка задачи о расчете капиллярных осцилляций заряженной капли, форма которой в начальный момент времени определяется (1), (2), в линейном по  $\varepsilon$  приближении имеет вид [3]:

$$\operatorname{div} \mathbf{U} = 0; \quad (3)$$

$$\partial_t \mathbf{U} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p + \nu \Delta \mathbf{U}; \quad (4)$$

$$r \rightarrow 0: \quad \mathbf{U} \rightarrow 0; \quad t = 0: \quad \mathbf{U} = 0; \quad (5)$$

$$\Delta \phi = 0; \quad (6)$$

$$r \rightarrow +\infty: \quad \nabla \phi \rightarrow 0; \quad r = r_0 + \xi(\vartheta, t): \quad \phi = \phi_S(t); \quad (7)$$

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla \phi \, dS = -4\pi Q;$$

$$S = \{r, \vartheta, \varphi | r = r_0 + \xi; 0 \leq \vartheta \leq \pi; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}; \quad (8)$$

$$r = r_0 + \xi(\vartheta, t) : \quad \partial_t F + (\mathbf{U} \cdot \nabla) F = 0; \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\tau} \cdot (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n} (\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0; \quad (10)$$

$$-p + 2\rho\nu \mathbf{n} (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} - \frac{1}{8\pi} (\nabla \phi)^2 + \sigma \operatorname{div} \mathbf{n} = 0; \quad (11)$$

$$\int_V r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = \frac{4\pi}{3} r_0^3;$$

$$\int_V \mathbf{r} r^2 \sin \vartheta \, dr \, d\vartheta \, d\varphi = 0, \quad (12)$$

где символ  $\partial_t$  означает частную производную по переменной  $t$ ;  $\boldsymbol{\tau}$  и  $\mathbf{n}$  — орты касательной и внешней нормали к свободной поверхности капли, определяемой соотношением (1).

### Вывод уравнений пограничного слоя

Хорошо известно [6,7], что поле скоростей течения вязкой жидкости в капле может быть представлено в виде суммы потенциальной и вихревой компонент. Потенциальная компонента течения не изменяется при переходе к модели идеальной жидкости (при  $\nu \rightarrow 0$ ), наличие вихревой компоненты течения всецело обусловлено вязкостью реальной жидкости.

Согласно начальным условиям сформулированной задачи (2) и (5), в начальный момент времени поверхность капли неподвижна и движение жидкости в капле отсутствует. При  $t > 0$  под влиянием сил поверхностного натяжения, стремящихся вернуть капле сферическую форму, жидкость в капле начнет двигаться таким образом, чтобы были выполнены условия (9)–(12). Периодическое движение свободной поверхности капли вязкой жидкости будет приводить к образованию потенциальных и вихревых движений. Вихри, рожденные на свободной поверхности, будут диффундировать к центру капли. Этот процесс может быть описан уравнением, которое несложно получить из линеаризованного уравнения Навье–Стокса (4), с применением к нему операции ротора [8]:

$$\partial_t (\operatorname{rot}(\mathbf{U})) = \nu \Delta \operatorname{rot}(\mathbf{U}).$$

Как видно из приведенного уравнения, процесс диффузии вихря, рожденного на свободной поверхности, в глубь капли определится величиной коэффициента кинематической вязкости жидкости  $\nu$ . При большом значении  $\nu$  характерная глубина проникновения вихревого движения внутрь капли [1,8] (расстояние, на котором амплитуда вихря за период осцилляций затухает в  $e = 2.718$  раза), пропорциональная  $\sqrt{\nu}$ , может быть

значительной. При малой вязкости вихревое движение будет локализовано в тонком приповерхностном слое.

В соответствии с вышесказанным при модификации теории пограничного слоя для расчета осцилляций капли маловязкой жидкости будем считать, что в основном объеме капли, вдали от ее свободной поверхности, движение жидкости является чисто потенциальным. В тонком пограничном слое у свободной поверхности капли движение жидкости будем представлять в виде суммы потенциального и вихревого, как это принято при расчете волновых течений вязкой жидкости [6,7,9]. При этом будем считать, что вихревая компонента течения затухает с глубиной и заметно убывает на некотором характерном масштабе  $\delta$ , который и будем называть толщиной пограничного слоя.

Поля скоростей течения жидкости и давлений представим в виде

$$\mathbf{U}(r, \vartheta, t) = \mathbf{U}^{(p)}(r, \vartheta, t) + \mathbf{U}^{(c)}(r, \vartheta, t);$$

$$p(r, \vartheta, t) \equiv p^{(p)}(r, \vartheta, t), \quad (13)$$

где индекс  $(p)$  соответствует потенциальному движению, а  $(c)$  — вихревому. При записи выражения для давления в жидкости учитывалось, что, согласно [9], в расчетах первого порядка малости давление в жидкости целиком определяется потенциальной компонентой поля скоростей, вклад вихревой компоненты поля скоростей в формирование поля давлений в жидкости пропорционален квадрату вихревой компоненты скорости и в расчетах первого порядка малости должен быть опущен.

Подставив (13) в уравнение неразрывности (3) и линеаризованное уравнение Навье–Стокса (4), получим уравнения, описывающие потенциальное движение,

$$\operatorname{div} \mathbf{U}^{(p)} = 0; \quad \partial_t \mathbf{U}^{(p)} = -\frac{1}{\rho} \operatorname{grad} p^{(p)}; \quad (14)$$

и уравнения для вихревой компоненты поля скоростей:

$$\operatorname{div} \mathbf{U}^{(c)} = 0; \quad \partial_t \mathbf{U}^{(c)} = -\nu \operatorname{rot}(\operatorname{rot} \mathbf{U}^{(c)}). \quad (15)$$

Уравнения (15) выпишем в проекциях на орты сферической системы координат:

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 U_r^{(c)}) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta (\sin \vartheta U_\vartheta^{(c)}) = 0; \quad (16)$$

$$\partial_t U_r^{(c)} = \frac{\nu}{r \sin \vartheta} \partial_\vartheta \left( \sin \vartheta \left( \frac{1}{r} \partial_\vartheta U_r^{(c)} - \partial_r U_\vartheta^{(c)} - \frac{1}{r} U_\vartheta^{(c)} \right) \right); \quad (17)$$

$$\partial_t U_\vartheta^{(c)} = \nu \left( \partial_{rr} U_\vartheta^{(c)} + \frac{2}{r} \partial_r U_\vartheta^{(c)} - \frac{1}{r} \partial_r \vartheta U_r^{(c)} \right). \quad (18)$$

Несложно видеть, что в системе трех уравнений (16)–(18) определению подлежат лишь две неизвестных величины  $U_r^{(c)}$  и  $U_\vartheta^{(c)}$ , следовательно, одно из уравнений должно быть отброшено. Для разрешения данной проблемы оценим отдельные слагаемые, входящие в эти уравнения.

При этом учтем, что вихревые составляющие поля скоростей как функции координат  $r$  должны заметно меняться на характерном линейном масштабе, равном толщине пограничного слоя  $\delta$ , а как функция от полярного угла  $\vartheta$  — на характерном угловом масштабе, равном  $\pi$ . Следовательно, при оценке вихревых слагаемых производные по радиальной и по угловой переменным будем оценивать на основе соотношений:  $\partial_r \rightarrow 1/\delta$ ,  $\partial_\vartheta \rightarrow 1/\pi$ .

Оценив компоненты уравнения (16), найдем

$$\frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 U_r^{(c)}) \sim O\left(\frac{U_r^{(c)}}{\delta}\right);$$

$$\frac{1}{r \sin(\vartheta)} \partial_\vartheta (\sin(\vartheta) U_\vartheta^{(c)}) \sim O\left(\frac{U_\vartheta^{(c)}}{r_0 \pi}\right).$$

Приравняв порядки выше указанных величин, получим

$$U_\vartheta^{(c)} \sim O\left(\frac{r_0 \pi}{\delta} U_r^{(c)}\right). \quad (19)$$

Из (19) видно, что если толщина пограничного слоя  $\delta \ll \pi r_0$ , то проекция вихревой компоненты скорости на направление  $\mathbf{e}_\vartheta$  существенно превосходит по величине проекцию вихревой компоненты скорости на направление  $\mathbf{e}_r$ , что является основным свойством пограничного слоя, прилегающего к свободной поверхности капли.

Для того чтобы иметь возможность оценить производные от вихревых компонент скорости по времени, содержащиеся в уравнениях (17), (18), выпишем уравнение для вихря скорости:

$$\partial_t(\Omega) = \nu \left( \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r \Omega) + \frac{1}{r^2 \sin(\vartheta)} \partial_\vartheta (\sin(\vartheta) \partial_\vartheta \Omega) - \frac{1}{r^2 \sin^2(\vartheta)} \Omega \right),$$

где  $\Omega \equiv (\text{rot } \mathbf{U})_\varphi$  — проекция ротора скорости на направление  $\mathbf{e}_\varphi$ , и произведя оценку каждого слагаемого, найдем характерное время диффузии вихря скорости  $T \sim O(\delta^2/\nu)$ .

Учитывая оценку (19), а также оценку для характерного времени диффузии вихря  $T$  оценим каждое слагаемое в уравнении (17)

$$\partial_t U_r^{(c)} \sim O\left(\frac{U_r^{(c)}}{T}\right) = O\left(\frac{\nu}{\delta^2} U_r^{(c)}\right);$$

$$\frac{\nu}{r \sin(\vartheta)} \frac{1}{r} \partial_\vartheta (\sin(\vartheta) \partial_\vartheta U_r^{(c)}) \sim O\left(\frac{\nu}{\pi^2 r_0^2} U_r^{(c)}\right);$$

$$\frac{\nu}{r \sin(\vartheta)} \partial_\vartheta (\sin(\vartheta) \partial_r U_\vartheta^{(c)}) \sim O\left(\frac{\nu}{\delta^2} U_r^{(c)}\right);$$

$$\frac{\nu}{r \sin(\vartheta)} \frac{1}{r} \partial_\vartheta (\sin(\vartheta) U_\vartheta^{(c)}) \sim O\left(\frac{\nu}{r_0 \delta} U_r^{(c)}\right). \quad (20)$$

Примем во внимание, что, согласно сказанному выше (см. также [1]), толщина пограничного слоя  $\delta \sim \sqrt{\nu}$ .

Тогда из (20) видно, что в пределе  $\nu \rightarrow 0$  первая и третья компоненты имеют тот же порядок малости что и  $U_r^{(c)}$ , а остальные стремятся к нулю.

Оценив слагаемые в уравнении (18), с учетом (19) и оценки характерного времени диффузии вихря  $T = O(\delta^2/\nu)$ , найдем

$$\partial_t U_\vartheta^{(c)} \sim O\left(\frac{U_\vartheta^{(c)}}{T}\right) = O\left(\frac{\nu r_0 \pi}{\delta^3} U_r^{(c)}\right);$$

$$\nu \partial_{rr} U_\vartheta^{(c)} = O\left(\frac{\nu r_0 \pi}{\delta^3} U_r^{(c)}\right);$$

$$\frac{2\nu}{r} \partial_r U_\vartheta^{(c)} \sim O\left(\frac{2\nu \pi}{\delta^2} U_r^{(c)}\right);$$

$$\frac{\nu}{r} \partial_{r\vartheta} U_r^{(c)} \sim O\left(\frac{\nu}{r_0 \pi \delta} U_r^{(c)}\right).$$

Несложно видеть, что в уравнении (18) наиболее значимыми слагаемыми являются  $\partial_t U_\vartheta^{(c)}$  и  $\nu \partial_{rr} U_\vartheta^{(c)}$ , имеющие порядок  $O(\nu r_0 \pi U_r^{(c)}/\delta^3)$  и растущие в пределе  $\nu \rightarrow 0$ . Остальные компоненты уравнения (18) в пределе  $\nu \rightarrow 0$  либо убывают, либо не изменяются.

Таким образом, из проведенных оценок следует, что в системе уравнений (17), (18), описывающих вихревую компоненту течения жидкости в капле, уравнение (17) состоит из слагаемых, много меньших (в пределе  $\nu \rightarrow 0$ ) наиболее значимых компонент уравнения (18). В итоге в асимптотике малой вязкости уравнение (17) должно быть отброшено, а в уравнении (18) — оставлены лишь два слагаемых, значение которых растет при  $\nu \rightarrow 0$ :

$$\partial_t U_\vartheta^{(c)} = \nu \partial_{rr} U_\vartheta^{(c)}. \quad (21)$$

Уравнения (16), (21) и дают искомую систему уравнений пограничного слоя в окрестности осциллирующей свободной поверхности капли вязкой жидкости.

## Решение уравнений пограничного слоя

Решение сформулированной задачи будем искать методом прямого разложения по малому параметру  $\varepsilon$ , имея в виду, что  $\xi$ ,  $U_\vartheta^{(c)}$ ,  $U_r^{(c)}$ ,  $U_r^{(p)}$ ,  $U_\vartheta^{(p)}$  являются величинами первого порядка по  $\varepsilon$ , а давление внутри жидкости и электростатический потенциал имеют компоненты и нулевого порядка малости. Поэтому давление и потенциалы представим в виде асимптотических разложений:

$$p^{(p)}(r, \vartheta, t) = p_0^{(p)}(r, \vartheta, t) + p_1^{(p)}(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\phi(r, \vartheta, t) = \phi^{(0)}(r, t) + \phi^{(1)}(r, \vartheta, t) + O(\varepsilon^2);$$

$$\phi_s(t) = \phi_s^{(0)}(t) + \phi_s^{(1)}(t) + O(\varepsilon^2),$$

где параметры с индексом «0» имеют нулевой порядок малости, а параметры с индексом «1» — первый. Подставив данные разложения в систему уравнений (5)–(12), (14), (16), (21) и выделив слагаемые нулевого порядка

малости, получим задачу для расчета равновесного состояния:

$$\begin{aligned} \Delta\phi^{(0)} &= 0; & r \rightarrow +\infty: & \nabla\phi^{(0)} \rightarrow 0; \\ r = r_0: & \phi^{(0)} = \phi_S^{(0)}(t); & -p^{(0)} - p_Q^{(0)} + p_\sigma^{(0)} &= 0; \\ & \int_{-1}^1 r_0^2 \partial_r \phi^{(0)} d\mu = -2Q, \end{aligned}$$

имеющую решение:

$$\phi^{(0)} = \frac{Q}{r}; \quad \phi_S^{(0)} = \frac{Q}{r_0}; \quad p^{(0)} + \frac{Q^2}{8\pi r_0^4} = \frac{2\sigma}{r_0}. \quad (22)$$

Выделив слагаемые первого порядка малости, получим задачу для расчета полей скоростей, давления и электростатических потенциалов, связанных с линейными осцилляциями капли:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 U_r^{(p)}) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \partial_\vartheta (\sin(\vartheta) U_\vartheta^{(p)}) &= 0; \\ \partial_t U_r^{(p)} = -\frac{1}{\rho} \partial_r p_1^{(p)}; & \quad \partial_t U_\vartheta^{(p)} = -\frac{1}{\rho r} \partial_\vartheta p_1^{(p)}; \\ \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 U_r^{(c)}) + \frac{1}{r \sin(\vartheta)} \partial_\vartheta (\sin(\vartheta) U_\vartheta^{(c)}) &= 0; \\ \partial_t U_\vartheta^{(c)} = v \partial_{r,r} U_\vartheta^{(c)}; & \\ t = 0: & \quad \mathbf{U}^{(p)} + \mathbf{U}^{(c)} = 0; \quad \xi = \sum_{m \in \Omega} h_m P_m(\mu); \\ r \rightarrow 0: & \quad \mathbf{U}^{(p)} \rightarrow 0; \quad \mathbf{U}^{(c)} \rightarrow 0; \quad \Delta\phi^{(1)} = 0; \\ r \rightarrow +\infty: & \quad \nabla\phi^{(1)} \rightarrow 0; \\ r = r_0: & \quad \phi^{(1)} + \xi \partial_r \phi^{(0)} = \phi_S^{(1)}(t); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \xi = U_r^{(p)} + U_r^{(c)}; & \quad \partial_r U_\vartheta^{(p)} + \partial_r U_\vartheta^{(c)} + \frac{1}{r} \partial_\vartheta U_r^{(p)} \\ & + \frac{1}{r} \partial_\vartheta U_r^{(c)} - \frac{1}{r} U_\vartheta^{(p)} - \frac{1}{r} U_\vartheta^{(c)} = 0; \\ -p^{(p)} + 2\rho v \partial_r U_r^{(p)} + 2\rho v \partial_r U_r^{(c)} & \\ -\frac{1}{4\pi} \partial_r \phi^{(0)} (\partial_r \phi^{(1)} + \xi \partial_{rr} \phi^{(0)}) - \frac{\sigma}{r_0^2} (2 + \Delta_\Omega) \xi &= 0; \\ \int_{-1}^1 (r_0 \partial_r \phi^{(1)} + \xi (r_0 \partial_{rr} \phi^{(0)} + 2\partial_r \phi^{(0)})) d\mu &= 0; \\ \int_{-1}^1 \xi d\mu = 0; & \quad \int_{-1}^1 \xi P_1(\mu) d\mu = 0, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $\Delta_\Omega$  — угловая часть оператора Лапласа в сферических координатах.

В системе (23) выполним преобразование Лапласа по времени [10]

$$f(S) = \int_0^{+\infty} f(t) \exp(-St) dt = \mathcal{F}[f(t)];$$

$$f = \{U_r^{(p)}; U_\vartheta^{(p)}; U_r^{(c)}; U_\vartheta^{(c)}; p_1^{(p)}; \xi; \phi^{(1)}; \phi_S^{(1)}\},$$

а изображения Лапласа разложим в ряд по полиномам Лежандра и их производным [11]

$$\xi(\vartheta, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(S) P_n(\mu);$$

$$U_r^{(p)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_{rn}^{(p)}(r, S) P_n(\mu);$$

$$U_r^{(c)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_{rn}^{(c)}(r, S) P_n(\mu);$$

$$U_\vartheta^{(p)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_{\vartheta n}^{(p)}(r, S) \partial_\vartheta P_n(\mu);$$

$$U_\vartheta^{(c)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=1}^{+\infty} U_{\vartheta n}^{(c)}(r, S) \partial_\vartheta P_n(\mu);$$

$$p_1^{(p)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_{1n}^{(p)}(r, S) P_n(\mu);$$

$$\phi^{(1)}(r, \vartheta, S) = \sum_{n=0}^{+\infty} \phi_n^{(1)}(r, S) P_n(\mu). \quad (24)$$

Подставив разложения (24) в образ Лапласа системы (23), найдем

$$\partial_r U_{rn}^{(p)}(r, S) + \frac{2}{r} U_{rn}^{(p)}(r, S) - \frac{n(n+1)}{r} U_{\vartheta n}^{(p)}(r, S) = 0; \quad (25)$$

$$S U_{rn}^{(p)}(r, S) = -\frac{1}{\rho} \partial_r p_{1n}^{(p)}(r, S);$$

$$S U_{\vartheta n}^{(p)}(r, S) = -\frac{1}{\rho r} p_{1n}^{(p)}(r, S); \quad (26)$$

$$\partial_r U_{rn}^{(c)}(r, S) + \frac{2}{r} U_{rn}^{(c)}(r, S) - \frac{n(n+1)}{r} U_{\vartheta n}^{(c)}(r, S) = 0; \quad (27)$$

$$S U_{\vartheta n}^{(c)}(r, S) = v \partial_{rr} U_{\vartheta n}^{(c)}(r, S); \quad (28)$$

$$r \rightarrow 0: \quad U_{rn}^{(p)}(r, S) \rightarrow 0; \quad U_{\vartheta n}^{(p)}(r, S) \rightarrow 0;$$

$$U_{rn}^{(c)}(r, S) \rightarrow 0; \quad U_{\vartheta n}^{(c)}(r, S) \rightarrow 0; \quad (29)$$

$$\partial_{rr} \phi_n^{(1)}(r, S) + \frac{2}{r} \partial_r \phi_n^{(1)}(r, S) - n(n+1) \phi_n^{(1)}(r, S) = 0; \quad (30)$$

$$r \rightarrow +\infty: \quad \partial_r \phi_n^{(1)}(r, S) \rightarrow 0; \quad \phi_n^{(1)}(r, S) \rightarrow 0; \quad (31)$$

$$r = r_0 : \quad \phi_n^{(1)}(r, S) + \xi_n(S) \partial_r \phi^{(0)} = \phi_S^{(1)}(S) \delta_{n0}; \quad (32)$$

$$r = r_0 : \quad \int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{+\infty} (r_0 \partial_r \phi_n^{(1)}(r, S) + \xi_n(S) (r_0 \partial_{rr} \phi^{(0)} + 2 \partial_r \phi^{(0)})) P_n(\mu) d\mu = 0; \quad (33)$$

$$\int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(S) P_n(\mu) d\mu = 0;$$

$$\int_{-1}^{1} \sum_{n=0}^{+\infty} \xi_n(S) P_n(\mu) P_1(\mu) d\mu = 0; \quad (34)$$

$$r = r_0 : \quad S \xi_n(S) - h_n = U_{rn}^{(p)}(r, S) + U_{rn}^{(c)}(r, S); \quad (35)$$

$$\partial_r U_{\partial n}^{(p)}(r, S) + \partial_r U_{\partial n}^{(c)}(r, S) + \frac{1}{r} U_{rn}^{(p)}(r, S) + \frac{1}{r} U_{rn}^{(c)}(r, S) - \frac{1}{r} U_{\partial n}^{(p)}(r, S) - \frac{1}{r} U_{\partial n}^{(c)}(r, S) = 0;$$

$$-p_{1n}^{(p)}(r, S) + 2\rho\nu \partial_r U_{rn}^{(p)}(r, S) + 2\rho\nu \partial_r U_{rn}^{(c)}(r, S) - \frac{1}{4\pi} \partial_r \phi^{(0)} (\partial_r \phi_n^{(1)}(r, S) + \xi_n(S) \partial_{rr} \phi^{(0)}) + \frac{\sigma}{r_0^2} (n+2)(n-1) \xi_n(S) = 0, \quad (37)$$

где  $\delta_{n0}$  — символ Кронекера.

Решение системы (25)–(37) начнем с уравнений (25), (26), которые несложно свести к уравнению Эйлера для давления и получить решение, удовлетворяющее условиям ограниченности (29), вида

$$p_{1n}^{(p)}(r, S) = -\frac{\rho S}{n} A_n(S) r^n; \quad U_{rn}^{(p)}(r, S) = A_n(S) r^{n-1};$$

$$U_{\partial n}^{(p)}(r, S) = \frac{A_n(S)}{n} r^{n-1}. \quad (38)$$

Вихревые компоненты поля скоростей несложно найти, решив систему (27), (28) и удовлетворяя условиям ограниченности (29):

$$U_{\partial n}^{(c)}(r, S) = B_n(S) \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} r \right);$$

$$U_{rn}^{(c)}(r, S) = B_n(S) \frac{n(n+1)}{r} \sqrt{\frac{\nu}{S}} \left( \operatorname{ch} \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} r \right) - \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\nu}{S}} \operatorname{sh} \left( \sqrt{\frac{S}{\nu}} r \right) \right). \quad (39)$$

Из условия (34), используя ортогональность полиномов Лежандра, найдем  $\xi_0(S) = \xi_1(S) = 0$ . Используя эти условия и решение нулевого порядка малости (22),

найдем решение электростатической задачи (30) с условиями ограниченности (31), условием постоянства потенциала поверхности (32) и условием неизменности заряда (33)

$$\phi_S^{(1)}(S) = 0; \quad \phi_n^{(1)}(r, S) = \frac{Q}{r_0^2} \left( \frac{r_0}{r} \right)^{n+1} \xi_n(S). \quad (40)$$

Подставив выражения (38)–(40) в систему граничных условий: кинематического (35) и динамических (36), (37), и учитывая (22), несложно найти коэффициенты  $A_n(S)$ ,  $B_n(S)$ ,  $\xi_n(S)$ , которые с учетом слагаемых не выше первого порядка малости по величине коэффициента кинематической вязкости примут вид:

$$A_n(S) = -\frac{h_n \omega_n^2}{D_n(S)} \frac{1}{r_0^{n-1}} \left( 1 + 2(n^2 - 1) \frac{\nu}{Sr_0^2} \right) + O(\nu^{3/2});$$

$$B_n(S) = \frac{2(n-1)}{n} \frac{h_n \omega_n^2}{D_n(S) \operatorname{ch}(\sqrt{S\nu^{-1}} r_0)} \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{Sr_0}} \times \left( 1 + \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{Sr_0}} \operatorname{th}(\sqrt{S\nu^{-1}} r_0) \right) + O(\nu^{3/2});$$

$$\xi_n(S) = \frac{h_n}{D_n(S)} \left( S + 2(n-1)(2n+1) \frac{\nu}{r_0^2} \right) + O(\nu^{3/2}); \quad (41)$$

$$D_n(S) = S^2 + 2(n-1)(2n+1) \frac{\nu S}{r_0^2} + \omega_n^2 + O(\nu^{3/2});$$

$$\omega_n^2 = \frac{\sigma}{\rho r_0^3} n(n-1) \left( n + 2 - \frac{Q^2}{4\pi\sigma r_0^3} \right).$$

Из выражений (41) видно, что изображения Лапласа величин  $\xi_n(S)$ ,  $p_{1n}^{(p)}(r, S)$ ,  $U_{rn}^{(p)}(r, S)$ ,  $U_{\partial n}^{(p)}(r, S)$ ,  $U_{\partial n}^{(c)}(r, S)$ ,  $U_{rn}^{(c)}(r, S)$ , для которых справедливы выражения (38,39), являются аналитическими функциями во всей комплексной плоскости за исключением точек, в которых  $D_n(S) = 0$ . Дисперсионное уравнение  $D_n(S) = 0$ , полученное выше в рамках модели пограничного слоя, имеет два комплексно сопряженных корня:

$$S_n^{(+)} = -\gamma_n + i\varpi_n; \quad S_n^{(-)} = -\gamma_n - i\varpi_n,$$

$$\gamma_n = (n-1)(2n+1) \frac{\nu}{r_0^2}, \quad \varpi_n = \sqrt{\omega_n^2 - \gamma_n^2}. \quad (42)$$

С учетом сказанного формула обратного преобразования Лапласа запишется в виде

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} f(S) \exp(St) dS = \operatorname{res}_{S=S^{(+)}} (f(S) \exp(St)) + \operatorname{res}_{S=S^{(-)}} (f(S) \exp(St)). \quad (43)$$

Подставив коэффициенты (41) в выражения (38,39), учитывая (43), найдем решение задачи первого порядка малости по амплитуде начального отклонения поверхности капли

$$\begin{aligned} \xi_n(t) &= h_n \left( \cos(\varpi_n t) + \frac{\gamma_n}{\varpi_n} \sin(\varpi_n t) \right) \exp(-\gamma_n t); \\ p_{1n}^{(p)}(r, t) &= \rho \omega_n^2 h_n r_0 \left( \frac{r}{r_0} \right)^n \frac{\exp(-\gamma_n t)}{n} \left( \cos(\varpi_n t) + \frac{(n-1)v}{\varpi_n r_0^2} \sin(\varpi_n t) \right); \\ U_{rn}^{(p)}(r, t) &= -h_n \left( \frac{r}{r_0} \right)^{n-1} \left( \frac{\omega_n^2}{\varpi_n} \sin(\varpi_n t) - 2(n^2-1) \frac{v}{r_0^2} \cos(\varpi_n t) \right) \exp(-\gamma_n t); \\ U_{\vartheta n}^{(p)}(r, t) &= -\frac{h_n}{n} \left( \frac{r}{r_0} \right)^{n-1} \left( \frac{\omega_n^2}{\varpi_n} \sin(\varpi_n t) - 2(n^2-1) \frac{v}{r_0^2} \cos(\varpi_n t) \right) \exp(-\gamma_n t); \\ U_{\vartheta n}^{(c)}(r, t) &= \frac{(n-1)}{n} \frac{i h_n \omega_n^2}{\varpi_n} \left[ \frac{\eta_n^{(-)}}{\chi_n^{(-)} r_0} \frac{\text{sh}(\chi_n^{(-)} r)}{\text{ch}(\chi_n^{(-)} r_0)} \exp(-i \varpi_n t) - \frac{\eta_n^{(+)}}{\chi_n^{(+)} r_0} \frac{\text{sh}(\chi_n^{(+)} r)}{\text{ch}(\chi_n^{(+)} r_0)} \exp(i \varpi_n t) \right] \exp(-\gamma_n t); \\ U_{rn}^{(c)}(r, t) &= (n^2-1) \frac{\omega_n^2}{\varpi_n} \frac{i h_n}{r_0 r} \left[ \left( \text{ch}(\chi_n^{(-)} r) - \frac{\text{sh}(\chi_n^{(-)} r)}{\chi_n^{(-)} r} \right) \times \frac{\exp(-i \varpi_n t)}{(\chi_n^{(-)})^2 \text{ch}(\chi_n^{(-)} r_0)} - \left( \text{ch}(\chi_n^{(+)} r) - \frac{\text{sh}(\chi_n^{(+)} r)}{\chi_n^{(+)} r} \right) \times \frac{\exp(i \varpi_n t)}{(\chi_n^{(+)})^2 \text{ch}(\chi_n^{(+)} r_0)} \right] \exp(-\gamma_n t); \\ \chi_n^{(-)} &= \sqrt{\frac{-i \varpi_n - \gamma_n}{v}}; \quad \chi_n^{(+)} = \sqrt{\frac{i \varpi_n - \gamma_n}{v}}; \\ \eta_n^{(-)} &= 1 + \frac{\text{th}(\chi_n^{(-)} r_0)}{\chi_n^{(-)} r_0}; \quad \eta_n^{(+)} = 1 + \frac{\text{th}(\chi_n^{(+)} r_0)}{\chi_n^{(+)} r_0}. \end{aligned} \quad (44)$$

### Оценка толщины пограничного слоя

Для завершения предпринятой модификации теории пограничного слоя для расчета осцилляций заряженной капли вязкой жидкости остается оценить толщину пограничного слоя, возникающего вблизи свободной поверхности осциллирующей капли маловязкой жидкости. Для

этого выпишем выражение вихря скорости

$$\text{rot } \mathbf{U}(r, \vartheta, t) = \left( \sum_{n \in \Xi} \Omega_n(r, t) \partial_{\vartheta} P_n(\mu) \right) \mathbf{e}_{\varphi},$$

где  $\mathbf{e}_{\varphi}$  — азимутальный орт сферической системы координат,

$$\begin{aligned} \Omega_n(r, t) &= \frac{(n-1)}{n} \frac{i h_n \omega_n^2}{\varpi_n r_0} \left[ \eta_n^{(-)} \left( \beta_n^{(-)} \frac{\text{ch}(\chi_n^{(-)} r)}{\text{ch}(\chi_n^{(-)} r_0)} + \frac{\lambda_n^{(-)}}{\chi_n^{(-)} r} \frac{\text{sh}(\chi_n^{(-)} r)}{\text{ch}(\chi_n^{(-)} r_0)} \right) \exp(-i \varpi_n t) - \eta_n^{(+)} \left( \beta_n^{(+)} \frac{\text{ch}(\chi_n^{(+)} r)}{\text{ch}(\chi_n^{(+)} r_0)} + \frac{\lambda_n^{(+)}}{\chi_n^{(+)} r} \frac{\text{sh}(\chi_n^{(+)} r)}{\text{ch}(\chi_n^{(+)} r_0)} \right) \exp(i \varpi_n t) \right] \exp(-\gamma_n t); \\ \lambda_n^{(-)} &= 1 + \frac{n(n+1)}{(\chi_n^{(-)})^2 r^2}; \quad \lambda_n^{(+)} = 1 + \frac{n(n+1)}{(\chi_n^{(+)})^2 r^2}; \\ \beta_n^{(-)} &= 1 - \frac{n(n+1)}{(\chi_n^{(-)})^2 r^2}; \quad \beta_n^{(+)} = 1 - \frac{n(n+1)}{(\chi_n^{(+)})^2 r^2}. \end{aligned}$$

При малых значениях коэффициента кинематической вязкости  $\nu$  выражение (45) можно записать в приближенном виде

$$\begin{aligned} \Omega_n(r, t) &= \frac{(n-1)}{n} \frac{i h_n \omega_n^2}{\varpi_n r_0} \left( \frac{\text{ch}(\chi_n^{(-)} r)}{\text{ch}(\chi_n^{(-)} r_0)} \exp(-i \varpi_n t) - \frac{\text{ch}(\chi_n^{(+)} r)}{\text{ch}(\chi_n^{(+)} r_0)} \exp(i \varpi_n t) \right) \exp(-\gamma_n t). \end{aligned} \quad (46)$$

Выражение (46) содержит величины  $\chi_n^{(\pm)}$ , численные значения которых зависят от коэффициента вязкости  $\nu$  и заряда  $Q$  капли, характеризуемого параметром Релея  $W = Q^2 / (4\pi\sigma r_0^3)$ . Пусть величина  $W$  лежит в диапазоне значений  $0 \leq W < W_*$ , где  $W_*$  — значение, разделяющее при фиксированной вязкости жидкости периодические и аperiodические движения свободной поверхности капли. Известно (см., например, [12]), что в зависимости от номера моды осцилляций при любой отличной от нуля величине коэффициента вязкости существует такое значение параметра Релея  $W_*$ , что при  $W < W_*$  поверхность капли может совершать периодические движения, т.е. осциллировать, а при  $W_* \geq W$  поверхность капли может двигаться только аperiodически. В области  $W < W_*$  корни (42) будут комплексно сопряженными и поверхность капли будет осциллировать, что возможно в случае  $\varpi_n^2 > 0$ . Величины  $\chi_n^{(\pm)}$  также будут комплексно сопряженными. В этом случае выражение (46) при условии  $r \neq 0$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \Omega_n(r, t) &= \frac{2(n-1)h_n\omega_n^2}{n\varpi_n r_0} \exp\left(\frac{\sqrt{\omega_n - \gamma_n}}{\sqrt{2\nu}}(r - r_0) - \gamma_n t\right) \times \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_n + \gamma_n}}{\sqrt{2\nu}}(r - r_0) + \varpi_n t\right). \end{aligned} \quad (47)$$

Если параметр Релея  $W$  лежит в пределах  $W_* < W < W_{cr} = n + 2$ , когда свободная поверхность капли совершает аperiодические, но устойчивые движения (при  $\varpi_n^2 < 0$  и  $|\varpi_n| - \gamma_n < 0$ ), то величины  $\chi_n^{(\pm)}$  будут мнимыми. В этом случае из выражения (46) несложно видеть, что вихрь скорости жидкости будет периодической функцией координаты  $r$  и не будет иметь явно выраженного множителя, затухающего при  $r \rightarrow 0$ , в связи с чем вихревое движение будет проникать в глубь капли на значительное расстояние и развитая выше теория пограничного слоя в данной ситуации будет неприменима. Однако анализа показывает, что для маловязкой жидкости диапазон  $W_* < W < W_{cr}$  весьма узок, а то обстоятельство, что в этом диапазоне вихревое движение заполняет весь объем капли, по всей видимости, связано с закономерностями реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости по отношению к избыточному заряду. Согласно [13], при приближении поверхностной плотности заряда к критической для реализации неустойчивости свободной поверхности жидкость под свободной поверхностью становится неустойчивой по отношению к возникновению в ней вихревых движений конвективного типа даже в отсутствие градиентов температуры.

Если величина параметра Релея будет удовлетворять условию  $W > W_{cr} = n + 2$ , то поверхность капли будет неустойчивой по отношению к собственному заряду (при этом  $\varpi_n^2 < 0$  и  $|\varpi_n| - \gamma_n > 0$ ), а величины  $\chi_n^{(+)}$  и  $\chi_n^{(-)}$  будут соответственно мнимой и действительной положительной. Выражение (46) в этом случае при условии  $r \neq 0$  принимает асимптотический вид:

$$\Omega_n(r, t) = \frac{(n-1)}{n} \frac{h_n \omega_n^2}{|\varpi_n| r_0} \exp\left(\sqrt{\frac{|\varpi_n| - \gamma_n}{\nu}} (r - r_0)\right) \times \exp(|\varpi_n| t - \gamma_n t). \quad (48)$$

При записи (48) учтено только первое слагаемое (46), поскольку именно оно неограниченно возрастает во времени, формируя пограничный слой.

Проанализировав выражения (47) и (48), несложно увидеть, что амплитуда вихря скорости имеет максимальное значение при  $r = r_0$ , т.е. на свободной поверхности капли, и затухает вглубь капли, уменьшая свою амплитуду в  $e \cong 2.718$  раз на характерном линейном масштабе

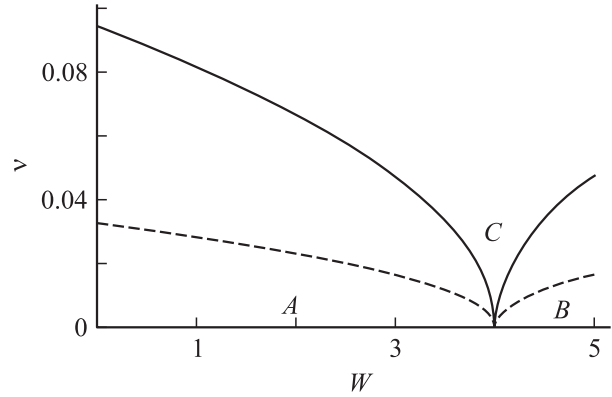
$$\delta = \begin{cases} \sqrt{2\nu/(\omega_n - \gamma_n)}, & 0 \leq W < W_*; \\ \sqrt{\nu/(|\varpi_n| - \gamma_n)}, & W > W_{cr} = n + 2, \end{cases} \quad (49)$$

который и является толщиной пограничного слоя.

Выделим область физических параметров  $\nu$  и  $W$ , в которых предлагаемая модификация теории пограничного слоя может быть использована с заранее заданной точностью.

Пусть, например, требуется провести расчет с точностью

$$U_r^{(c)}/U_\vartheta^{(c)} = \Theta \sim \delta/(r_0\pi),$$



**Рис. 1.** Предлагаемая теория пограничного слоя применима в областях A и B, но неприменима в области C. Сплошной кривой нанесены результаты расчета при  $\Theta = 0.09$ , пунктиром — при  $\Theta = 0.05$ .

где  $\Theta$  — допустимая погрешность, тогда соотношение  $\delta \sim \Theta r_0 \pi$  совместно с (49) дает связь между предельными значениями коэффициента вязкости  $\nu$  и параметра Релея  $W$ , при которых можно воспользоваться развитой теорией пограничного слоя.

Результаты подобного расчета приведены на рис. 1, где для заданного  $\Theta$  выделены области A и B, в которых возможно использование теории пограничного слоя, и область C, в которой нужно пользоваться строгой теорией. Отметим, что все кривые на рис. 1 и на всех нижеследующих рисунках рассчитаны в безразмерных переменных, в которых  $\rho = \sigma = r_0 = 1$ , для основной моды осцилляций  $n = 2$ .

## Анализ полученных результатов

В целях оценки точности предлагаемой модификации теории пограничного слоя для расчета осцилляций заряженной капли вязкой жидкости приведем точное выражение для ротора скорости в первом порядке малости по амплитуде начальной деформации равновесной сферической формы капли [3]:

$$\text{rot } \mathbf{U}(r, \vartheta, t) = \left( \sum_{n \in \Xi} \Omega_n(r, t) \partial_\vartheta P_n(\mu) \right) \mathbf{e}_\varphi; \quad (50)$$

$$\Omega_n(r, t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{h_n b_n (S_n^{(k)})}{n(n+1)} \frac{S_n^{(k)}}{\nu} \frac{j_n(\chi_n^{(k)} r)}{j_n(\chi_n^{(k)} r_0)} \exp(S_n^{(k)} t),$$

где  $j_n$  — модифицированная сферическая функция Бесселя первого рода.

В случае, когда вязкость жидкости оказывается малой величиной, выражение (50) можно привести к виду

$$\Omega_n(r, t) = \frac{2(n-1)h_n \omega_n^2}{n \varpi_n r} \exp\left(\frac{\sqrt{\omega_n - \gamma_n}}{\sqrt{2\nu}} (r - r_0) - \gamma_n t\right) \times \sin\left(\frac{\sqrt{\omega_n + \gamma_n}}{\sqrt{2\nu}} (r - r_0) + \varpi_n t\right), \quad (51)$$

если  $0 \leq W < W_*$ , или

$$\Omega_n(r, t) = \frac{(n-1)}{n} \frac{h_n \omega_n^2}{|\varpi_n| r} \exp\left(\sqrt{\frac{|\varpi_n| - \gamma_n}{\nu}} (r - r_0)\right) \times \exp(|\varpi_n| t - \gamma_n t), \quad (52)$$

если  $W > W_{cr} = n + 2$ .

Из сравнения выражений (51), (52) с (47), (48) видно, что они практически совпадают, за тем лишь исключением, что точных выражениях (51), (52) содержится множитель  $1/r$ , а в выражениях (47), (48), полученных в приближении пограничного слоя, вместо данного множителя содержится множитель  $1/r_0$ . При малой вязкости жидкости амплитуда вихревой компоненты скорости жидкости стремится к нулю при  $r \rightarrow 0$  за счет быстрого убывания экспоненциального множителя, и различие между точным и приближенным решениями при этом уменьшается, так как зависимость  $1/r$  является слабой по сравнению с экспоненциальным уменьшением амплитуды волны при  $r \rightarrow 0$ .

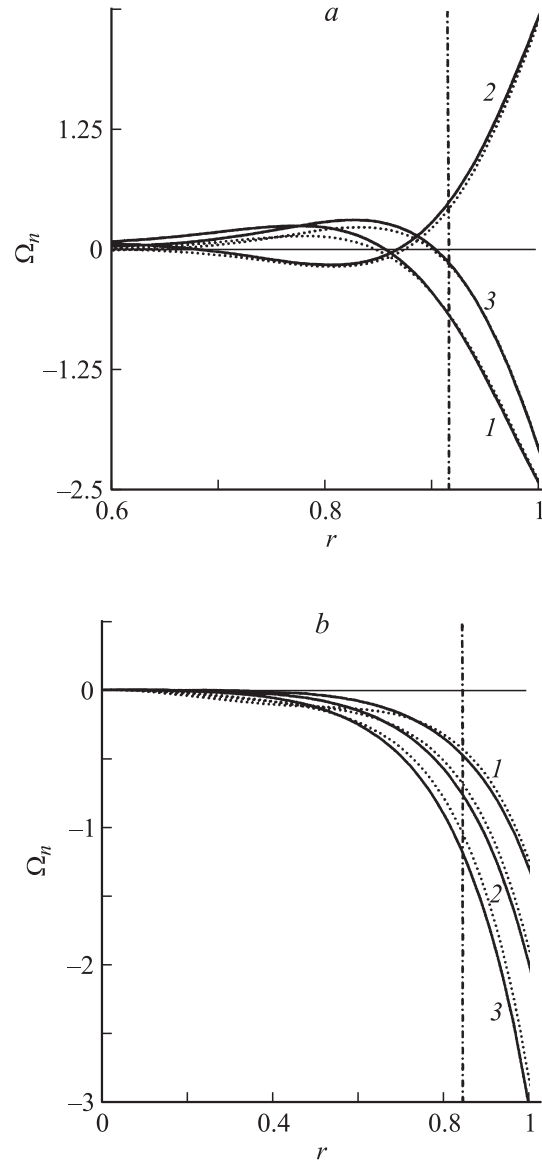
Отметим также, что точные выражения для отклонения поверхности  $\xi_n(t)$ , поля давлений  $p_n^{(1)}(r, t)$  и потенциальных компонент поля скоростей жидкости  $U_{rn}^{(p)}(r, t)$ ,  $U_{\theta n}^{(p)}(r, t)$  в пределе малой вязкости жидкости  $\nu \rightarrow 0$  имеют аналитический вид, в точности совпадающий с такими же значениями, найденными в модели пограничного слоя и определенными выражениями (44).

Последние два факта: 1) аналитическое совпадение (с точностью до слабо меняющегося множителя  $1/r$ ) точных выражений для вихрей скорости в приближении малой вязкости с такими же выражениями, полученными в приближении теории пограничного слоя; 2) полное аналитическое совпадение точных выражений для образующей поверхности капли, поля давления и потенциальных компонент полей скоростей в приближении малой вязкости с такими же величинами, найденными в модели пограничного слоя, указывают на то, что в условиях малой вязкости предлагаемая модификация теории пограничного слоя для описания осцилляций капли вязкой жидкости качественно адекватно характеризует процессы, реализующиеся на поверхности и внутри капли.

### Численный анализ точности теории пограничного слоя

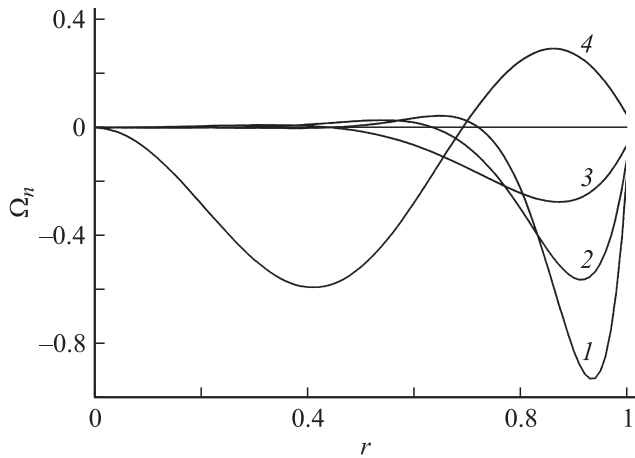
Проанализируем зависимость от радиальной переменной  $r$  выражения для вихря скорости  $\Omega_n(r, t)$  при фиксированном времени  $t = \text{const}$ , отталкиваясь от выражения (45), полученного в теории пограничного слоя, и от (50) в точной теории. Результаты расчета по (45) и (50) приведены на рис. 2. Детальные расчеты показывают, что теория пограничного слоя хорошо приближает точное решение только начиная с некоторого момента времени  $t_0$ , с которого корни дисперсионного уравнения

$D_n(S_n^{(k)}) = 0$  с номерами  $n \geq 3$  становятся несущественными в выражении (50). В начальный момент времени  $t = 0$  модифицированная теория пограничного слоя дает большие отклонения от точной теории в широком диапазоне значений  $r$ , как это видно из рис. 3. Появление обсуждаемой особенности с математической точки зрения связано с тем, что в точной теории суммирование в выражении (50) производится по большому количеству корней дисперсионного уравнения  $D_n(S_n^{(k)}) = 0$  до тех пор, пока ряд (50) не сойдется, а в приближенной теории пограничного слоя учитывается только один или два корня дисперсионного уравнения. С физической точки



**Рис. 2.** Зависимости от радиальной переменной  $r$  вихря  $\Omega_n$ , построенные при  $\nu = 0.01$ ,  $t = 4$  (кривая 1), 5 (2), 6 (3). Сплошной кривой нанесены результаты расчета по точному выражению (50), пунктиром — по приближенному (45). Вертикальная штрихпунктирная линия указывает толщины пограничного слоя, определенную выражением (49). *a* —  $W = 0$ ; *b* — 4.1.





**Рис. 3.** Зависимости вихря  $\Omega_n$  от переменной  $r$ , рассчитанные в начальный момент времени  $t = 0$  по выражению (45) при  $\nu = 0.01$ ,  $W = 1$  (кривая 1), 3 (2), 3.8 (3), 4.1 (4). Точное значение вихря при  $t = 0$ , рассчитанное по (50), есть  $\Omega_n = 0$ .

зрения данное обстоятельство связано с заданием в решаемой задаче нулевого начального условия для поля скоростей; полноценное распределение поля скоростей течения жидкости, связанное с осцилляциями капли, установится на интервале времени порядка периода осцилляций.

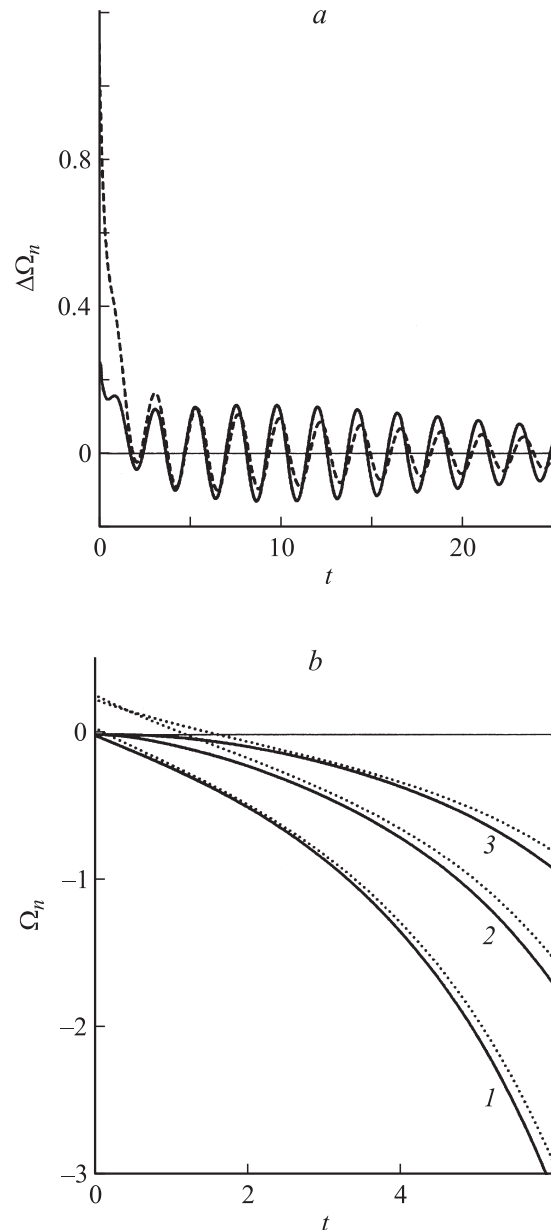
На рис. 4 приведены зависимости от времени  $t$  величины разности вихрей  $\Delta\Omega_n(r, t)$  и их значений при  $r = \text{const}$ . Из рис. 4, *a* можно видеть, что значения времени  $t_0$ , начиная с которого теория пограничного слоя хорошо приближает точную теорию, являются величиной, много меньшей времени затухания движений на поверхности капли и в ее объеме.

Тот факт, что теория пограничного слоя описывает реальные движения жидкости в капле, только начиная с некоторого момента времени, указывает на то, что на ее основе нельзя описать зарождение пограничного слоя вблизи свободной поверхности капли. Для описания образования пограничного слоя вблизи свободной поверхности заряженной капли нужно использовать точное выражение (50) для вихря скорости. Принимая за толщину пограничного слоя  $\delta$  расстояние от свободной поверхности капли, на котором величина вихря, описываемого точным решением (50), уменьшается в  $e \approx 2.718$  раз, нанесем зависимость  $\delta = \delta(t)$  на на рис. 5 пунктиром. На том же рисунке точечная кривая даст нам пограничный слой, определенный в рамках модифицированной теории по соотношению (49). Анализ рис. 5 показывает, что толщина пограничного слоя вблизи поверхности капли, определенная по точному решению при малых временах, возрастает, а затем остается практически постоянной, примерно равной толщине пограничного слоя (49), определенной в модифицированной теории.

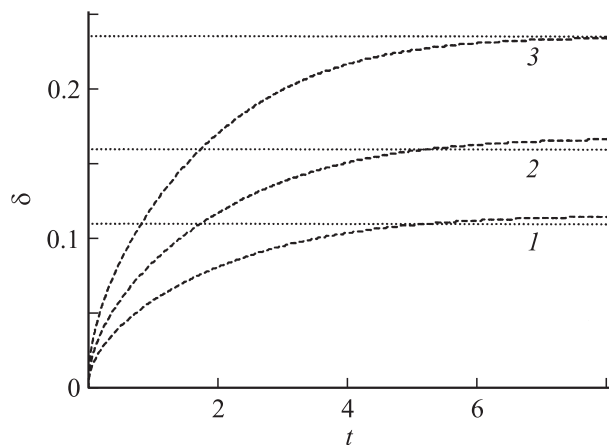
Из рис. 5 можно видеть, что время формирования пограничного скоростного слоя у поверхности капли

вязкой жидкости является небольшим по сравнению с характерными временами вязкого затухания колебаний поверхности капли и примерно равно периоду осцилляций в области устойчивости или величине, обратной инкременту неустойчивости при  $W \geq W_{\text{cr}}$ .

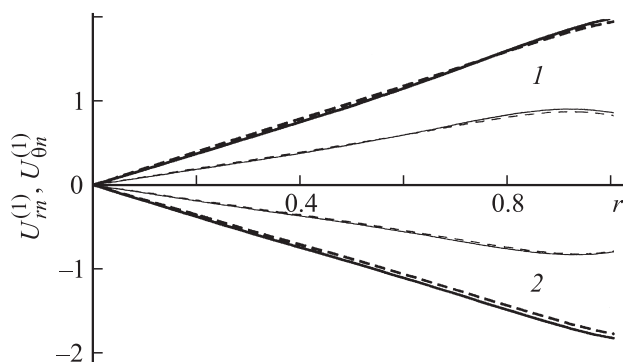
Таким образом, проведенный анализ точности теории пограничного слоя указывает на то, что при  $t \geq t_0$  теория пограничного слоя весьма точно описывает реальное вихревое движение жидкости в капле. Если вязкость жидкости является малой величиной, то ви-



**Рис. 4.** *a* — зависимости от времени  $t$  разности вихрей  $\Delta\Omega_n$ , определенных выражениями (50) и (45), при  $\nu = 0.02$ ,  $W = 0$ ,  $r = 1$  (сплошная кривая), 0.95 (пунктир); *b* — зависимости от времени  $t$  вихря  $\Omega_n$ , построенного по точному значению (50) (сплошная кривая) и по приближению пограничного слоя (45) (пунктир) при  $\nu = 0.01$ ,  $W = 4.1$ ,  $r = 1$  (кривая 1), 0.9 (2), 0.8 (3).



**Рис. 5.** Зависимость толщины пограничного слоя  $\delta$ , возникающего у свободной поверхности капли, в зависимости от времени  $t$  при  $W = 4.1$ ,  $\nu = 0.005$  (кривая 1), 0.01 (2), 0.02 (3). Пунктиром показано значение, рассчитанное по (50), а точками — рассчитанное по (49).



**Рис. 6.** Зависимости проекций скоростей  $U_{rn}$  (жирная кривая) и  $U_{vn}$  (тонкая кривая) от координаты  $r$ , построенные при  $W = 1$ ,  $\nu = 0.02$ ,  $t = 2$  (кривые 1), 3.2 (2). Сплошные кривые соответствуют точному решению, пунктир — приближению пограничного слоя.

хревые компоненты, пропорциональные  $U_{rn}^{(c)}(r, t) \sim \nu$  и  $U_{vn}^{(c)}(r, t) \sim \sqrt{\nu}$ , оказываются малыми величинами в сравнении с крупномасштабным потенциальным движением жидкости в капле. Все это приводит к тому, что проекции скорости жидкости на орты сферической системы координат, определенные с учетом потенциальных и вихревых компонент при малой вязкости жидкости в теории пограничного слоя и точной теории, отличаются весьма незначительно, как это можно видеть из рис. 6.

## Заключение

Предложенная модификация теории пограничного слоя у свободной заряженной поверхности осциллирующей капли вязкой жидкости в асимптотике малой вязкости хорошо аппроксимирует точное решение. Существенно более простая математическая модель задачи

расчета осцилляций заряженной капли в рамках развитой теории пограничного слоя по сравнению с точной математической моделью позволяет надеяться на значительное снижение трудоемкости расчета нелинейных осцилляций такой капли.

Работа выполнена при поддержке гранта президента ФР № МК-2209-2006-1, гранта РФФИ № 06-01-00066-а и гранта губернатора Ярославской области.

## Список литературы

- [1] Longuet-Higgins M.S. // Royal. Soc. London. Trans. Ser. A. 1953. Vol. 245. N 903. P. 535–581.
- [2] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 8. С. 19–28.
- [3] Жаров А.Н., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 1. С. 22–31.
- [4] Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 19–28.
- [5] Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 12. С. 33–46.
- [6] Chandrasekhar S. // Proc. London Math. Soc. 1959. Vol. 3. N 9. P. 141–149.
- [7] Григорьев А.И., Лазаряц А.Э. // ЖВММФ. 1992. Т. 32. № 6. С. 929–938.
- [8] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 733 с.
- [9] Левич В.Г. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [10] Диткин В.А., Прудников А.П. Операционное исчисление. М.: Высш. шк., 1975. 408 с.
- [11] Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 9. С. 20–27.
- [12] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Муничев М.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 7. С. 1–8.
- [13] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 9. С. 41–45.