

01;05

Закономерности проникновения магнитного потока в высокотемпературные сверхпроводники в фазе вихревой жидкости в режиме с обострением

© И.Б. Краснюк, Р.М. Таранец

Физико-технический институт им. А.А. Галкина НАН Украины
83114 Донецк, Украина
Институт прикладной математики и механики НАН Украины
83114 Донецк, Украина
e-mail: kras@kinetic.ac.donetsk.ua

(Поступило в Редакцию 21 марта 2007 г. В окончательной редакции 10 октября 2007 г.)

Рассматривается задача о проникновении магнитного поля в высокотемпературный сверхпроводник второго рода, который находится в фазе слабозапиннигованной вихревой жидкости во внешнем магнитном поле. Магнитное поле на границе сверхпроводника возрастает с течением времени в режиме с обострением. Получено модельное уравнение гидродинамического типа, которое описывает распределение магнитной индукции в фазе вихревой жидкости при термомагнитном движении магнитного потока. Получены аналитические формулы для глубины и скорости проникновения магнитного поля в сверхпроводник в зависимости от значений параметров задачи: от показателя степени n в граничном режиме, характеризующего скорость проникновения вихрей в сверхпроводящее полупространство, и параметра, который характеризует влияние случайных сил пиннинга и тепловых флуктуаций на распределение магнитного потока.

PACS: 74.25.Na, 75.47.-m

Введение

Тепловые флуктуации влияют на свойства запиннигованной вихревой нити и вихревой решетки: например, они приводят к сглаживанию случайного потенциала пиннинга и, следовательно, уменьшению критической плотности тока. Взаимодействие тепловых флуктуаций, порождающих смещение вихревых нитей, со случайной силой пиннинга происходит по разным сценариям для сверхпроводников, которые находятся в различных фазах. Известно, что случайные возмущения вихревой решетки под действием силы пиннинга приводят к ее трансформации в фазу вихревого стекла [1, с. 1139]. Случайные возмущения вихревых нитей, порождаемые пиннингом в фазе вихревой жидкости, можно отобразить в виде следующих диаграмм [1]: *вихревая решетка* → *вихревое стекло* или *вихревая жидкость* → *вихревая жидкость*. Другими словами, случайные флуктуации могут деформировать вихревую решетку в вихревое стекло. В данном случае случайный пиннинг вихревой решетки изменяет состояние высокотемпературного сверхпроводника. С другой стороны, для вихревой жидкости случайные флуктуации, порождаемые случайным потенциалом пиннинга, приводят к изменению состояния сверхпроводника, т. е. запиннигованная жидкость не переходит в другую фазу.

Это означает, что отклик сверхпроводника на малые возмущения плотности транспортного тока ($j \rightarrow 0$) оказывается различным для фазы вихревого стекла и фазы вихревой жидкости. Фаза вихревого стекла характеризуется расходимостью барьера пиннинга $U(j)$, т. е. $U(j) \rightarrow \infty$ при $j \rightarrow 0$ [1,2]. Это свойство активационного

барьера сохраняется в присутствии тепловых флуктуаций. Таким образом, соответствующая вольт-амперная характеристика остается сильно нелинейной в фазе вихревого стекла при достаточно малых плотностях транспортного тока.

Для фазы вихревой жидкости присутствие случайного потенциала пиннинга приводит к существенному уменьшению линейного сопротивления $\rho_{\text{lin}} = dE/dj|_{j \rightarrow 0}$ по сравнению с его значением в режиме вязкого течения потока, где $\rho_{\text{lin}} > 0$. Пиннинг является следствием неоднородности вихревой структуры. Несмотря на то что тепловые флуктуации приводят к сглаживанию кора вихрей, вихревая решетка сохраняет свойство неоднородности, и взаимодействие такой периодической неоднородной структуры со случайным потенциалом пиннинга сохраняет пиннинг при всех температурах $T > T_m(B)$, где T_m — температура плавления вихревой решетки (рис. 1).

Рассмотрим отклик сверхпроводника на выбор возмущений, которые воздействуют на вихревую структуру, представляющую ту или иную фазу. В качестве внешнего воздействия можно использовать возрастающее по амплитуде с течением времени магнитное поле, которое приложено к границе высокотемпературного сверхпроводника

$$b(0, t) = b_0(1 + t/t_{sc})^m, \quad m > 0, \quad (1)$$

где $b = B/H_{c2}$, H_{c2} — второе критическое поле, t_{sc} — время выхода распределения индукции магнитного поля на скейлинговое поведение, m — параметр, характеризующий скорость возрастания амплитуды магнитного поля. При постоянном магнитном поле на границе ($m = 0$)

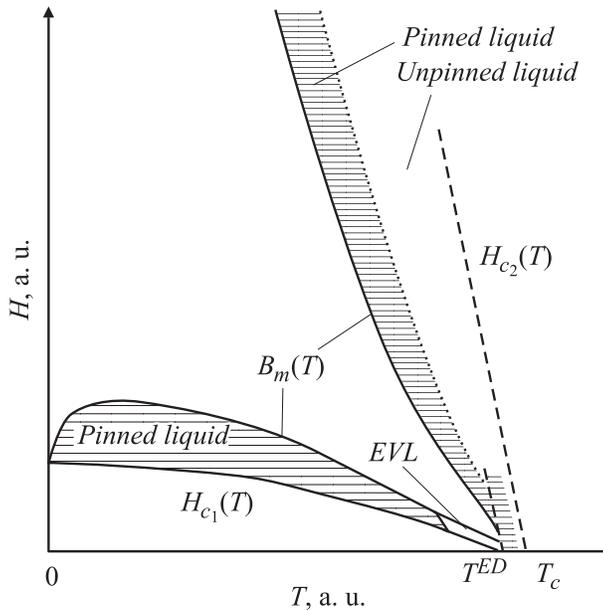


Рис. 1. Зависимость напряженности магнитного поля H от температуры T . Здесь $B_m(T)$ — линия плавления вихревой решетки; $H_{c1}(T)$ — первое критическое поле; H_{c2} — второе критическое поле; T_c — критическая температура; T^{ED} — температура фазового перехода: *entangled liquid* → *disentangled liquid* (фаза „запутанных“ вихревых нитей → фаза „распутанных“ нитей в фазе вихревой жидкости [1]). Вблизи линии плавления выполняется неравенство $T \ll U_0 < \infty$, где U_0 — барьер пластической деформации. Вблизи критической температуры $U_0 \ll T$ в фазе „запутанных“ вихревых нитей (*entangled vortex liquid*), или *EVL*-фазе (см. рис. 23 из [1]).

аналогичная краевая задача рассматривалась в работе [1] для фазы вихревого стекла и в [3] — для фазы вихревой жидкости с большой вязкостью. При $m = 1$ аналогичная задача в режиме классического термоактивационного крипа магнитного потока исследована в [4].

Обобщить результаты работы [3] с граничным условием $b(0, t) = b_0$, $t > 0$ на модельную задачу с граничным условием вида (1) не удастся, поскольку соответствующее модельное уравнение для распределения индукции магнитного поля является существенно нелинейным (см. далее уравнение (23)). Если рассмотреть более быструю накачку вихрей в сверхпроводник (по сравнению с условием (1)), которая обеспечивается граничным условием в режиме с обострением [5]

$$b(0, t) = b_0(1 - t/t_{sc})^m, \quad m < 0, \quad (2)$$

то соответствующая физическая задача для фазы вихревой жидкости поддается математическому исследованию. В частности, можно получить профиль амплитуды магнитного поля в сверхпроводящем полупространстве $x > 0$, удовлетворяющий граничному условию (2), и далее — точные аналитические формулы для глубины и скорости проникновения магнитного потока в сверхпроводник.

При исследовании влияния случайного потенциала пиннинга на динамические свойства неупорядоченного состояния вихревой жидкости используем общий динамический метод исследования [1, с. 1248], который позволяет определить аналитическую форму сопротивления $\rho(b)$ в двух случаях:

1) в режиме термоактивационного движения магнитного потока при $j < j_{cr}$, где j_{cr} — критическая плотность тока;

2) в режиме вязкого течения жидкости при $j > j_{cr}$.

При таком подходе изучают поведение вихревой решетки при высоких плотностях тока j и вычисляют возмущение δv относительно скорости v основного потока (без пиннинга), которое порождается случайным потенциалом пиннинга. Аналитические результаты статьи [1] позволяют определить форму сопротивления для фазы вихревой жидкости в режиме термоактивационного движения потока (см. ниже (6), (7)). В общем случае сопротивление $\rho(b)$ зависит от тепловых флуктуаций и амплитуды пиннинга.

Далее, исходя из формы вольт-амперной характеристики $E = \rho(b)j$ при $j \ll j_{cr}$ (см. рис. 27 из [1]) и уравнений Максвелла получаем модельное уравнение гидродинамического типа (уравнение (23)). Это уравнение описывает распределение индукции магнитного поля в режиме с обострением. Режим с обострением типа краевого условия (2), или сверхбыстрый импульсный подвод внешнего магнитного поля, рассматривался в статье [6]. В частности импульсный подвод внешнего магнитного поля приводит к возникновению так называемых термомагнитных дендритных структур [7,8].

Основным результатом данной работы является определение эффективной координаты $x_{eff}(t, A, T)$ и эффективной скорости $v_{eff}(t, A, T)$ проникновения магнитного поля в сверхпроводник (см. соотношения (37) и (38)). Здесь параметр $A = A(f_{pin}^2, n, T)$ зависит от тепловых флуктуаций T , случайной силы пиннинга f_{pin} и плотности дефектов $n \sim 10^5$. Основная тенденция эволюции амплитуды магнитного поля состоит в том, что с увеличением силы пиннинга (см. соотношение (9)) глубина и скорость проникновения магнитного потока уменьшаются. С увеличением тепловых флуктуаций глубина и скорость проникновения магнитного поля увеличиваются по законам, определяемым соотношениями (37) и (38). С увеличением тепловых флуктуаций случайный потенциал пиннинга сглаживается по координате, что приводит к уменьшению усредненной силы пиннинга. Это в свою очередь приводит к увеличению глубины и скорости проникновения магнитного потока при повышении температуры. В результате имеет место следующее соотношение для глубины проникновения магнитного потока: $x_{eff}(\theta) \propto 1 - \theta^{-1}$, где $\theta = T/T_m$ и $T > T_m$. Здесь $T_m(B)$ — кривая плавления вихревой решетки, B — индукция магнитного поля.

Постановка задачи

Рассмотрим высокотемпературный сверхпроводник второго рода, который занимает полупространство $x \geq 0$, в параллельной геометрии $B \parallel e_z$, $E, j \parallel e_y$ и $v \parallel e_x$, где e — единичный орт, направленный вдоль соответствующей оси; E — электрическое поле; j — плотность транспортного тока; v — скорость движения вихрей.

Пусть сверхпроводник находится в фазе вихревой жидкости. Тогда возможно существование двух диссипативных режимов:

1) режима вязкого течения потока при $T > T_p$, когда жидкость незапиннигована;

2) режима термоактивационного движения магнитного потока при $T_m < T < T_p$, когда вихревая жидкость является запиннигованной [2]. Здесь T_p — температура депиннинга [1].

Если пиннинг отсутствует, то вихревая решетка и вихревая жидкость движутся под действием приложенного тока, что приводит к линейному сопротивлению

$$\rho_{\text{flow}}(B) \approx \rho_n B / H_{c2}, \quad (3)$$

где ρ_n — удельное сопротивление в нормальном состоянии.

Рассмотрим движение вихревой структуры под действием силы Лоренца с учетом случайного потенциала пиннинга [2]

$$U_{\text{pin}} = \sum_i U(r_{\perp}) p(r_{\perp} - \tilde{r}_{\perp i})(z, t). \quad (4)$$

Здесь z — координата вихревой нити в направлении оси Oc . В дальнейшем эту координату будем считать либо параметром, либо усредненной по некоторому характерному масштабу z_h .

Потенциал U_{pin} будем характеризовать как малое возмущение, а потенциал $U(r_{\perp})$ выберем δ — нормированным так, что:

$$\langle U(r_{\perp}) U(r'_{\perp}) \rangle = v (2\pi)^3 \delta(r_{\perp} - r'_{\perp}), \quad (5)$$

где знак $\langle \cdot \rangle$ определяет усреднение по всем случайным траекториям, $\delta(\cdot)$ — функция Дирака. Вектор r_{\perp} расположен в $(a-b)$ -плоскости сверхпроводника. Жидкость является изотропной в каждой из таких плоскостей, т.е. $r_{\perp} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Положим $r = x$, так как направление силы пиннинга в $(a-b)$ -плоскости не играет роли.

Для так называемого δT_c -пиннинга параметра связи v в соотношении (5) определяется по формуле $v = f_{\text{pin}}^2 n \xi^2$, где ξ — корреляционная длина [1, с. 1145]. Тогда величина $p(r_{\perp})$ отражает взаимодействие вихря со случайно расположенными дефектами. При этом $p(r_{\perp}) \rightarrow 0$ при $r_{\perp} > \xi$, а в остальном функция p_{\perp} достаточно произвольна [2]. Суммирование в определении (4) выполняется по всем вихрям с индексом i .

Вектор \tilde{r}_i определяет координату i -го вихря по формуле $\tilde{r}_i = r_i + vt + U_{\text{pin},i}$. Здесь r_i — невозмущенная координата i -го вихря в вихревой структуре, которая движется (как целое) со скоростью v . Величина $U_{\text{pin},i}(z, t)$ определяет малое смещение i -го вихря под действием силы, которая порождается случайным потенциалом пиннинга. Скорость v определяется по формуле $v = v_0 + \delta v$, где $v_0 = j \times B / \eta c$ есть скорость незапиннигованной жидкости, которая порождается силой Лоренца; η — вязкость. Величина δv есть малое возмущение скорости v_0 , которое порождается случайной силой пиннинга. Пиннинг становится существенным, когда выполняется соотношение $\delta v \sim v$. Тогда условие $\delta v(v_{\text{cr}}) \sim v_{\text{cr}}$ определяет критическую плотность тока $j_{\text{cr}} = c \eta v_{\text{cr}} / B$, где v_{cr} — критическая скорость.

Слабый пиннинг определяется из требования $j_{\text{cr}} \ll j_0$, где j_0 — ток распаривания [1, с. 1250]. Характерное время пиннинга определяется по формуле $t_{\text{pin}} = r_p / v_{\text{cr}}$. Здесь типичная область действия случайной силы пиннинга определяется по формуле $r_p \approx (\xi^2 + v_{\text{ph}}^2)^{1/2}$. Критический ток и, следовательно пиннинг, уменьшается с увеличением температуры. Величина

$$u_{\text{ph}} = \langle u^2 \rangle_T^{1/2} \approx \xi (T/T_p)^{1/2}$$

представляет собой усредненное смещение вихря под действием тепловых флуктуаций. Температура депиннинга определяется по формуле

$$T_p \sim (\Phi_0^3 B m / M)^{1/2} / (2\pi k)^2,$$

где Φ_0 — квант магнитного потока; m и M — массы в $(a-b)$ -плоскостях и вдоль оси Oc соответственно; $k = \lambda / \xi$ — постоянная Гинзбурга–Ландау, где λ — лондоновская глубина проникновения.

Если выполняется неравенство $t_{\text{ph}} \ll t_{\text{pin}}$, где t_{ph} — характерное время изменения тепловых флуктуаций, то, усредняя тепловые флуктуации на временах порядка t_{pin} , приходим к однородной вихревой структуре. В этом случае пиннинг можно не учитывать. Такая ситуация типична для „обычной“ жидкости, когда все характерные времена имеют тот же порядок, что и t_{ph} . Для очень вязкой жидкости выполняется неравенство $t_{\text{pl}} \gg t_{\text{pin}}$ и, следовательно, усреднение на временах порядка t_{pin} не является полным. По этой причине вихревая структура после усреднения является неоднородной, т.е. является эффективно запиннигованной под действием случайной силы пиннинга [1]. Экспоненциально большие характерные времена t_{pl} пластической деформации для фазы вихревой жидкости обеспечиваются высокими энергиями барьера пластической деформации U_{pl} , который порождается термически активируемым движением вихревой структуры.

Типичная величина активационного барьера U_{pl} оценивается по формуле [3]

$$U_{\text{pl}} \sim \sqrt{m/M} \Phi_0^2 a / 8\pi^2 \lambda^2 \propto (T_c - T) / \sqrt{H} \quad (H \parallel c). \quad (6)$$

Формула (6) справедлива при $H \gg H_{c1}$, где H_{c1} — первое критическое поле. Здесь $\varepsilon = m/M$ — параметр

анизотропии; $m_x = m_y = m$, $m_z = M$, где M — масса; T_c — критическая температура перехода в режим вязкого течения вихрей. В полях $H > H_{c1}$ имеет место аналогичная формула, которая отличается от соотношения (6) лишь на нормирующий множитель. Энергия, определяемая соотношением (4), имеет тот же порядок, что и энергия вихревого сегмента длины $\sim a$. Следовательно, соотношение (6) можно использовать для любой вихревой деформации на специальном масштабе порядка a .

Уравнение движения запиннигованной вихревой жидкости можно записать в форме

$$\eta v = f_L + f_{\text{pin}}, \quad (7)$$

где f_L — сила Лоренца, а $f_{\text{pin}} = -\eta_{\text{pin}}(v)v$. Здесь коэффициент вязкости $\eta_{\text{pin}}(v)$ может быть выражен через определенную выше коррекцию скорости $\delta v/v$ таким образом, что $\eta_{\text{pin}} = \eta(\delta v/v)$. Тогда из (7), соотношения $E = (v/c)B$ и определения дифференциального сопротивления $\rho = E/j$ нетрудно получить следующую связь:

$$\rho = \frac{\rho_{\text{flow}}}{1 + \delta v/v} \quad (8)$$

(см. 6.35 из [1]).

Соотношение $E = \rho j$ для термоактивационного движения магнитного поля для фазы вихревой жидкости имеет место лишь при достаточно малых плотностях тока (см. вольт-амперную характеристику на рис. 27 из [1]). Отношение $\delta v/v$ для фазы очень вязкой вихревой жидкости при температурах, близких к температуре плавления $T_m(B)$ при $t_{\text{pl}} \gg t_{\text{th}}$, известно [1, (6.19)] и имеет вид

$$\frac{\delta v}{v} \Big|_{v \rightarrow 0} \simeq \frac{v \xi^4}{\eta a_0^2} \frac{K_0^6}{4\pi} \frac{\langle u^2(t_{\text{pl}}) \rangle_{\text{th}}}{T} t_{\text{pl}}, \quad (9)$$

где $K_0 = 2\pi/a_0$, a_0 — шаг вихревой решетки Абрикосова.

Предположим, $\langle u^2(t_{\text{pl}}) \rangle_{\text{th}} \sim a_0^2$, что позволяет записать формулу (9) в виде

$$\frac{\delta v}{v} \Big|_{v \rightarrow 0} \simeq \frac{v \xi^4}{\eta T} \frac{K_0^6}{4\pi} t_{\text{pl}}. \quad (10)$$

Далее заметим, что при термоактивационном движении магнитного потока имеет место формула [1]

$$\rho = \rho_0 e^{-U_{\text{pl}}/T} \propto \frac{1}{t_{\text{pl}}}. \quad (11)$$

Здесь множитель ρ_0 может быть оценен из (11), (9) и тех соображений, что переход от режима вязкого течения к термоактивационному движению магнитного потока имеет место, когда значение $\delta v/v$ в соотношении (8) становится порядка единицы.

Из (10) и (11) вытекает простейшая интерполяция сопротивления следующего вида:

$$\rho = \rho_{\text{flow}} \left[1 + \frac{v \xi^3}{\eta T} \frac{K_0^6}{4\pi} t_{\text{pl}} \right]^{-1} \quad \text{при } \delta v/v \rightarrow 0 \quad (12)$$

и

$$\rho = \frac{\rho_{\text{flow}}}{1 + Ae^{U_{\text{pl}}/T}} \quad (12')$$

при конечных возмущениях скорости (см. (6.31) из [1]).

В соотношении (12') параметр A отвечает за величину δT_c пиннинга (см. (2.31) из [1]) и определяется при слабом пиннинге по формуле

$$A = 4(2\pi)^6 \frac{\gamma \xi^4}{\Phi_0^2 T} \frac{\lambda}{a_0}, \quad (13)$$

а при сильном пиннинге — по формуле

$$A = \sqrt{2} G_i \left(\frac{j_{\text{cr}}(0)}{j_0(0) G_i} \right)^{3/2} \frac{B}{H_{c2}(T)}. \quad (13')$$

Здесь параметр Гинзбурга определяется по формуле: $G_i = (T_c/H_c^2(0)\epsilon\xi^3(0))^2/2$, где H_c — термодинамическое критическое поле. Параметр G_i представляет собой отношение энергии тепловых флуктуаций $k_B T_c$ при критической температуре T_c (где постоянная Больцмана $k_B = 1$ в энергетических единицах) к энергии конденсации $H_c^2(0)\epsilon\xi^3(0)$ в когерентном объеме радиуса $\xi(0)$. Здесь H_c — термодинамическое критическое поле; $\epsilon^2 < 1$ — параметр анизотропии высокотемпературного сверхпроводника второго рода.

Из (6) следует оценка

$$\frac{U_{\text{pl}}}{T} \ll \frac{T_c}{T} - 1 \quad \text{при } T \sim T_c. \quad (14)$$

В дальнейшем ограничимся ситуацией, когда выполняется оценка (14), которая не согласуется с неравенством $t_{\text{pl}} \ll t_{\text{pin}}$, характеризующим большую силу пиннинга для очень вязкой жидкости (см. Введение). Это нетрудно видеть из соотношения

$$t_{\text{pl}} = t_{\text{th}} e^{U_{\text{pl}}/T}, \quad (14')$$

которое показывает, что неравенство (14) выполняется для вихревой жидкости с малыми вязкостью и пиннингом. Действительно, вязкость определяется по формуле $\eta_{\text{pin}} = \eta(\delta v/v)$, где $\eta_{\text{pin}}(0) = 0$.

Если указанные выше условия выполняются, то вольт-амперная характеристика запиннигованной жидкости будет представлять собой два омических режима:

$$\rho(j \rightarrow 0) \simeq \rho_0 e^{-U_{\text{pl}}/T} \propto \frac{1}{t_{\text{pl}}} \quad \text{при } j < j_{\text{cr}} \quad (15)$$

и

$$\rho(j > j_{\text{cr}}) \simeq \rho_{\text{flow}}. \quad (16)$$

Соотношение (15) моделирует термоактивационное движение магнитного потока, а (16) — классическое вязкое движение магнитного потока, согласно формуле Бардина–Стефена.

Далее в соотношении (15) барьер пластической деформации можно записать в виде

$$U_{\text{pl}} \sim \epsilon \epsilon_0 a_0 \propto \frac{T_c - T}{\sqrt{H}}. \quad (16')$$

Здесь $\epsilon < 1$ — параметр анизотропии, а характерный энергетический масштаб ϵ_0 определяется по формуле $\epsilon_0 = (\Phi_0/4\pi\lambda)^2$.

Пиннинг является существенным при температуре $T < T_m$, поэтому естественно в соотношении (16') выполнить нормировку на вершину T_m . Температура плавления T_m определяется по формуле

$$T_m \approx 2c_L^2 U_{pl}. \quad (17)$$

Соотношение (17) показывает, что большой барьер, препятствующий пластическому вихревому движению в фазе вихревой жидкости, достигается вследствие малости числа Линдемманна c_L , т.е. при выполнении неравенства $U_{pl}(T_m) \gg T_m$. В дальнейшем ограничимся случаем, когда выполняется это неравенство. Тогда из (16) и (17) вытекает соотношение

$$\frac{U_{pl}}{T} \approx \frac{1}{2c_L^2} \frac{T_m}{T} \left(\frac{\theta^{-1} - 1}{\sqrt{b}} \right), \quad (18)$$

где $\theta = T/T_c$. Температура T_c определяется из соотношения $t_{pl}(T_c) \simeq t_{pin}(T_c)$, и при переходе через значение $T = T_c$ имеет место переход от фазы запиннигованной жидкости к фазе незапиннигованной жидкости (т.е. к режиму вязкого течения потока), когда выполняется соотношение $\rho(j \rightarrow 0) \simeq \rho_{flow}$.

Ограничимся исследованием равенства (18) при температуре $T \sim T_c$, что отвечает δT_c -пиннингу, который порождается случайным распределением Гинзбурга–Ландау $\alpha = \alpha(0) (1 - T/T_c)$ [1, с. 1141]. В результате соотношение (12) при слабом пиннинге в окрестности точки перехода $T \sim T_c$ можно представить в виде

$$\rho(b) = \rho_{flow}(b) [(1 - A) - \beta(\theta^{-1} - 1)b^{-1/2}], \quad (19)$$

где $\beta = \frac{A}{2c_L^2} \frac{T_m}{T}$. Соотношение (19) вытекает из (12') с помощью следующего приближения:

$$(1 + Ae^{U_{pl}/T})^{-1} \simeq (1 - Ae^{U_{pl}/T}) \simeq \left[1 - A \left(1 + \frac{U_{pl}}{T} \right) \right],$$

где U_{pl}/T определяется из равенства (18). Данное разложение имеет место при $0 < A \ll 1$ и $U_{pl}/T \ll 1$.

Рассмотрим теперь одномерную систему Максвелла

$$c^{-1} B_t = -E_x, \quad (20)$$

$$j = -c(4\pi)^{-1} B_x \quad (21)$$

и функциональное соотношение

$$E = \rho j. \quad (22)$$

Подставим значение E из (22) в уравнение (20) и воспользуемся уравнением (21). В результате приходим к уравнению

$$b_t = \kappa(\rho(b)b_x)_x, \quad (23)$$

где $\kappa = \rho_n t_h c^2 / (4\pi \lambda^2)$ — коэффициент диффузии магнитного потока; t_h — характерный временной масштаб изменения амплитуды магнитного поля. Модельное уравнение (23) в дальнейшем будет являться основным объектом математического исследования.

Определим граничное условие для решений уравнения (23). Для этого заметим, что в ряде экспериментов рассматривают отклик сверхпроводника на возмущение внешнего магнитного поля, которое является возрастающей функцией от времени. В частности, при исследовании крипа магнитного потока амплитуда магнитного поля возрастает линейно (или сублинейно) со временем [6]. Так называемые терромагнитные дендридные структуры возникают только при сверхбыстром подводе внешнего магнитного потока на границе сверхпроводника [7,8], что формально может отвечать следующему граничному условию в режиме с обострением [9,10]:

$$b(0, t) = b_0(t_0 - t)^n, \quad n < 0, \quad 0 < t < t_0, \quad (24)$$

где $b_0 = B_0/B_m$, $B_0 > B_{c1}$. В следующем разделе мы построим автомодельные решения задачи (23), (24).

Автомодельные распределения магнитного поля в режиме с обострением

Согласно фазовой диаграмме на рис. 1, ограничимся исследованием задачи при $H_{c1} < B < B_m$, что отвечает нижней ветви диаграммы. Выполним задачу $t \rightarrow kt$ и запишем уравнение (23) в виде

$$b_t = \rho(b)b_{xx} + \rho'(b)b_x^2. \quad (23')$$

Определим так называемые субрешение и суперрешение уравнения (23'). Тогда в силу соответствующих теорем сравнения [5] все остальные решения уравнения (23') будут находиться между субрешением и суперрешением. Введем следующие обозначения:

$$k_1^- = \rho(b^-), \quad k_2^- = \rho'(b^-), \quad b^- = B_{c1}/B_m, \quad (25)$$

$$k_1^+ = \rho(b^+), \quad k_2^+ = \rho'(b^+), \quad b^+ = B/B_m \simeq 1. \quad (26)$$

В силу определений (25) и (26) коэффициенты уравнения (23') удовлетворяют неравенствам

$$k_1^- \leq \rho(b) < k_1^+ \quad \text{и} \quad k_2 \leq \rho'(b) < k_2^+.$$

Пусть далее выполняется неравенство $b_{xx} \geq 0$ (см. рис. 1). Тогда из последних неравенств и теорем сравнения вытекает, что решение уравнения (23') лежит между минимальным и максимальным решениями соответствующих уравнений с постоянными коэффициентами.

Вначале определим субрешение из уравнения

$$b_t = k_1^- b_{xx} + k_2^- b_x^2. \quad (27)$$

Уравнение (27) удобно записать в виде

$$b_t = k_0 b_{xx} + k_0 A_0^{-1} b_x^2, \quad (28)$$

где $k_0 = k_1^-$ и $A_0 = k_2/k_1$.

Граничные условия можно записать в виде

$$b(0, t) = A_0 R_0 (t_0 - t)^n,$$

$$0 < t < t_0 \quad (b_0 = A_0 R_0), \quad n < 0. \quad (29)$$

Такая запись позволяет прямо применить к задаче (28), (29) математические результаты, которые изложены в [5, с. 166].

В самом деле, если отбросить в уравнении (28) член со старшей производной, то придем к вырожденной задаче

$$b_t^A = k_0 A_0 (b_x^A)^2 \quad (30)$$

с граничным условием

$$b^A(x, 0) = A_0 R_0 (t_0 - t)^n, \quad 0 < t < t_0 \quad (n < 0). \quad (31)$$

Краевая задача (30), (31) имеет автомодельное решение

$$b^A(x, t) = A_0 R_0 (t_0 - t)^n w_a(\xi),$$

$$\xi = \frac{x}{(k_0 R_0)^{1/2} (t_0 - t)^{(1+n)/2}}, \quad (32)$$

где функция $w_a(\xi) \geq 0$ удовлетворяет уравнению

$$(w_a')^2 - \frac{1+n}{2} w_a' \xi + n w_a = 0,$$

$$\xi > 0, \quad w_a(0) = 1, \quad (33)$$

и всюду, где она положительна, определяется неявным образом из равенства

$$\left[\sqrt{\left(\frac{1+n}{4}\right)^2 - n w_a \xi^{-2}} - \frac{1+n}{4} \right]^{(1+n)/2} \times \left[\sqrt{\left(\frac{1+n}{4}\right)^2 - n w_a \xi^{-2}} + \frac{1-n}{4} \right]^{(1-n)/2} = \frac{(-n)^{1/2}}{\xi}.$$

В остальных точках полагаем $w_a(\xi) = 0$.

График $w_a(\xi)$ решения краевой задачи (30), (31) представлен на рис. 2. Функция $w_a(\xi)$ является выпуклой вниз и, следовательно, $b_{\xi\xi} > 0$, что и позволяет сравнивать решения уравнения (23'), изменяя положительные значения коэффициентов при всегда положительных значениях соответствующих членов уравнения.

Свойства монотонно убывающей функции $w_a(\xi)$ зависят от параметра n .

а) Если $-1 < n < 0$, то $w_a(\xi) > 0$ при всех $\xi > 0$ и $w_a(\xi) = C(n) \xi^{2n/(1+n)} + \dots + \dots$ при $\xi \rightarrow \infty$, где

$$C(n) = -\frac{1+n}{2n} 2^{-2n/(1+n)} (-n)^{1/(1+n)}.$$

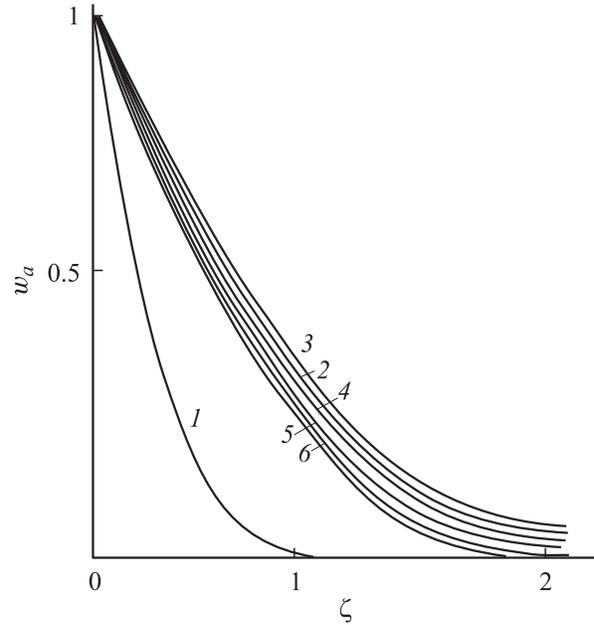


Рис. 2. Зависимость решения w_a краевой задачи от автомодельной переменной $\xi > 0$, вычисленного в моменты времени: 1 — $t_0 = 0.95$; 2 — 0.47 ; 3 — 0.9 ; 4 — $5 \cdot 10^{-2}$; 5 — $2.5 \cdot 10^{-2}$; 6 — $1.2 \cdot 10^{-2}$ [5]. Функция $w(\xi, t)$ определяется соотношением (36) и вычислена при следующих значениях параметров: $n = -1$; $k_0 = 1$; $A_0 = R_0 = 1$; $x_s = 2$. Здесь $w_a(\xi)$ — автомодельное представление решения при $t = t_0$, где t_0 — время обострения граничного режима.

б) В случае $n = -1$ решение имеет вид $w_a(\xi) = (1 - \xi/2)^2$ при $0 < \xi < 2$ и $w_a(\xi) = 0$ при $\xi \geq 2$.

в) При $n < -1$ функция $w_a(\xi)$ является финитной, т.е. $w_a(\xi) > 0$ при $0 \leq \xi \leq \xi_f$, где $\xi_f = 2(-n)^{n/2} \times (-1 - n)^{-(1+n)/2}$ и $w_a(\xi) = 0$ при всех $\xi \geq \xi_f$, причем

$$w_a(\xi) = -[(1+n)/2] \xi_f (\xi_f - \xi) + o(\xi_f - \xi) \text{ при } \xi \rightarrow \xi_f^-.$$

Во всех случаях

$$w_a'(0) = -(-n)^{1/2}, \quad w_a''(\xi) > 0$$

всюду, где $w_a > 0$, и

$$w_a''(\xi) \geq w_a''(0) = (1-n)/4 \text{ при } 0 < \xi < \xi_f.$$

Из свойств автомодельных решений и принципа максимума [5] следуют оценки

$$-A_0 R_0 t_0 \leq |b(x, t) - b^A(x, t)| \leq A_0 |w_a''(\xi)| \ln \left(\frac{t_0}{t_0 - t} \right) \quad (35)$$

на интервале $0 < \xi < \xi_f$. Здесь $b(x, t)$ является решением уравнения (28) со старшей производной $b_{xx}(x, t)$.

Для автомодельного представления решения

$$w(\xi, t) = (A_0 R_0)^{-1} (t_0 - t)^{-n} b \left(\xi (k_0 R_0)^{1/2} (t_0 - t)^{(1+n)/2} \right)$$

из неравенств (35) вытекает следующая оценка скорости сходимости к приближенному автомодельному решению:

$$|w(\cdot, t) - w_a(\cdot)| = O((t_0 - t)^{-n} |\ln(t_0 - t)|) \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow t_0$. (36)

Оценка (36) показывает, что при $t \rightarrow t_0$ действительно можно ограничиться автомодельным решением $w_a(\xi)$ уравнения без диффузии. Результат (36) формально вытекает из простой подстановки представления решения (31) в уравнение (28). После такой подстановки получим уравнение

$$-A_0 R_0 (t_0 - t)^{n-1} \left[n w_a(\xi) + \frac{1+n}{2} w_a'(\xi) \xi \right]$$

$$= A_0 R_0 (t_0 - t)^{n-1} (w_a'(\xi))^2 + A_0 (t_0 - t)^{-1} w_a''(\xi).$$

Нетрудно видеть (после умножения обеих частей уравнения на множитель $(t_0 - t)^{1-n}$), что это уравнение состоит из уравнения (33), определяющего автомодельное решение, и регулярного возмущения, порождаемого слагаемым $A_0^{-1} (t_0 - t)^{-n} w_a''(\xi)$. Очевидно, что если вторая производная $w_a''(\xi)$ ограничена, то при $t \rightarrow t_0$ этим слагаемым можно пренебречь, что, собственно, и отражают оценки (35) и (36).

При $n = -1$ на рис. 2 представлены результаты численного решения задачи (23), (24), которые показывают, что сходимость (36) имеет место при $t \rightarrow t_0$.

Из автомодельного представления переменной ξ (см. соотношение (32)) следует, что координата фронта магнитной волны (т.е. точка, в которой амплитуда магнитного поля обращается в нуль) определяется из равенства

$$x_{\text{eff}}^-(t) = \xi_{\text{eff}} (k_2^- b_0)^{1/2} (t_0 - t)^{(1+n)/2}. \quad (37)$$

Скорость проникновения магнитного потока в сверхпроводник определяется из равенства

$$v_{\text{eff}}(t) = -\frac{1+n}{2} \xi_{\text{eff}} (k_2^- b_0)^{1/2} (t_0 - t)^{(n-1)/2}, \quad (38)$$

где ξ_{eff} определяется из условия $b^A(\xi_{\text{eff}}) = 1/2$.

В силу определения сопротивления

$$\rho(b) = (1 - A)b - \beta(\theta^{-1} - 1)b^{1/2}$$

находим, что

$$\rho'(b) = 1 - A - \frac{\beta}{2} (\theta^{-1} - 1) b^{-1/2},$$

и, следовательно,

$$k_2^- = 1 - A - \frac{\beta}{2} (\theta^{-1} - 1) (b^-)^{-1/2}, \quad (39)$$

где $\beta = \frac{A}{2c_L^2} \frac{T_m}{T}$.

Из (38) следует, что магнитный поток проникает в сверхпроводник лишь при выполнении неравенства $1 + n < 0$. Таким образом, свойство решений а) для $w_a(\xi)$ не отвечает исследуемой нами ситуации. Это означает, что выполняются только свойства б) и с). Это соответствует локализации магнитного потока при всех $n \ll -1$. При $n = -1$ получаем автомодельное решение

$$b^A(x, t) = A_0 R_0 (t_0 - t)^{-1} \left(1 - \frac{x}{x_0} \right), \quad (40)$$

где $x_0 = (k_0 R_0)^{1/2}$. Решению (40) при $t \rightarrow t_0$ соответствует остановившаяся магнитная волна. Положение точки фронта волны $x_f(t) \equiv x_0$, где $x_0 = 2(k_2^{-1} b_0)^{1/2}$, не изменяется в течение всего времени обострения $0 < t < t_0$. Возмущения магнитного потока из области локализации $0 < x < x_0$ не проникают далее в сверхпроводник, несмотря на то что всюду в области локализации амплитуда магнитного поля неограниченно возрастает при $t \rightarrow t_0^-$.

Следует отметить, что рассматриваемое граничное условие является идеализацией реальной физической ситуации, отвечающей эксперименту. Выберем $b_0 = H_{c1}/B_m$ и заметим, что в силу нормировки $b = B/B_m$ на нижней ветви фазовой диаграммы (рис. 1) всегда $b < 1$. Тогда из граничного условия (24) вытекает неравенство $t < t_0^- + H_{c1}/B_m$, которое выполняется, если для экспериментального времени наблюдения (см. например, [6]) выполняется неравенство

$$t < t_{\text{exp}} < t_0^- + H_{c1}/B_m.$$

Далее из (39) и (40) вытекает, что глубина проникновения магнитного поля $x_{\text{eff}}(\cdot) \propto (1 - A)^{1/2}$, т.е. с увеличением силы пиннинга глубина проникновения магнитного поля убывает по корневому закону при $n = -1$. Аналогичным образом (37) и (39) следует, что с увеличением температуры имеет место приближенная зависимость

$$x_{\text{eff}}(T) \propto \left[1 - A - \frac{A}{2c_L^2} \frac{T_m}{T} \left(\frac{T_m}{T} - 1 \right) \right]^{1/2},$$

т.е. с увеличением температуры при $T < T_m$ глубина проникновения магнитного потока возрастает в режиме остановившейся магнитной волны.

Аналогичные выводы относительно глубины проникновения магнитного потока следуют из (38) при $1 + n < 0$. При $n = -1$ скорость проникновения магнитного поля в сверхпроводник равна нулю. При $n < -1$ эта скорость ведет себя так же, как и соответствующая глубина проникновения потока. Соответствующие графики представлены на рис. 3, 4.

Аналогичным образом, полагая $k_2^+ = \rho'(1)$, т.е. при

$$k_2^+ = 1 - A - \frac{\beta}{2} (\theta^{-1} - 1) (k_1^+ = \rho(1)),$$

мы получаем верхнюю оценку глубины и скорости проникновения магнитного потока в области $H_{c1} < B < B_m$.

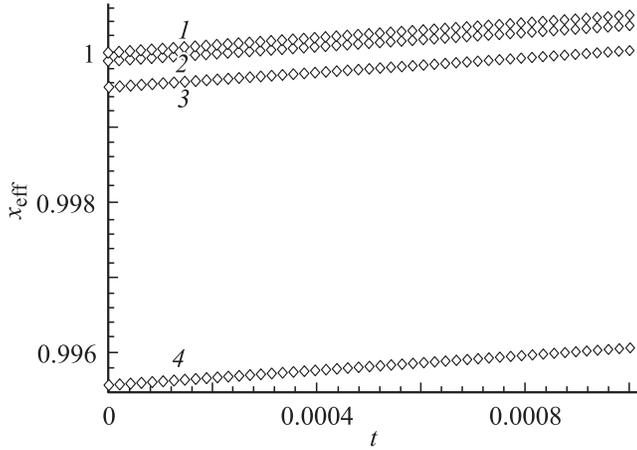


Рис. 3. Зависимость глубины проникновения магнитного потока x_{eff} от времени t . Здесь $t \rightarrow t/t_{\text{sc}}$, где $t_{\text{sc}} \sim 1$ — время выхода на скейлинговое поведение.

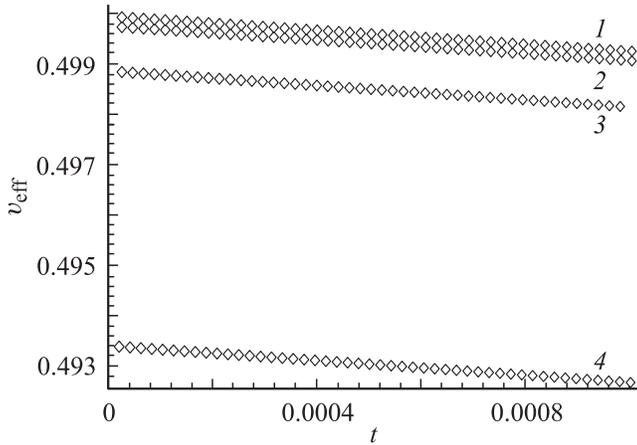


Рис. 4. Зависимость скорости проникновения магнитного потока v_{eff} от времени t , вычисленная при тех же значениях параметров, что и на рис. 3.

Реальные значения $x_{\text{eff}}(t)$ и $v_{\text{eff}}(t)$ лежат между этими двумя предельными значениями.

Проникновение магнитного потока при сильном пиннинге

Результаты предыдущего пункта получены в нулевом приближении по возмущениям скорости $\delta v/v \ll 1$ так, что для сопротивления $\rho(b, A)$ можно было использовать формулу (12). При этом постоянная A не зависела от индукции магнитного поля. Теперь рассмотрим ситуацию, когда пиннинг все еще мал, но не настолько, чтобы можно было использовать приближение (12), которое получено как коррекция скорости при малом пиннинге.

При достаточно сильном пиннинге используем приближение (12') для сопротивления $\rho(b, j_{\text{cr}}/j_0)$ при условии, что выполняется неравенство

$$\mu = \sqrt{2}\pi^2 G_i \left(\frac{j_{\text{cr}}(0)}{j_0(0)G_i} \right)^{3/2} \ll 1. \quad (41)$$

При характерном значении $G_i = 10^{-2}$ для высокотемпературных сверхпроводников из (41) вытекает неравенство

$$\frac{j_{\text{cr}}(0)}{j_0(0)} \ll 10^{-4/3}.$$

Для высокотемпературных сверхпроводников, таких как $\text{YBa}_2\text{Cu}_3\text{O}_{7-y}$, пиннинг обычно является слабым: $j_{\text{cr}}/j_0 \simeq 10^{-3} - 10^{-2}$. В то же время тепловые флуктуации являются большими: $G_i \simeq 10^{-2}$ (для обычных сверхпроводников $G_i \sim 10^{-7}$).

Итак, условие (41) выполняется, и следовательно, можно повторить процедуру разложения по малому параметру μ для выражения (12') с учетом малости барьера пластической деформации по сравнению с тепловыми флуктуациями при $T \sim T_c$, что в результате приводит к следующему соотношению:

$$\rho(b) = \rho_{\text{flow}} \left[1 - A \left(1 + \frac{1}{2c_L^2} \frac{T_m}{T} \left(\frac{\theta^{-1} - 1}{\sqrt{b}} \right) \right) \right]. \quad (42)$$

Здесь $A = \mu b$, где μ определяется из (41) при $T > T_m$.

Запишем равенство (42) в виде

$$\rho_\mu(b) = b - \mu b^2 - \mu q b^{3/2}, \quad (42')$$

$$q = 2^{-1} c_L^2 (T_m/T) (T_c/T - 1).$$

Тогда аналогично предыдущему получаем уравнение распределения индукции магнитного поля при сильном пиннинге:

$$b_t = (\rho(b) b_x), \quad (43)$$

где $\rho(b)$ определяется равенством (42').

Поскольку функция $\rho_0(b)$ является монотонной, то формула (42') имеет смысл при тех значениях $\mu > 0$, при которых функция $\rho_\mu(b)$ также монотонна. Условие монотонности функции из (42') можно записать в виде

$$\rho'_\mu(b) = 1 - 2\mu b - \frac{2\mu q}{2} b^{1/2} > 0. \quad (44)$$

Тогда уравнение (43) можно записать в виде

$$b_t = \rho'_\mu(b) b_x^2 + \rho_\mu(b) b_{xx}. \quad (45)$$

Исследование поведения решений уравнения (45) с граничным условием в режиме с обострением проводится по той же схеме, что и в предыдущем пункте. Введем обозначения:

$$\kappa_1^- = \rho'_\mu(b^-), \quad \kappa_2^- = \rho_\mu(b^-)$$

и

$$\kappa_1^+ = \rho'_\mu(1), \quad \kappa_2^+ = \rho_\mu(1),$$

тогда субрешение определяется из уравнения

$$b_t = \kappa_1^- b_x^2 + \kappa_2^- b_{xx}, \quad (46)$$

где

$$\kappa_1^- = 1 - 2\mu b^- - \frac{3\mu q}{2} (b^-)^{1/2},$$

$$\kappa_2^- = b^- - \mu (b^-)^2 - \mu q (b^-)^{3/2} \quad (b^- = H_{c1}/B_m).$$

Суперрешение определяется из уравнения

$$b_t = \kappa_1^+ b_x^2 + \kappa_2^+ b_{xx}, \quad (47)$$

где

$$\kappa_1^+ = 1 - 2\mu - \frac{3q}{2},$$

$$\kappa_2^+ = 1 - \mu - \mu q (b^+ \simeq 1).$$

Положим $k_0 = k_1^-$ и $k_2^- = k_0/A_0$, т.е. $A_0 = k_1^-/k_2^-$. Тогда уравнение (46) можно переписать в виде

$$b_t = k_0 b_x^2 + \frac{k_0}{A_0} b_{xx}. \quad (48)$$

Рассмотрим граничное условие (31). Тогда аналогично рассмотрению в предыдущем пункте можно показать, что при $t \rightarrow t_0$ диффузионным слагаемым в уравнении (46) можно пренебречь и ограничиться исследованием соответствующего уравнения Гамильтона–Якоби, решение которого при $n = -1$ имеет вид

$$b^A(x, t) = A_0 R_0 (t_0 - t)^{-1} w_a(\xi),$$

$$\xi = x / (k_0 R_0)^{1/2},$$

где

$$w_a(\xi) = (1 - \xi/2)^2, \quad 0 < \xi < 2 \quad (49)$$

и $w_a(\xi) = 0$ при $\xi \geq 2$. Общее решение $b(x, t)$ сходится к автомодельному решению $b^A(x, t)$ при $t \rightarrow t_0^-$. Из (49) следует, что глубина локализации магнитного потока равна

$$x_L = 2R_0^{1/2} \left(1 - 2\mu b^- - \frac{3\mu q}{2} (b^-)^{1/2}\right)^{1/2}$$

для остановившегося магнитного потока.

При $n \leq -1$ глубина проникновения магнитного потока равна

$$x_{\text{eff}}^-(t) = \xi_{\text{eff}} (\kappa_1^- R_0)^{1/2} (t_0 - \kappa t)^{(1+n)/2}, \quad (50)$$

а скорость движения фронта магнитной волны равна

$$v_{\text{eff}}^-(t) = -\xi_{\text{eff}} \kappa \left(\frac{1+n}{2}\right) (\kappa_1^- R_0)^{1/2} (t_0 - \kappa t)^{(n-1)/2}. \quad (51)$$

Формулы (50) и (51) определяют характеристики магнитной волны для субрешения.

Для суперрешения аналогом этих формул являются соотношения:

$$x_{\text{eff}}^+(t) = \xi_{\text{eff}} (\kappa_1^+ R_0)^{1/2} (t_0 - \kappa t)^{(1+n)/2}, \quad (52)$$

$$v_{\text{eff}}^+(t) = -\xi_{\text{eff}} \left(\frac{1+n}{2}\right) (\kappa_1^+)^{3/2} R_0^{1/2} (t_0 - \kappa t)^{(1-n)/2}. \quad (53)$$

Из (50)–(53) вытекает, что реальные координата и скорость магнитной волны принадлежат следующим интервалам:

$$v_{\text{eff}}^-(t) \leq v_{\text{eff}}(t) \leq v_{\text{eff}}^+(t) \quad \text{и} \quad x_{\text{eff}}(t) \leq x_{\text{eff}}(t) \leq x_{\text{eff}}^+(t)$$

при $H_{c1} < B < B_m$ (рис. 2).

Вернемся к рис. 3, 4, на которых приведены графики для глубины и скорости проникновения магнитного потока в высокотемпературный сверхпроводник в зависимости от значений параметра задачи j_{cr}/j_0 . Здесь j_{cr} есть критический ток депиннинга, который всегда ограничен по величине значениями тока распаривания $j_0 = cH_c/3\sqrt{6}\pi\lambda$. Тогда параметр j_{cr}/j_0 в силу формулы $j_{\text{cr}} = cF_{\text{pin}}/B$ есть мера величины силы пиннинга и является фундаментальным параметром в феноменологической теории сверхпроводников второго рода, который характеризует характер неоднородностей исследуемых сверхпроводящих систем.

Рис. 3 получен из формул (52) и (37) при значениях параметров $\kappa_1^+ = 1 - 2\mu$ ($q \sim 0$ при $T \sim T_c$), $R_0 = t_0 = 1$, $n = -2$ при $\mu = 10\sqrt{2}\pi^2(j_{\text{cr}}/j_0)^{3/2}$. Для кривой 3 параметр $j_{\text{cr}}/j_0 = 10^{-4}$, а для кривой 4 — $j_{\text{cr}}/j_0 = 10^{-3}$. Вычисления при значениях $j_{\text{cr}}/j_0 = 10^{-2}$ приводят к тому, что значения $x_{\text{eff}}(t)$ становятся отрицательными. Это означает, что интерполяционная формула (3) справедлива лишь при $j_{\text{cr}}/j_0 \geq 10^{-2}$, что отвечает эксперименту [1]. Кривые 3 и 4 интерпретируют простую тенденцию: с увеличением силы пиннинга глубина $x_{\text{eff}}(t)$ проникновения магнитного потока уменьшается. Кривые 1 и 2 вычислены при значениях $A = 10^{-4}$ и 10^{-3} соответственно. Следовательно, снова с увеличением силы пиннинга глубина проникновения $x_{\text{eff}}(t)$ магнитного поля уменьшается.

Аналогичные графики на рис. 4 вычислены при значениях $j_{\text{cr}}/j_0 = 10^{-3}$ для сильного пиннинга и значениях $A = 10^{-3}$ или 10^{-4} — для слабого пиннинга; имеет место та же тенденция к уменьшению скорости проникновения потока с увеличением силы пиннинга.

Графики на рис. 3, 4 представлены на начальной стадии проникновения магнитного потока. При $t \rightarrow t_0$, т.е. при выходе на скейлинговое поведение, указанные графики практически совпадают — с погрешностью, определяемой соотношением (36). Такое поведение объясняется тем, что очень большие магнитные поля подавляют разницу во влиянии слабого пиннинга и тепловых флуктуаций на движение основного магнитного потока. Зависимость от температуры при $T \sim T_c$, как вытекает из определения параметра $q = q(T, T_m, T_c)$, такова, что с увеличением тепловых флуктуаций глубина и скорость проникновения магнитного потока возрастают.

Список литературы

- [1] *Blatter G., Feigel'man M.V., Geshkenbein V.B.* et al. // *Rev. Mod. Phys.* 1994. Vol. 66. N 4. P. 1125.
- [2] *Beasley M.R., Labush R., Webb W.W.* // *Phys. Rev.* 1969. Vol. 181. P. 682.
- [3] *Vinokur V.M., Feigel'man M.V., Geshkenbein V.B.* et al. // *Phys. Rev. Lett.* 1990. Vol. 65. N 2 P. 259.
- [4] *Романовский В.Р.* // *ЖТФ.* 2000. Т. 70. Вып. 12. С. 47.
- [5] *Самарский А.А., Галактионов В.А., Курдюмов С.П., Михайлов А.П.* Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений: М.: Наука, 1987. 480 с.
- [6] *Gurevich A., Kupfer H.* // *Phys. Rev. B.* 1993. Vol. 48. N 9. P. 6477.
- [7] *Bolz H., Biehler B., Schmidt D.* et al. // *Europhys. Lett.* 2003. Vol. 64. N 4. P. 517.
- [8] *Barkov F.L., Shantsev D.V., Johansen T.H.* et al. // *Phys. Rev. B.* Vol. 67. P. 064 513–1.
- [9] *Краснюк И.Б., Медведев Ю.В.* // *Письма в ЖТФ.* 2005. Т. 31. Вып. 10. С. 40.
- [10] *Медведев Ю.В., Краснюк И.Б.* // *ФНТ.* 2005. Т. 31. № 12. С. 1366.