

# О визуализации вейвлетных спектров фрактального броуновского движения

© П.В. Москалев

Воронежский государственный аграрный университет им. К.Д. Глинки,  
394087 Воронеж, Россия  
e-mail: moskaleff@mail.ru

(Поступило в Редакцию 14 июня 2007 г. В окончательной редакции 10 января 2008 г.)

Рассматривается методика визуализации вейвлетных спектров на примере анализа двух реализаций фрактального броуновского движения. Демонстрируется эффект „агрегации максимумов“ на поверхности плотности энергии вейвлетного преобразования при использовании методики локально-масштабного нормирования. Для устранения нежелательного эффекта и повышения детализации изображения предлагается использовать адаптивную шкалу линий уровня на основе осредненного по времени распределения плотности энергии вейвлетного преобразования.

PACS: 05.40.Jc, 05.45.Tp

## Введение

В научно-исследовательской практике часто возникает задача анализа реализаций стохастических колебательных процессов, возникающих в различных физических системах. Однако непосредственный анализ этих реализаций в амплитудно-временной или частотной областях весьма индивидуален из-за многомасштабности и сложной эволюционной структуры, присущей стохастическим процессом. В связи с этим в подобных задачах все чаще находит применение непрерывное вейвлетное преобразование, позволяющее выявить многие характерные особенности реализаций стохастических процессов путем их отображения на частотно-временную плоскость [1].

Рассмотрим некоторые трудности, сопровождающие практическое применение непрерывного вейвлетного преобразования, на примере задачи анализа реализаций фрактального броуновского движения, полученных с помощью двух модификаций рекурсивного алгоритма случайных сложений.

## 1. Формулировка математической модели

Одной из наиболее известных моделей хаотической динамики является движение частицы под действием внешних соударений — модель броуновского движения. Для приращений одномерного броуновского движения  $X(t)$  выполняются свойства несмещенности, стационарности, независимости и отсутствия последействия, а его реализации — недифференцируемы:

$$|X'(t)| \propto \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\sqrt{|\Delta t|}}{|\Delta t|} = \infty.$$

Приращения реализаций броуновского движения статистически самоподобны, т. е. для любого  $r > 0$  верно, что:

$$X(t + \Delta t) \sim \frac{1}{\sqrt{r}} (X(t + r\Delta t) - X(t)),$$

где символ „ $\sim$ “ означает эквивалентность распределений, а оценка клеточной размерности дает нецелочисленную величину:

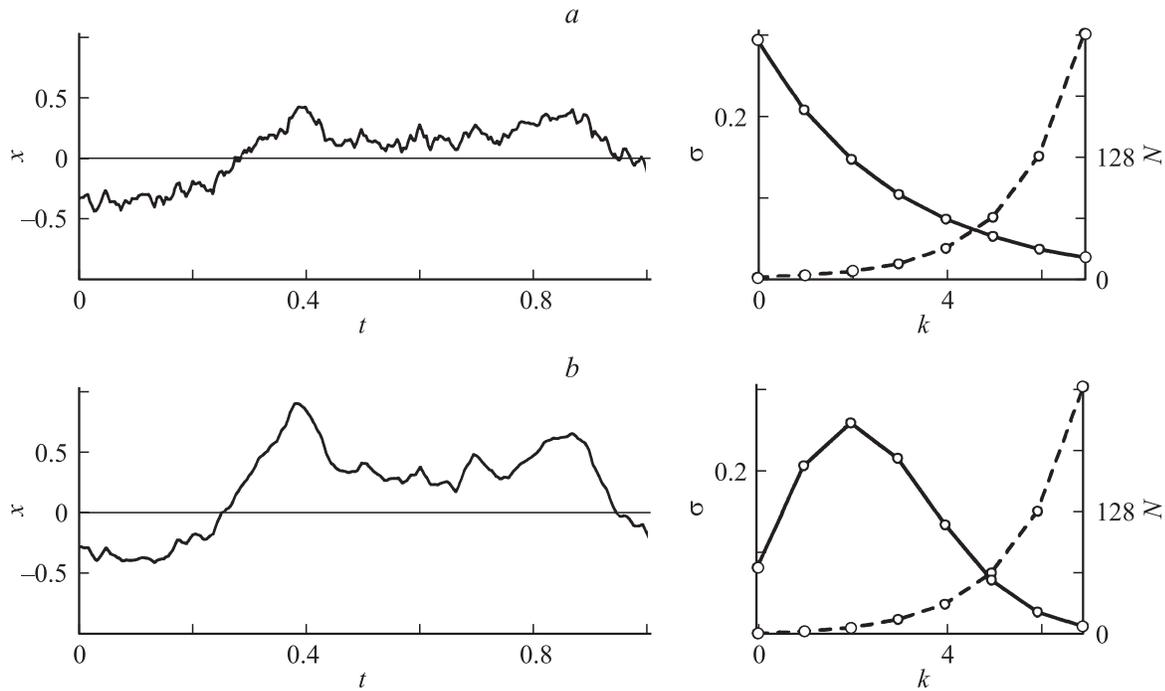
$$d_B = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln \Delta t^{-2+1/2}}{\ln \Delta t} = \frac{3}{2}.$$

В 1968 г. Б. Мандельбротом (B. Mandelbrot) [2] была предложена более общая модель случайного процесса, получившая название фрактального броуновского движения. Для приращений фрактального броуновского движения выполняются свойства несмещенности и стационарности, но не выполняется свойство независимости. При независимых приращениях  $\Delta X_i$  будет верно равенство  $D(\Delta X_1 \Delta X_2) = 0$ , в то время как для приращений фрактального броуновского движения

$$D(\Delta X_1 \Delta X_2) = \frac{\sigma^2}{2} ((t + \Delta t)^{2H} - t^{2H} - \Delta t^{2H}),$$

где  $H \in (0; 1)$  — показатель Хёрста, называемый также персистентностью, который можно трактовать как вероятность поддержания или отрицания установившейся тенденции в реализации стохастического процесса  $X(t)$ . Поведение дисперсии зависит от выражения в скобках, которое обращается в нуль при  $H = \frac{1}{2}$ . В этом случае приращения  $\Delta X_1$  и  $\Delta X_2$  становятся независимыми и фрактальное броуновское движение переходит в классическое. При  $H > \frac{1}{2}$  (или при  $H < \frac{1}{2}$ ) приращения  $\Delta X_1$  и  $\Delta X_2$  теряют независимость и вероятность поддержания (или отрицания) существующей тенденции начинает преобладать.

Недифференцируемость и статистическое самоподобие реализаций фрактального броуновского движения



**Рис. 1.** Реализации  $x(t)$  и функции распределения  $N_k$  и  $\sigma_k$  фрактального броуновского процесса:  $a$  — для стандартного алгоритма Фосса при  $H = \frac{1}{2}$  и  $r = \frac{1}{2}$ ;  $b$  — для обобщенного алгоритма Фосса при  $\lambda = \frac{5}{2}$  и  $r = \frac{1}{2}$ .

сохраняются, а оценка клеточной размерности этих реализаций по-прежнему дает нецелочисленную величину  $d_B \in (1; 2)$ , зависящую от показателя Хёрста:

$$d_B = - \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\ln \Delta t^{-2+H}}{\ln \Delta t} = 2 - H.$$

## 2. Численная реализация модели

Одной из наиболее эффективных процедур для построения реализаций фрактального броуновского движения  $x(t)$  является рекурсивный алгоритм последовательных случайных сложений, предложенный Р. Фоссом (R. Voss) в работе [3]. В одномерном варианте алгоритм Фосса определяет итерационную последовательность при  $i = 1, 2, \dots, N_k$ :

$$x(t_i) = x(t_{i-1}) + \Delta x(t_i),$$

где  $\Delta x(t_i)$  — несмещенные нормально распределенные приращения зависимой переменной с заданным средним квадратическим отклонением  $\sigma_k$ . Свойства формируемой реализации полностью определяются изменением числа точек определения  $N_k$  и среднего квадратического отклонения приращений  $\sigma_k$  по масштабным уровням  $k = 1, 2, \dots, n$ :

$$N_{k|r} = N_0 r^{-k}; \quad \sigma_{k|r,H} = \sigma_0 r^{kH}, \quad (1)$$

где  $r = \Delta t_k / \Delta t_{k-1} = \text{const}$  — коэффициент разбиения, определяемый как отношение расстояний между соседними точками по оси  $t$  на соседних масштабных уровнях.

Анализ зависимостей (1) показывает, что стандартный алгоритм Фосса определяет последовательности  $N_k$  и  $\sigma_k$  в виде геометрических прогрессий со знаменателями  $q_N = r^{-1}$  и  $q_\sigma = r^H$  соответственно. Начальное значение числа точек  $N_0$  обычно выбирается равным двум, а начальное среднее квадратическое отклонение  $\sigma_0$  определяется из условия

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k = 1 \Rightarrow \sigma_0 = 1 - r^H. \quad (2)$$

Заметим, что последовательность  $N_k$  — неубывающая и при переходе с  $(k-1)$ -го на  $k$ -й масштабный уровень значения зависимой переменной в дополнительных точках определяются путем линейной интерполяции по ближайшим известным точкам.

Пример реализации фрактального броуновского процесса  $x(t)$  с помощью стандартного алгоритма Фосса при параметрах  $r = \frac{1}{2}$  и  $H = \frac{1}{2}$  и графики соответствующих функций распределения  $N_{k|\frac{1}{2}}$  и  $\sigma_{k|\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$  приведены на рис. 1,  $a$ . Для показателя  $\sigma_{k|\frac{1}{2},\frac{1}{2}}$  значения функции распределения соединены сплошной линией, а для показателя  $N_{k|\frac{1}{2}}$  — штриховой линией.

Как было показано в одной из недавних работ, выполненной совместно с В.В. Шитовым [4], для ряда прикладных задач реальный характер распределения показателей  $N_k$  и  $\sigma_k$  может существенно отличаться от приведенного на рис. 1,  $a$ . В этих условиях естественным развитием алгоритма последовательных случайных сложений стало применение более общего вида функций

распределения числа точек и среднего квадратического отклонения. В качестве примера зададим функцию  $\sigma_k$  в виде распределения Пуассона с параметром  $\lambda > 0$ :

$$\sigma_{k|\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}. \quad (3)$$

Пример реализации фрактального броуновского процесса  $x(t)$  с помощью обобщенного алгоритма Фосса при  $\lambda = \frac{5}{2}$ ,  $r = \frac{1}{2}$  и графики соответствующих функций распределения  $N_{k|\frac{1}{2}}$  и  $\sigma_{k|\frac{5}{2}}$  приведены на рис. 1, *b*. Для показателя  $N_{k|\frac{1}{2}}$  значения функции распределения соединены сплошной, а для показателя  $\sigma_{k|\frac{5}{2}}$  — штриховой линией.

Сравнение реализаций стандартного  $x_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t)$  и обобщенного  $x_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}}(t)$  алгоритма Фосса показывает, что меньшие значения  $\sigma_{k|\frac{5}{2}}$  из (3) при  $k = 6, 7$  приводят к значительно меньшей „негладкости“ в реализации  $x_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}}(t)$ :

$$\langle |x_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}}(t_i) - x_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}}(t_{i+1})| \rangle \approx 0.0003$$

по сравнению с  $x_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t)$ :

$$\langle |x_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t_i) - x_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t_{i+1})| \rangle \approx 0.0008,$$

где  $\langle |x(t_i) - x(t_{i+1})| \rangle$  — среднее по реализации абсолютное приращение значения  $x(t_i)$  в соседних точках. Более того, смещение наибольшего значения  $\sigma_{k|\frac{5}{2}}$  в точку  $k = 2$  порождает больший размер максимальных отклонений в реализации  $x_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}}(t)$ :

$$\max x_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}}(t_i) - \min x_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}}(t_i) \approx 1.29$$

по сравнению с реализацией  $x_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t)$ :

$$\max x_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t_i) - \min x_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t_i) \approx 0.86,$$

где  $\max x(t_i)$  и  $\min x(t_i)$  — функции наибольшего и наименьшего по реализации значений  $x(t_i)$ .

### 3. Непрерывный вейвлетный анализ

Успех в исследовании стохастического процесса по его реализациям во многом зависит от качества методов, используемых для анализа структуры и визуализации этого процесса. Воспользуемся методикой непрерывного вейвлетного анализа [1] для исследования структуры фрактального броуновского процесса по представленным на рис. 1 реализациям  $x_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t)$  и  $x_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}}(t)$ .

Под непрерывным вейвлетным преобразованием далее понимается свертка исследуемой реализации  $x(t)$  с двухпараметрической вейвлет-функцией  $\psi_{\tau, \xi}(t)$

$$W(\tau, \xi) = \frac{1}{\sqrt{\xi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \psi^* \left( \frac{t-\tau}{\xi} \right) dt,$$

где  $\tau, \xi$  — коэффициенты сдвига  $\tau \in \mathbf{R}$  и масштабирования  $\xi \in \mathbf{R}^+$  базовой вейвлет-функции Гаусса второго

порядка  $\psi(t) = Ce^{-it}e^{-t^2/2}$ ; „\*“ — операция комплексного сопряжения;  $C$  — коэффициент, нормируемый по второй производной вейвлет-функции  $\|\psi''(t)\|^2 = 1$ .

Выполним непрерывное вейвлетное преобразование для указанных реализаций фрактальных броуновских кривых  $x_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t)$  и  $x_{\frac{1}{2}, \frac{5}{2}}(t)$ . На рис. 2 показана частотно-временная проекция плотности энергии вейвлетного преобразования  $w = \text{Re}^2W + \text{Im}^2W$ . Линии уровня имеют равномерное распределение в пределах размаха значений  $w$ . Безразмерная частота  $f_\xi$  обратно пропорциональна коэффициенту масштабирования  $\xi$  и прямо пропорциональна преобладающей частоте спектра Фурье выбранной вейвлет-функции  $f_\psi$ , а также частоте дискретизации  $f_t$  броуновской кривой  $f_\xi = f_\psi f_t / \xi$ .

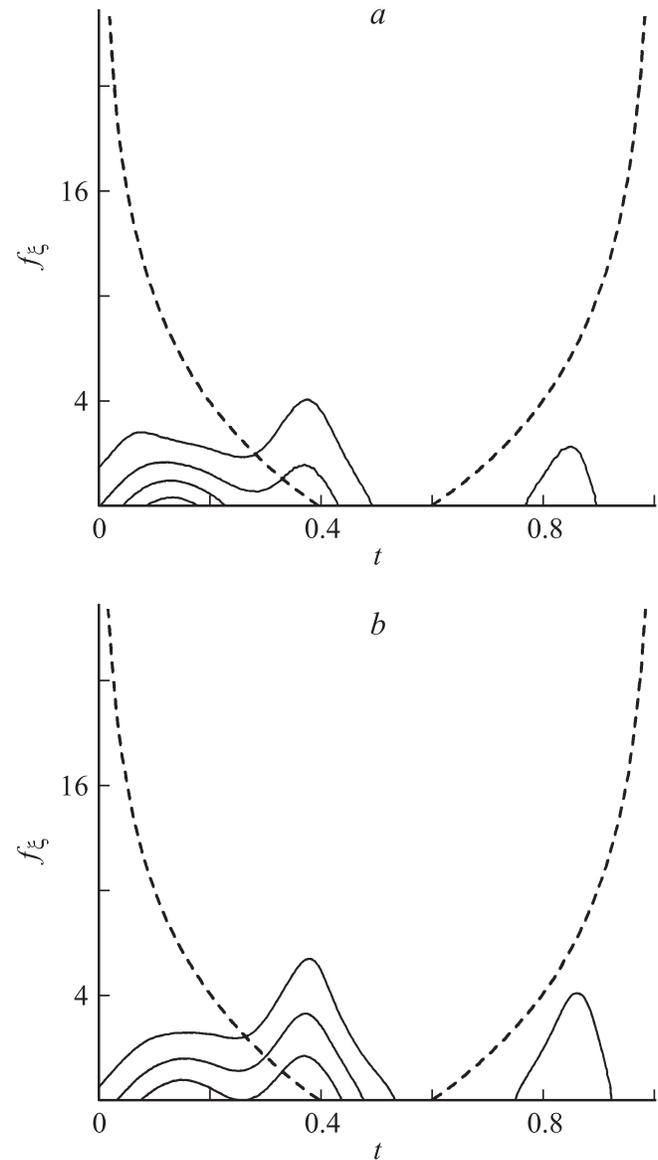


Рис. 2. Частотно-временная проекция линий уровня плотности энергии вейвлетного преобразования  $w(t, f_\xi)$  для реализаций стандартного (а) и обобщенного (б) алгоритма Фосса.

Мелкомасштабные флуктуации и другие искажения формы поверхности  $w(t, f_\xi)$ , заметные у границ временной оси в области наиболее низких частот, связаны с влиянием краевых эффектов при выходе транслируемых вейвлет-функций за границы реализации  $x(t)$ . Размеры области влияния зависят от выбора базовой вейвлет-функции и текущего значения коэффициента масштабирования. Для семейства вейвлет-функций Гаусса область влияния краевых эффектов [1], показанная на рис. 2 в виде U-образной штриховой линии, определяется соотношением  $\Delta t_\psi(\xi) = \sqrt{2}\xi$ .

Анализ полученного изображения показывает, что смещение максимума среднего квадратического отклонения в область более высоких частот на проекции  $w(t, f_\xi)$  прослеживается незначительно. Более того, из-за быстрого убывания амплитуды коэффициентов преобразования на рис. 2 структура вейвлет-спектра в области средних и высоких частот не поддается визуальному анализу. Для преодоления указанного недостатка А. Арнеодо (A. Arneodo) и др. в работе [5] был предложен метод локально-масштабной нормировки, позволяющий значительно повысить „контрастность“ проекции вейвлет-спектра. Метод основан на использовании индивидуального масштаба для каждого значения  $\xi = \text{const}$  при проецировании распределения коэффициентов вейвлетного преобразования. Это равносильно линейному отображению множества  $w(t, f_\xi) \mapsto v(t, f_\xi) \in [0; 1]$ :

$$v_{f_\xi}(t) = \frac{w_{f_\xi}(t) - \min w_{f_\xi}(t)}{\max w_{f_\xi}(t) - \min w_{f_\xi}(t)}, \quad (4)$$

где  $\max w_{f_\xi}(t)$  и  $\min w_{f_\xi}(t)$  — наибольшее и наименьшее по  $t$  значения плотности энергии вейвлетного преобразования при фиксированной частоте  $f_\xi = \text{const}$ .

Пример локально-масштабного нормирования в соответствии с (4) для распределений плотности энергии вейвлетного преобразования реализаций  $x_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t)$  и  $x_{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}(t)$  приведен на рис. 3. Хорошо заметно, что на поверхности  $v(t, f_\xi)$ , показанной на рис. 3, а, в интервале  $f_\xi \in (3; 10)$  доминирует глобальный максимум, расположенный вдоль вертикальной линии  $t \approx 0.4$ , с несколько меньшим по амплитуде максимумом, локализованным в окрестности точки  $(t; f_\xi) \approx (0.85; 5)$ . На горизонтали  $f_\xi \approx 16$  начинается формирование множества максимумов „второго поколения“ со смещением глобального максимума в область влияния краевых эффектов на линию  $t \approx 0$ .

На поверхности  $v(t, f_\xi)$ , показанной на рис. 3, б, в целом наблюдается аналогичная картина, но доминирование глобальных максимумов более выражено. Так, скажем, глобальный максимум первого поколения при  $t \approx 0.4$  прослеживается на интервале  $f_\xi \in (3; 24)$ , а максимум в окрестности точки  $(t; f_\xi) \approx (0.85; 5)$  доминирует вплоть до максимума второго поколения, расположенного в окрестности точки  $(t; f_\xi) \approx (0.9; 24)$ .

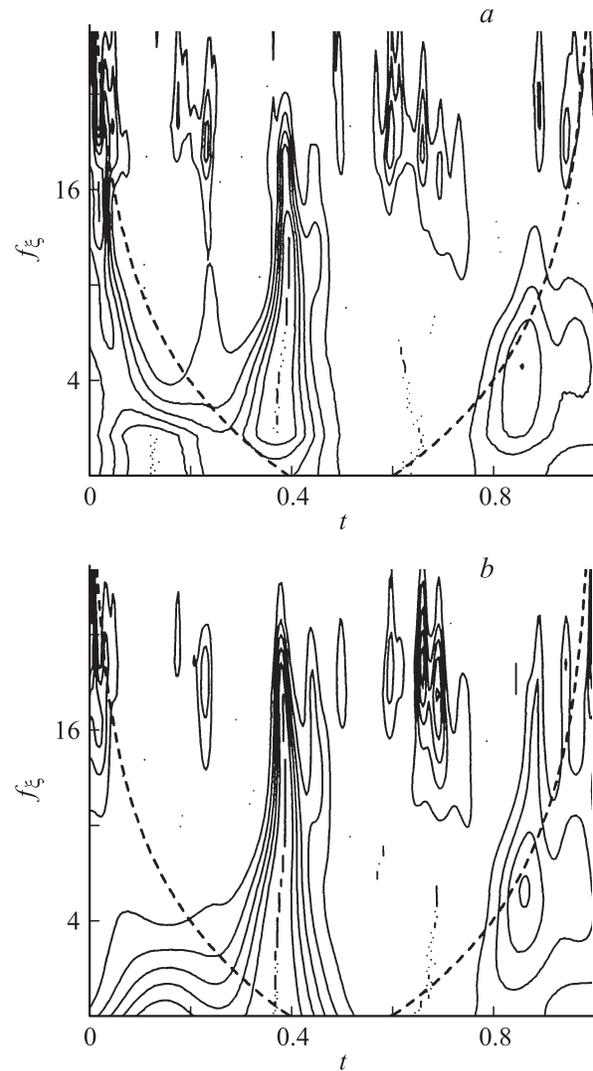


Рис. 3. Частотно-временная проекция линий уровня нормированной плотности энергии вейвлетного преобразования  $v(t, f_\xi)$  для реализаций стандартного (а) и обобщенного (б) алгоритма Фосса.

Следует отметить, что отображение (4) должно достаточно сильно исказить распределение плотности энергии вейвлетного преобразования  $w(t, f_\xi)$ . С учетом стационарности фрактального броуновского движения  $X(t)$  эффекты искажения локально-нормированной поверхности  $v(t, f_\xi)$  должны сохраняться и на распределении, осредненном в направлении временной оси  $\langle v \rangle(f_\xi)$ , которое показано на рис. 4 сплошной линией. Для удобства сравнения штриховой линией на рис. 4 показано осредненное по  $t$  распределение плотности энергии, глобально-нормированное по всему диапазону значений  $\langle v \rangle(f_\xi)$ .

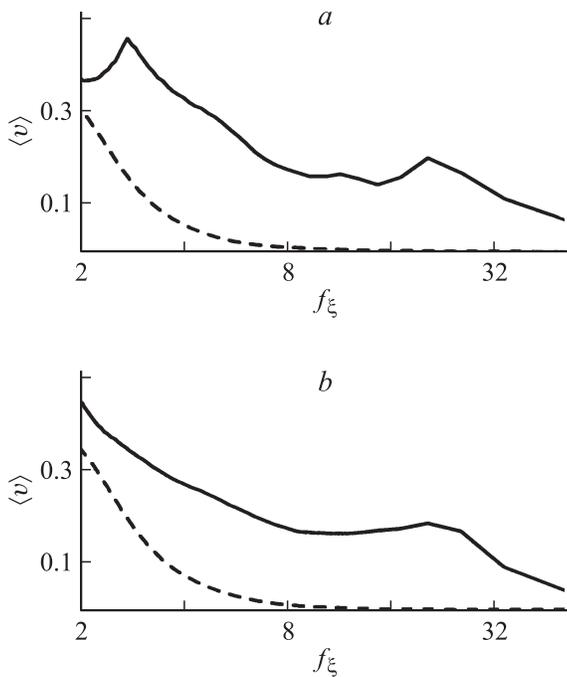
Проанализировав полученные результаты, следует признать, что метод локально-масштабного нормирования [5] весьма существенно искажает распределение плотности энергии вейвлетного преобразования и не

может быть признан удовлетворительным для исследования стохастических структур, возникающих в прикладных задачах математического моделирования. Например, на осредненном, нормированном по (4), распределении плотности энергии  $\langle v \rangle(f_\xi)$  на рис. 4, *a* помимо общего изменения координаты точек присутствует один глобальный максимум с абсциссой  $f_\xi \approx 2.7$  и два локальных с абсциссами  $f_\xi \approx 11.5$  и  $20.5$ . Аналогично на осредненном, локально-нормированном распределении  $\langle v \rangle(f_\xi)$  на рис. 4, *b* выделяется локальный максимум с абсциссой  $f_\xi \approx 20.5$ .

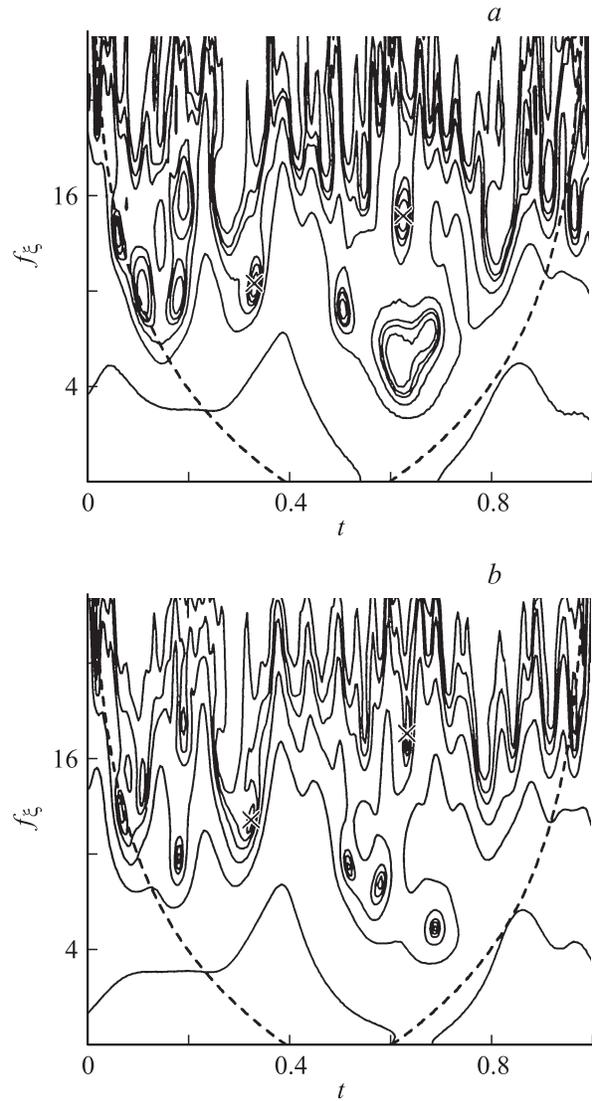
Для получения более адекватного представления о распределении плотности энергии вейвлетного преобразования в частотно-временной плоскости  $w(t, f_\xi)$  построим адаптивную шкалу, основанную на оценке расстояния между соседними линиями уровня вдоль глобально-нормированной кривой осредненного по оси  $t$  распределения  $\langle v \rangle(f_\xi)$ .

На рис. 5 показана частотно-временная проекция плотности энергии вейвлетного преобразования  $w(t, f_\xi)$  с адаптивной шкалой линий уровня в пределах размаха значений  $\langle v \rangle$ .

Анализ проекций, представленных на рис. 5, показывает, что смещение наибольшего значения  $\sigma_{k|f_\xi}$  в точку  $k = 2$  на распределении максимумов поверхности  $w(t, f_\xi)$  при  $f_\xi < 6$  сказывается незначительно. Однако уже при  $f_\xi > 8$  проявляется тенденция к смещению локальных максимумов в область более высоких частот, которая усиливается с ростом  $f_\xi$ . В качестве примера сравним окрестности точек  $(t, f_\xi)$ , отмечен-



**Рис. 4.** Осредненное распределение плотности энергии  $\langle v \rangle(f_\xi)$  с глобальной (сплошная линия) и локально-масштабной (штриховая линия) нормировкой для реализаций стандартного (*a*) и обобщенного (*b*) алгоритма Фосса.



**Рис. 5.** Адаптивная частотно-временная проекция линий уровня плотности энергии вейвлетного преобразования  $w(t, f_\xi)$  для реализаций стандартного (*a*) и обобщенного (*b*) алгоритма Фосса.

ных на рис. 5 символом „×“:  $(0.33; 8.5) \leftrightarrow (0.33; 10.2)$  и  $(0.63; 13.8) \leftrightarrow (0.63; 19)$ . Как видно, указанные пары точек соответствуют одним и тем же локальным максимумам и отличаются друг от друга только по ординате.

### Заключение

Как видно из приведенного исследования, методы, применяемые для визуализации результатов анализа стохастических процессов, способны оказывать весьма существенное влияние на последующие выводы. Так, при локально-масштабном нормировании выявлен весьма существенный эффект „агрегации максимумов“, когда быстро падающий по амплитуде, но доминирующий на данной частоте максимум визуально сливается с

более мелкими, порождая совершенно иную картину в распределении локальных максимумов на поверхности  $w(t, f_\xi)$ . Сопоставление рис. 2, 3 и 5 показывает, что применение шкалы линий уровня, основанной на осредненном распределении  $\langle v \rangle(f_\xi)$ , позволяет достичь существенно большей детализации в области высоких частот по сравнению с локально-масштабным нормированием при сохранении неизменным глобального распределения плотности энергии вейвлетного преобразования.

## Список литературы

- [1] *Короновский А.А., Храмов А.Е.* Непрерывный вейвлетный анализ и его приложения. М.: Физматлит, 2003. 176 с.
- [2] *Mandelbrot B.B., Van Ness J.W.* // SIAM Rev. 1968. Vol. 10. N 4. P. 422–437.
- [3] *Voss R.F.* Fundamental Algorithms in Computer Graphics. Berlin: Springer–Verlag, 1985. P. 805.
- [4] *Шутов В.В., Москалев П.В.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 2. С. 1–5.
- [5] *Arneodo A., Grasseau G., Holschneider M.* // Phys. Rev. Lett. 1988. Vol. 61. P. 2281–2284.