

# Влияние периодических изменений формы сверхпроводящего тела на его динамику в неконтактном магнитном подвесе

© С.И. Кузнецов, А.О. Мальханов, Ю.М. Урман

Нижегородский государственный педагогический университет,  
603950 Нижний Новгород, Россия  
e-mail: urman37@mail.ru

(Поступило в Редакцию 12 декабря 2006 г. В окончательной редакции 8 февраля 2008 г.)

Изучается влияние периодических изменений формы однородного сверхпроводящего тела на его динамику в осесимметричном магнитном поле, созданным постоянными магнитами, при действии силы тяжести и сил инерции, направленных вдоль оси подвеса. Форма тела изменяется по гармоническому закону от вытянутого эллипсоида к сплюснутому. Получены зависимости сил и моментов, действующих на тело, от его положения в подвесе и формы. Показано, что периодическое изменение формы является причиной возбуждения колебательных движений и может привести к выходу тела из области устойчивости. Вычисления выполнены в квазистационарном приближении.

PACS: 74.70.-b, 84.71.Ba

## Введение

При осуществлении неконтактного подвеса сила тяжести компенсируется силой, действующей со стороны подвеса на тело. При этом кроме компенсации силы тяжести необходимо, чтобы состояние равновесия было устойчивым, т.е. возникающая при смещении от состояния равновесия сила была возвращающей. Устойчивость обычно имеет место в некоторой окрестности состояния равновесия — области устойчивости. В любой точке этой области на тело действует сила, возвращающая его в положение равновесия. На практике для обеспечения надежного вывешивания эту область стараются сделать как можно большей. В случае криогенного и диамагнитного подвесов область устойчивости, как правило, мала. В случае сферического тела она определяется только его положением относительно источников поля и их силой [1].

Если форма отличается от сферической, то на тело действуют моменты [2,3], заставляющие его принимать некоторую предпочтительную ориентацию в поле подвеса. В работе [4] описан эксперимент по подвеске различных тел, являющихся слабыми диамагнетиками (пластик, дерево, вода, живая лягушка) в сильном магнитном поле. Левитирующие диамагнетики совершали колебательные и вращательные движения вблизи точки энергетического минимума. Одной из причин возникновения таких движений является зависимость сил и моментов от формы тела, его ориентации и положения относительно источников поля.

В приборах, использующих неконтактный подвес, скорость вращения вывешенного тела может достигать сотен тысяч оборотов в минуту [5], при этом действие центробежной силы приводит к деформации тела, и могут возникать колебания формы тела. В работе [4] высказывается предположение применительно к диамагнитному подвесу, что периодическое изменение формы вывешиваемого тела может стать причиной его рас-

качиваний (параметрические колебания) и выхода из области устойчивости. Это явление может повлиять на работу прибора, использующего неконтактный подвес, и поэтому нуждается в изучении.

В настоящей работе не учитывается влияние наведенных токов в поверхностных слоях сверхпроводящего тела и действие дополнительных пондеромоторных сил на проводящее тело с током, которое двигается или меняет форму в магнитном поле. Такое пренебрежение основано на том, что магнитное поле в рассматриваемой постановке задачи полагается квазистационарным и глубина проникновения магнитного поля в сверхпроводник  $\delta$  много меньше размеров тела. Скорость механических перемещений тела полагается много меньшей скорости полей, поэтому считается, что происходит мгновенное установление.

Целью настоящей работы является теоретическое изучение причин возникновения неустойчивости на примере сверхпроводника, который можно считать идеальным диамагнетиком. Для этого исследуются зависимости сил и моментов от ориентации и положения тела. Знание этих величин позволяет получить уравнения движения, исследуя которые можно изучить динамику тела в подвесе. Проведенные в данной статье исследования могут быть применены к изучению устойчивости неконтактного вывешивания тела в магнитных полях, в частности устойчивости вывешивания в магнитном поле живых организмов. Также представляет интерес применение полученных здесь результатов к технологии выращивания кристаллов, неконтактно вывешенных в магнитном поле, для оценки устойчивости их положения.

## 1. Силовая функция квазисферического тела

В неконтактном подвесе сверхпроводника силы диссипации можно свести до весьма незначительного уровня, поэтому силы и моменты, действующие на вывешиваемое тело, могут быть рассмотрены в приближении идеального сверхпроводника.

ваемое тело, имеют консервативную природу и могут быть получены из силовой функции. Используя аппарат неприводимых тензоров [5], силовую функцию можно разложить на части, каждая из которых соответствует взаимодействию определенной гармонике формы с полем подвеса.

Рассмотрим несферичное сверхпроводящее тело в осесимметричном магнитном поле (рис. 1). Будем считать, что форма тела мало отличается от сферы, и центр масс тела находится на оси симметрии подвеса. Как было показано в работе [5], силовую функцию взаимодействия магнетика, по форме близкого к сфере, с магнитным полем в квазистационарном приближении можно представить в виде

$$W = W_0(\mathbf{r}) + W_\varepsilon(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}), \quad (1.1)$$

где  $W_0(\mathbf{r}) = W_0(z)$  — силовая функция сферического тела, в рассматриваемом случае она зависит только от положения тела на оси  $z$  [1];  $W_\varepsilon(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) = W_\varepsilon(z, \beta)$  — вклад, обусловленный несферичностью тела. Этот член имеет вид

$$W_\varepsilon(\mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_k W_k = (\varepsilon_k Q_k^*), \quad (1.2)$$

где  $\varepsilon_k$  — неприводимый тензор формы тела — малая величина,  $Q_k^*$  — силовой тензор — величина, определяемая положением и силой источников поля;  $\mathbf{r}$  — радиус-вектор, задающий положение центра масс,  $\boldsymbol{\theta}$  — вектор конечного поворота тела. Скобки в формуле (1.2) означают скалярное произведение тензоров. Квазистационарность позволяет пренебречь токами, наведенными при движении и изменении формы тела в магнитном поле.

Гармоники формы представляют собой коэффициенты разложения уравнения поверхности тела по сферическим функциям

$$R(\theta', \varphi') = R_0 \left[ 1 + \sum_{k=1}^k \sum_{s=-k}^k \sqrt{\frac{4\pi}{2k+1}} \varepsilon'_{ks} Y_{ks}^*(\theta', \varphi') \right], \quad (1.3)$$

где  $R_0$  — радиус „средней“ сферы, штрих означает, что  $\varepsilon'_k$  вычисляются в системе координат, связанной с телом. Поскольку коэффициенты  $\varepsilon'_k$  являются неприводимыми тензорами, то их значения в системе координат, связанной с источниками, можно получить действием матрицы конечного вращения  $D_{ps}^k$  [5,6]

$$\varepsilon_{kp} = \sum_{s=-k}^k D_{ps}^k(\alpha, \beta, \gamma) \varepsilon'_{ks}, \quad (1.4)$$

$\alpha, \beta, \gamma$  — углы Эйлера, задающие ориентацию системы координат, связанной с телом относительно системы координат, связанной с источниками.

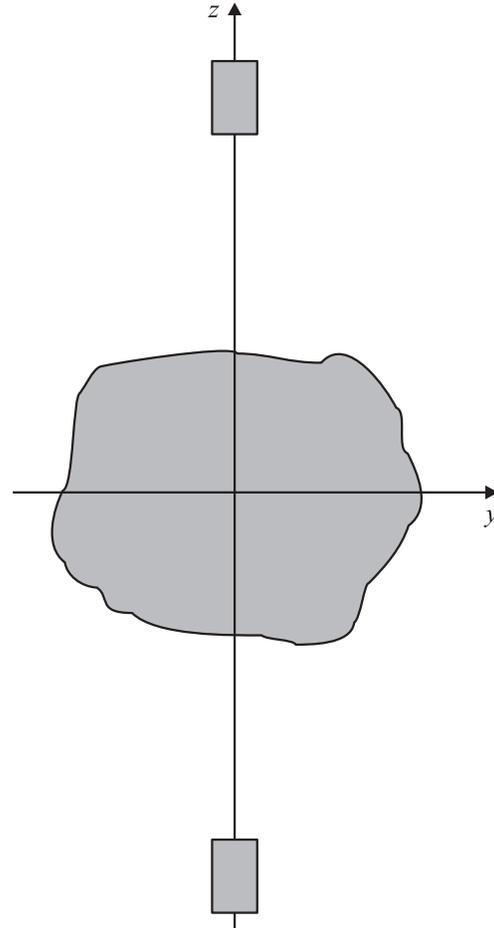


Рис. 1.

Рассмотрим силовой тензор  $Q_k^*$ . Его компоненты  $Q_{kp}^*$  имеют вид

$$Q_{kp}^* = R^3 \int_{S_0} f Y_{kp}^*(\mathbf{e}_r) d\Omega, \quad (1.5)$$

где  $f$  — плотность поверхностных сил,  $\mathbf{e}_r$  — единичный вектор направления.

Если считать форму поверхности тела мало отличающейся от сферы и интересоваться только порядком по несферичности, то в качестве  $f$  можно взять плотность сил  $f_0$  на поверхности „средней“ сферы радиуса  $R_0$  [2]

$$Q_{kp}^* = R_0^3 \int_{S_0} f_0 Y_{kp}^*(\mathbf{e}_r) d\Omega, \quad (1.6)$$

где интеграл берется по поверхности „средней“ сферы.

Плотность сил на поверхности сверхпроводящего тела определяется формулой [7]

$$f = -\frac{\mu_0}{2} H_S^2, \quad (1.7)$$

где  $H_S$  — поле на поверхности тела, оно не должно превосходить критическое.

Таким образом, для определения  $Q_{kp}$  необходимо найти поле на поверхности „средней“ сферы радиуса  $R_0$ . Для этого достаточно решить граничную задачу для шара в заданном внешнем поле  $\mathbf{H}_0$  с граничным условием  $(\mathbf{H} \cdot \mathbf{n}) = 0$ , где  $\mathbf{H}$  есть сумма „первичного“ поля  $\mathbf{H}_0$  и „вторичного“ поля, обязанного своим происхождением присутствию тела во внешнем поле  $\mathbf{H}_0$ . Задача определения поля на поверхности сферы в случае подвеса, образованного системой постоянных магнитов, решена в [1]. Поле  $\mathbf{H}$  определяется скалярным потенциалом, который выражается через коэффициенты разложения первичного поля источников по сферическим функциям

$$\begin{aligned} \varphi^i &= \varphi_0 + \varphi'_i \\ &= \sum_{lm} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \frac{2l+1}{l+1+l\mu} a_{lm} r^l Y_{lm}(\theta, \varphi), \end{aligned} \quad (1.8)$$

где  $a_{lm}$  — коэффициенты разложения первичного поля (поля, создаваемого источниками в отсутствие тела) по сферическим функциям [1],  $r, \theta, \varphi$  — сферические координаты точки пространства, в которой вычисляется поле.

При  $\mu = 0$ , взяв от потенциала градиент и вычислив плотность  $f_0$ , подставим ее в интеграл (1.5). Тогда после вычисления интеграла получим [2]

$$Q_{kp}^* = -\frac{1}{4} \sum_{l,l',m} \Delta(l, l', k) a_{lm} a_{l'm+p}^* \begin{bmatrix} l & k & l' \\ m & p & m+p \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

где  $\begin{bmatrix} l & k & l' \\ m & p & m+p \end{bmatrix}$  — коэффициенты Клебша–Гордана [6], а

$$\begin{aligned} \Delta(l, l', k) &= \frac{(2l+1)[l(l'+1) + l'(l'+1) - k(k+1)]}{(l+1)(l'+1)} \\ &\times \begin{bmatrix} l & k & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} R^{l+l'}. \end{aligned}$$

Выражение для силы получается действием оператора  $\nabla$  на силовую функцию (1.1) после подстановки  $\varepsilon_{kp}$  и  $Q_{kp}$

$$\mathbf{F} = \nabla W, \quad (1.10)$$

а момент сил получается действием на (1.1) оператора вращения

$$\mathbf{L} = [\mathbf{r} \times \nabla] = \mathbf{e}_\theta [(-1/\sin \theta)(\partial/\partial \varphi)] + \mathbf{e}_\varphi \partial/\partial \theta,$$

где  $\mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_\varphi$  — орты сферической системы координат,

$$\mathbf{M} = \mathbf{L}W. \quad (1.11)$$

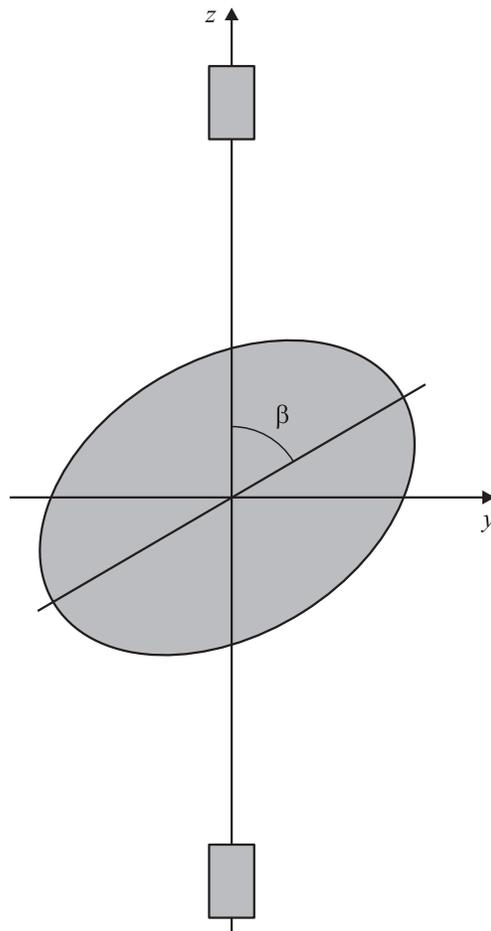


Рис. 2.

## 2. Состояния равновесия и устойчивость

Рассмотрим однородное сверхпроводящее тело, вращенное в магнитном поле. Будем считать, что оно создается двумя магнитными полюсами [1,8]. Тело находится на оси симметрии поля. Практический интерес представляет вычисление силовой функции для первых гармоник формы тела [2]. Ограничимся рассмотрением симметричного эллипсоидального тела (рис. 2), форма которого определяется неприводимым тензором второго ранга  $\varepsilon_2$ . Поскольку рассматривается эллипсоид вращения, то  $\varepsilon_2$  в системе координат, связанной с телом, имеет только одну ненулевую компоненту  $\varepsilon_0$ .

Рассмотрим теперь силовый тензор. Поскольку поле имеет аксиальную симметрию, и тело находится на оси симметрии поля, силовый тензор  $\theta_2$  имеет только одну ненулевую компоненту

$$Q_{20} = -\frac{1}{4} \sum_{l,l'} \Delta(l, l', 2) a_{l0} a_{l'0}^* \begin{bmatrix} l & 2 & l' \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.1)$$

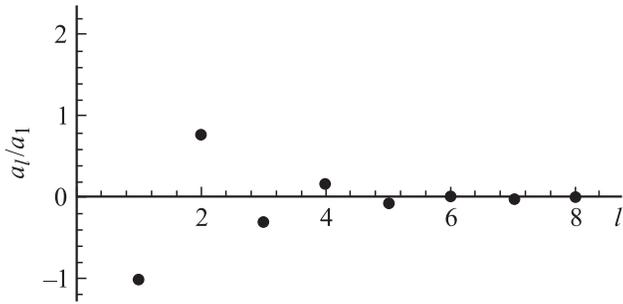


Рис. 3.

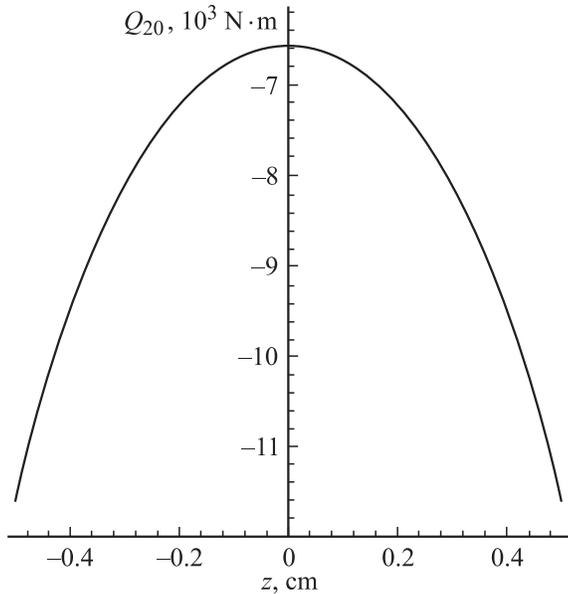


Рис. 4.

При сделанных предположениях выражение для коэффициентов разложения первичного поля  $a_{l0}$  имеет вид [1]

$$\begin{aligned} a_{l0} &= \sum_{i=1}^2 \frac{q_i}{b_i^{l+1}} \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} P_l(\cos \theta_i) \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \left( \frac{q}{(\sqrt{(d-z')^2})^{l+1}} + (-1)^l \frac{q}{(\sqrt{(d+z')^2})^{l+1}} \right) \\ &= \sqrt{\frac{4\pi}{2l+1}} \left( \frac{q}{(d-z')^{l+1}} + (-1)^l \frac{q}{(d+z')^{l+1}} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где  $d$  — половина расстояния между магнитными полюсами подвеса,  $q$  — величина заряда магнитного полюса.

В рассматриваемом случае они убывают с ростом индекса  $l$ . На рис. 3 отмечены величины коэффициентов  $a_{l0}$  при различных индексах  $l$ . Из рисунка видно, что при вычислении  $Q_2$  можно ограничиться шестью членами.

Тогда  $Q_{20}$  примет вид

$$\begin{aligned} Q_{20} &= \frac{1}{4} a_1^2 R^2 - \frac{15}{4} a_1 a_3 R^4 - \frac{5}{21} a_2^2 R^4 - \frac{4}{3} a_2 a_4 R^6 \\ &\quad - \frac{3}{8} a_3^2 R^6 - \frac{225}{154} a_3 a_5 R^8 - \frac{34}{77} a_4^2 R^8 \\ &\quad - \frac{20}{13} a_4 a_6 R^{10} - \frac{25}{52} a_5^2 R^{10} - \frac{39}{77} a_6^2 R^{12}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Зависимость  $Q_{20}$  от координаты  $z$  при фиксированном  $R$  представлена на рис. 4.

Из (1.2) следует, что вклад в силовую функцию, обусловленный эллипсоидальной несферичностью, имеет вид

$$W_2 = \varepsilon_{20} Q_{20} P_2(\cos \beta), \quad (2.4)$$

где  $\beta$  — угол между осью симметрии подвеса и большой полуосью эллипсоида.

Воспользуемся формулой (1.11) для вычисления момента сил, действующего на эллипсоидальное тело в осесимметричном поле. В рассматриваемом частном случае оператор вращения имеет вид  $\hat{L} = \frac{\partial}{\partial \beta}$ , а момент сил направлен перпендикулярно плоскости, образованной осью симметрии подвеса и большой осью

$$M = -3\varepsilon_{20} Q_{20} \sin \beta \cos \beta. \quad (2.5)$$

На рис. 5 представлены зависимости силовой функции  $W_2$  и момента  $M$  от ориентации оси тела относительно оси подвеса, откуда видно, что у тела имеются два положения равновесия: одно устойчивое ( $\beta = \pi/2$ ), второе — неустойчивое ( $\beta = 0$ ). Поскольку  $Q_{20}$  зависит также от  $z$ , то момент, действующий на тело, зависит от его положения на оси подвеса.

Теперь рассмотрим силы, действующие на тело, и определим положение равновесия. При действии силы

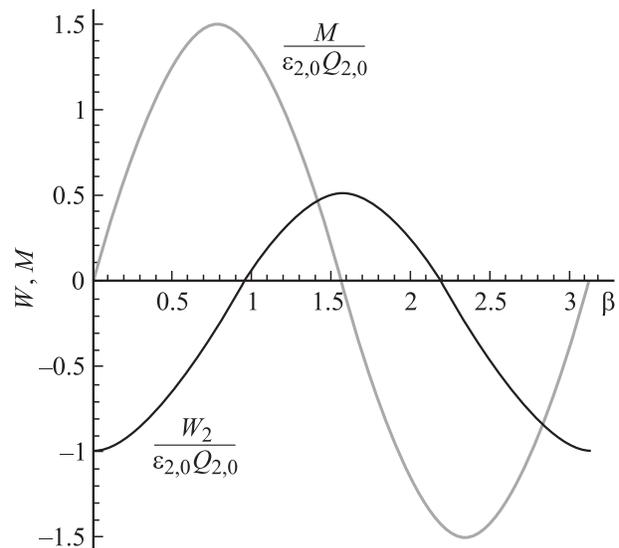


Рис. 5.

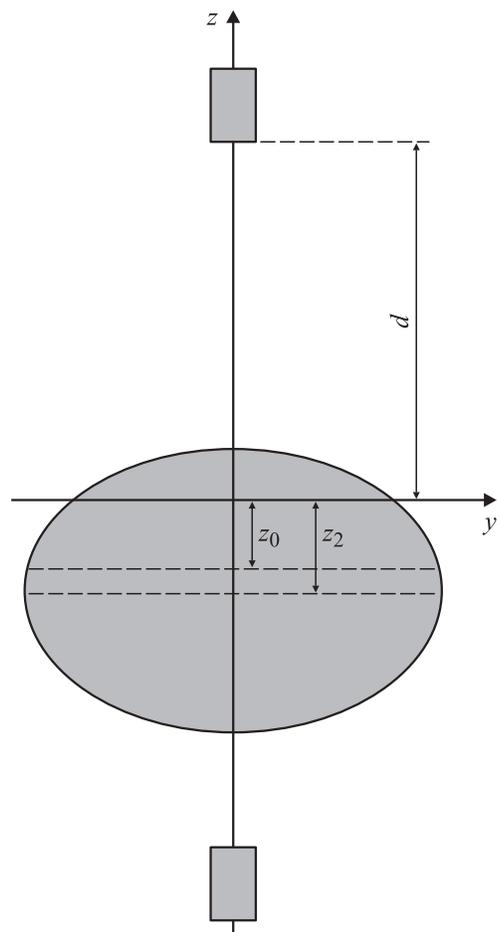


Рис. 6.

тяжести или сил инерции, направленных по оси поля, тело провиснет. Состояние равновесия определяется равенством силы тяжести (инерции) и силы, действующей на тело со стороны магнитного поля. В рассмотренном случае есть только составляющая магнитной силы, параллельная оси  $z$ , она определяется производной от силовой функции по  $z$

$$F_z = \frac{dW(z)}{dz}. \quad (2.6)$$

Если учитывать только  $W_0$ , т.е. рассматривать сферическое тело, то состояние равновесия определяется из условия

$$mg = \frac{dW_0(z)}{dz}. \quad (2.7)$$

Зависимость силового тензора  $Q$  от координаты тела  $z$  и, следовательно зависимость второй гармоники силовой функции, приводит к возникновению дополнительной магнитной силы, обусловленной несферичностью тела. Состояние равновесия  $z_2$  с учетом несферичности опре-

деляется из условия

$$mg = \frac{dW_0(z)}{dz} + \frac{dW_2(z)}{dz}, \quad (2.8)$$

т.е. эллипсоидальное тело при  $\pi/4 < \beta < 3\pi/4$  провисает сильнее сферического (рис. 6), а при  $\beta < \pi/4$  и  $\beta > 3\pi/4$  — слабей. Причем при увеличении коэффициента несферичности пропорционально увеличивается дополнительная магнитная сила и, следовательно, изменяется положение равновесия. Дополнительная магнитная сила также зависит от угла  $\beta$ , поскольку он входит в выражение (2.4) для  $W_2$ .

Координата  $z_2$  состояния равновесия определяется из (2.8) и зависит как от положения источников, так и от формы тела.

Равновесие будет устойчивым, если поперечная и продольная жесткости положительны. В [1] показано, что для сверхпроводящей сферы, находящейся на оси симметрии в поле двух точечных зарядов, при действии силы тяжести и сил инерции вдоль оси симметрии существует область устойчивости при  $R/d < 0.37$ . Границы этой области определяются из условия

$$\left. \frac{\partial^2 W(y, z)}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0. \quad (2.9)$$

Из анализа моментов и сил следует взаимосвязь поступательных и вращательных движений: повороты тела вызывают изменение силы, а поступательные перемещения в свою очередь вызывают изменение механического момента. Изменение формы тела также оказывает влияние на эти движения, что может привести к возникновению сложной динамики тела и к потере устойчивости.

### 3. Пульсирующий эллипсоид в поле двух магнитных полюсов

Ограничимся пока рассмотрением поступательных движений тела, считая, что оно находится в одном из состояний равновесия по углу  $\beta$ . Если форма тела не постоянна, а изменяется со временем, т.е.  $\varepsilon_2$  является переменной величиной, то будет изменяться и дополнительная сила  $F_{\text{add}} = \frac{dW_2(z)}{dz}$ . Изменение формы может быть обусловлено, например, действием поверхностных сил в случае, если тело упругое, или действием внутренних сил.

Пусть  $\varepsilon_2$  изменяется по гармоническому закону, т.е.

$$\varepsilon_{20} = \varepsilon \sin \omega t, \quad (3.1)$$

эта зависимость соответствует периодическому изменению формы тела — „дыхание“. В этом случае положение состояния равновесия будет также изменяться со временем, что приведет к возникновению параметрических колебаний [9,10]. При определенных условиях может

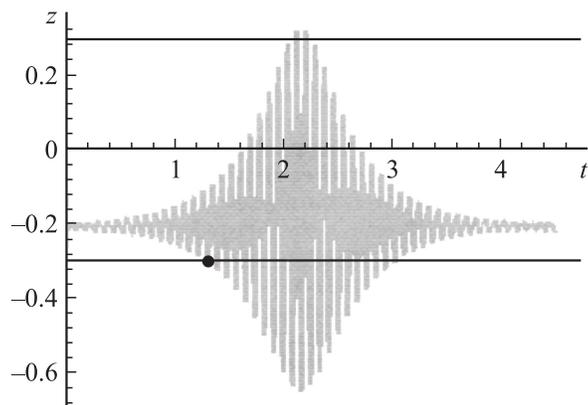


Рис. 7.

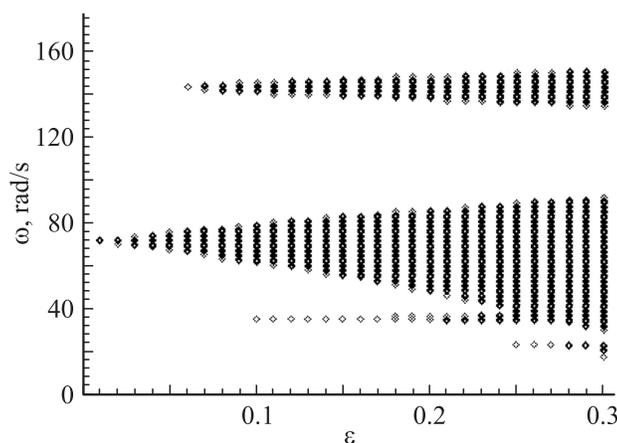


Рис. 8.

возникнуть параметрический резонанс, который может привести к выходу тела из области устойчивости.

Рассмотрим эту возможность подробнее. Пусть поле создается двумя магнитными полюсами, находящимися на расстоянии  $2d$ . Тело находится между магнитами. Параметры подвеса  $q = 600 \text{ A} \cdot \text{m}$ ,  $R = 1 \text{ cm}$ ,  $d = 3.125 \text{ cm}$ ,  $m = 100 \text{ g}$ ; эти параметры соответствуют устойчивому удержанию сферического тела с областью устойчивости

$$-0.3 < z < 0.3 \text{ cm}, \quad (3.2)$$

$$z_0 = -0.2 \text{ cm} [1].$$

Уравнение движения тела имеет вид

$$m\ddot{z} = \frac{dW_0(z)}{dz} + \frac{dW_2(z)}{dz} - mg. \quad (3.3)$$

Это уравнение исследовалось численно. Начальное положение тела задвалось в точке равновесия  $z(0) = z_0$ . Численное интегрирование (3.3) позволяет получить временную зависимость положения тела  $z$ . Интегрирование проводилось на интервале времени от 0 до 100 периодов собственных колебаний. Выход координаты  $z$  за пределы области (3.2) трактуется как потеря телом устойчивости.

На рис. 7 представлен результат численного интегрирования уравнения (3.3) при  $\varepsilon = 0.15$  и  $\omega = 143.9 \text{ rad/s}$ , откуда видно, что при выбранных значениях амплитуды и частоты „дыхания“ происходит нарастание амплитуды колебаний тела и выход из области устойчивости.

На рис. 8 приведена диаграмма устойчивости в плоскости параметров  $\varepsilon$  и  $\omega$ , заштрихованные области соответствуют параметрам, при которых происходит потеря устойчивости.

Из рисунка видно, что области неустойчивости расположены в окрестности частот  $\omega_0$ ,  $\omega_0/2$ ,  $\omega_0/3$  и  $2\omega_0$ , где  $\omega_0 = 71.9 \text{ rad/s}$  — собственная частота колебаний сферического тела. Результаты вычислений показывают, что с увеличением амплитуды колебаний формы тела области параметрического резонанса расширяются, и выход объекта из области устойчивости возможен не только при точном совпадении частоты колебаний эллипсоида вдоль оси  $z$  и частоты пульсации его формы, но и вблизи этих частот.

Таким образом, показано, что колебания формы являются причиной возбуждения колебательных движений тела и могут привести к выходу тела из области устойчивости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 08-01-00333а).

## Список литературы

- [1] Кузнецов С.И., Урман Ю.М. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 3–15.
- [2] Урман Ю.М. // Изв. вузов. Приборостроение. 1974. Т. 17. № 11. С. 87–92.
- [3] Урман Ю.М., Танонова Е.П. // Изв. вузов. Приборостроение. 1976. Т. 19. № 9. С. 65–68.
- [4] Berry M.V., Geim A.K. // Eur. J. Phys. 1997. Vol. 18. P. 307–313.
- [5] Урман Ю.М. // Мех. тв. тела. Респ. межвед. сб. Киев: Наук. думка, 1983. Вып. 15. С. 75–87.
- [6] Варшалович Д.А., Москалев А.Н., Херсонский В.К. Квантовая теория углового момента. Л.: Наука, 1975. 436 с.
- [7] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 623 с.
- [8] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.
- [9] Горяченко В.Д. Элементы теории колебаний. М.: Изд-во Красноярского университета, 1995. 430 с.
- [10] Стрелков С.П. Введение в теорию колебаний. М.: Наука, 1964. 437 с.