01;03

О модификации теории пограничного слоя для расчета волновых движений в цилиндрической струе вязкой жидкости

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: shir@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 20 февраля 2008 г.)

Существующие представления о пограничном слое вблизи свободной поверхности вязкой жидкости, связанном с ее периодическим движением, модифицированы для расчета волнового движения конечной амплитуды на поверхности толстой заряженной струи вязкой электропроводной жидкости. Для описания течения в пограничном слое предложена упрощенная, по сравнению с полной формулировкой, модельная задача, решение которой опирается на определяющие свойства точного решения в асимптотике малой вязкости: вид дисперсионного уравнения, профиль волны, скорость вязкого затухания со временем поля скоростей. Получена оценка толщины пограничного слоя, при которой в асимптотике малой вязкости различие между точным решением и решением модельной задачи (сформулированной в рамках предложенной теории) может быть задано с заранее оговоренной точностью. Определена область применимости модифицированной теории.

PACS: 47.15.Cb, 47.15.Uv, 47.35.Pq

Введение

Основа существующих в настоящее время представлений о пограничном слое в окрестности свободной поверхности вязкой несжимаемой жидкости, совершающей периодические движения, была заложена в работе Лонгет-Хиггинса [1] в середине прошлого столетия. Лонгет-Хиггинс обратил внимание на то, что характерный линейный масштаб экспоненциального затухания с глубиной амплитуды вихревого движения, генерируемого периодической капиллярно-гравитационной волной, распространяющейся по плоской поверхности бесконечно глубокой вязкой жидкости, определяется выражением $\delta_L \equiv \sqrt{2\nu/\omega}$, где ν — коэффициент кинематической вязкости, а ω — частота волны.

Полагая, что экспоненциальность затухания с глубиной вихревого движения обеспечивает достаточно большую скорость его исчезновения, Лонгет-Хиггинс предложил считать, что все вихревое движение сконцентрировано в слое толщиной δ, введя тем самым первую грубую оценку толщины пограничного слоя, связанного с волновым движением. С тех пор и до недавнего времени (см., например, [2–6]) оценки скорости вязкой диссипации энергии волн проводились на основе высказанных в [1] представлений. И только в работе [7] было проведено строгое аналитическое исследование представлений о пограничном слое у свободной поверхности жидкости, связанном с периодической волной, и было показано, что для обеспечения разумной (порядка единиц процентов) точности приближенных расчетов в рамках теории пограничного слоя его толщину необходимо увеличить минимум в четыре раза. В [8] эта теория была обобщена на случай однородно заряженной поверхности жидкости, а в [9] была предложена модификация теории пограничного слоя на случай осцилляций заряженной капли.

Здесь следует отметить, что развитие в [7–9] теории пограничного слоя, связанного с периодическим движением свободной поверхности вязкой жидкости, основано на стремлении понизить громоздкость аналитических расчетов нелинейного периодического волнового движения в вязкой жидкости [10], нелинейных осцилляций заряженных капель [11] и заряженных струй [12] вязкой жидкости. Модификации теории пограничного слоя [7,9] для расчета осцилляций заряженной струи вязкой жидкости и посвящена настоящая работа.

1. Математическая формулировка и точное решение задачи

Рассмотрим задачу расчета периодических волновых движений свободной поверхности цилиндрической струи радиуса R несжимаемой электропроводной жидкости с плотностью ρ, коэффициентом кинематической вязкости ν и коэффициентом поверхностного натяжения σ. Пусть в окружающем пространстве с помощью коаксиальных электродов создается электрическое поле, нормальное к поверхности струи, вследствие чего по невозмущенной волновым движением цилиндрической поверхности жидкости однородно распределен заряд с равновесной плотностью χ.

Введем цилиндрическую систему координат, ось Oz которой направим вдоль оси симметрии цилиндрической струи, а начало координат примем движущимся вдоль оси с постоянной скоростью, равной скорости струи. Поле скоростей течения жидкости в такой системе будет определяться волновыми движениями свободной поверхности. Рассмотрение ограничим анализом осесимметричных волн. Весь анализ проведем в безразмерных переменных, полагая три характерных физических масштаба обезразмеривания равными единице: $R = \rho = \sigma = 1$, тогда поле скоростей течения жидкости в струе $\mathbf{u}(r, z, t)$, поле давлений в жидкости $p(r, z, t)$ будут иметь тот же порядок величины, что и волновая деформация $\xi(z, t)$ цилиндрической формы $r = 1$ струи.

В линейном приближении по амплитуде волновых колебаний функция $\xi(z, t)$, которую будем считать малой по сравнению с радиусом, поле скоростей $\mathbf{u}(r, z, t)$ и поле давлений $p(r, z, t)$ в жидкости определяются следующей задачей

$$0 \le r \le 1: \quad \partial_t \mathbf{u} + \boldsymbol{\nabla} p - \nu \Delta \mathbf{u} = 0; \quad \boldsymbol{\nabla} \mathbf{u} = 0; \tag{1}$$

$$r > 1: \quad \Delta \Phi = 0; \tag{2}$$

$$r = 1: \quad \partial_t \xi - u_r = 0; \quad \partial_r u_z + \partial_z u_r = 0;$$

$$-p + 2\nu \partial_r u_r + \chi(\partial_r \Phi + 4\pi\chi\xi) - (\xi + \partial_{zz}\xi) = 0; \tag{3}$$

$$\Phi - 4\pi\chi\xi = 0; \tag{4}$$

$$r \to 0: \quad u_r \to 0; \quad u_z \to \text{const}; \tag{5}$$

$$r \to \infty: \quad \boldsymbol{\nabla}\Phi \to 0. \tag{6}$$

В представленной системе уравнений r, z — цилиндрические координаты; t — время; ∂_t и ∂_z — частные производные; u_z и u_r — осевая и радиальная составляющие вектора скорости: $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = u_z(\mathbf{r}, t)\,\mathbf{e}_z + u_r(\mathbf{r}, t)\,\mathbf{e}_r$; $p(\mathbf{r}, t)$ и $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — добавки к равновесным значениям гидродинамического давления и электрического потенциала.

Решение гидродинамических уравнений (1) удобно искать методом операторной скаляризации, представляя поле скоростей в виде суперпозиции его потенциальной $\mathbf{u}^{(p)}(\mathbf{r}, t)$ и вихревой $\mathbf{u}^{(c)}(\mathbf{r}, t)$ частей (иными словами, вводя гидродинамический потенциал $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и функцию тока, определенную как $r\partial_r \psi(\mathbf{r}, t)$)

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}^{(p)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}^{(c)}(\mathbf{r}, t) \equiv \hat{\mathbf{N}}_p \varphi(\mathbf{r}, t) + \hat{\mathbf{N}}_c \psi(\mathbf{r}, t). \tag{7}$$

Векторные операторы $\hat{\mathbf{N}}_p$ и $\hat{\mathbf{N}}_c$ выделяют потенциальную и вихревую составляющие поля скоростей, соответственно удовлетворяют условиям ортогональности и условиям коммутативности с оператором Лапласа

$$\hat{\mathbf{N}}_p = \boldsymbol{\nabla}; \quad \hat{\mathbf{N}}_c = \boldsymbol{\nabla} \times (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{e}_z);$$

$$\hat{\mathbf{N}}_p^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_c f(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{N}}_c^+ \cdot \hat{\mathbf{N}}_p f(\mathbf{r}) = 0;$$

$$\mathbf{N}_i \Delta f(\mathbf{r}) = \Delta \mathbf{N}_i f(\mathbf{r}); \quad (i = p, c). \tag{8}$$

Верхний индекс „+“ означает эрмитово сопряжение; $f(\mathbf{r})$ — произвольная непрерывная скалярная функция координат.

Подстановка разложения (7) в систему (1), а также свойства (8) позволяют легко перейти от исходных уравнений гидродинамики относительно искомых функций $u_z(\mathbf{r}, t)$, $u_r(\mathbf{r}, t)$ и $p(\mathbf{r}, t)$ к эквивалентной системе трех скалярных уравнений относительно $\varphi(\mathbf{r}, t)$, $\psi(\mathbf{r}, t)$ и $p(\mathbf{r}, t)$ [13]:

$$\Delta\varphi = 0; \quad \partial_t \psi - \nu \Delta \psi = 0; \quad p = -\partial_t \varphi. \tag{9}$$

Проекции вектора скорости, согласно (7) и (8), определяются через скалярные функции $\varphi(\mathbf{r}, t)$ и $\psi(\mathbf{r}, t)$ следующими соотношениями:

$$u_z = u_z^{(p)} + u_z^{(c)} = \partial_z \varphi - \frac{1}{r}\,\partial_r (r \partial_r \psi);$$

$$u_r = u_r^{(p)} + u_r^{(c)} = \partial_r \varphi + \partial_{zr} \psi. \tag{10}$$

Решение сформулированной задачи в форме бегущей волны известно [13] и может быть записано в виде:

$$\xi(z, t) = \alpha \exp(st - ikz) + (\text{к.с.});$$

$$\begin{pmatrix} \varphi(\mathbf{r}, t) \\ \psi(\mathbf{r}, t) \\ p(\mathbf{r}, t) \\ \Phi(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} (s + 2\nu k^2) I_0(kr)/\big(k I_1(k)\big) \\ -i2\nu k I_0(lr)/\big(l I_1(l)\big) \\ -s(s + 2\nu k^2) I_0(kr)/\big(k I_1(k)\big) \\ 4\pi\chi K_0(kr)/K_0(k) \end{pmatrix}$$

$$\times \exp(st - ikz) + (\text{к.с.}). \tag{11}$$

Для потенциальной и вихревой составляющих вектора поля скоростей решение определяется выражениями

$$\begin{pmatrix} u_z^{(p)}(\mathbf{r}, t) \\ u_r^{(p)}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -i(s + 2\nu k^2) I_0(kr)/I_1(k) \\ (s + 2\nu k^2) I_1(kr)/I_1(k) \end{pmatrix}$$

$$\times \exp(st - ikz) + (\text{к.с.});$$

$$\begin{pmatrix} u_z^{(c)}(\mathbf{r}, t) \\ u_r^{(c)}(\mathbf{r}, t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} i2\nu k l I_0(lr)/I_1(l) \\ -2\nu k^2 I_1(lr)/I_1(l) \end{pmatrix}$$

$$\times \exp(st - ikz) + (\text{к.с.}); \tag{12}$$

$$l = \sqrt{s/\nu + k^2}. \tag{13}$$

В формулах (11)–(13) α — комплексная амплитуда поверхностной волны; k — волновое число; $I_j(x)$ и $K_j(x)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода j-го порядка; аббревиатура (к.с.) означает „комплексно сопряженные“ слагаемые; s — комплексная частота, определяемая из дисперсионного уравнения

$$s^2 - 2\nu\big[sG(k) - 2k^2(s + \nu k^2)$$

$$\times \big(1 - G(k)/G(l)\big)\big] + \omega^2 = 0; \tag{14}$$

$$\omega^2 \equiv G(k)\big[k^2 - 1 + 4\pi\chi^2\big(1 - H(k)\big)\big];$$

$$G(x) \equiv x I_1(x)/I_0(x); \quad H(x) \equiv x K_1(x)/K_0(x);$$

здесь ω^2 — квадрат частоты волновых движений поверхности струи идеальной жидкости, т.е. $\omega = \lim\limits_{\nu \to 0} s$.

В пределе малой вязкости дисперсионное уравнение можно переписать в более простом виде с сохранением слагаемых, линейных по ν, выписать его решение и получить явный вид параметра l

$$s^2 + s2\nu\bigl(2k^2 - G(k)\bigr) + \omega^2 = 0;$$

$$s \approx \pm i\omega - \nu\bigl(2k^2 - G(k)\bigr); \quad l \approx (1+i)\sqrt{\omega/2\nu}. \quad (15)$$

Асимптотическое (в пределе малой вязкости) решение всей задачи получим, выразив в решениях (12) параметры s и l по формулам (15)

$$p(\mathbf{r},t) = -\alpha i\omega\,\bigl(i\omega - 2\nu\bigl(k^2 - G(k)\bigr)\bigr)\,I_0(kr)/\bigl(kI_1(k)\bigr) \times \exp(st - ikz);$$

$$\begin{pmatrix} u_z^{(p)}(\mathbf{r},t) \\ u_r^{(p)}(\mathbf{r},t)\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}\bigl(\omega - i\nu G(k)\bigr)I_0(kr)/I_1(k) \\ \bigl(i\omega + \nu G(k)\bigr)I_1(kr)/I_1(k)\end{pmatrix} \times \exp(st - ikz) + (\text{к.с.});$$

$$\begin{pmatrix} u_z^{(c)}(\mathbf{r},t) \\ u_r^{(c)}(\mathbf{r},t)\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} i(1+i)k\sqrt{2\nu\omega}I_0(lr)/I_1(l) \\ -2\nu k^2 I_1(lr)/I_1(l)\end{pmatrix} \times \exp(st - ikz) + (\text{к.с.}). \quad (16)$$

Выражения (16) позволяют выявить структуру аналитического решения для поля скоростей в приближении малой вязкости. Из (16) следует, что, во-первых, вихревая компонента скорости является малой добавкой к основной потенциальной составляющей; во-вторых, она существенно быстрее, чем потенциальная компонента, убывает с уменьшением координаты r (т. е. по мере удаления от поверхности струи к ее оси). Действительно, из асимптотического поведения модифицированных функций Бесселя при больших и малых аргументах следует, что вихревая составляющая скорости убывает по экспоненциальному закону $u^{(c)} \sim \exp\bigl(-l(1-r)\bigr)$, в то время как поперечная и продольная проекции потенциальной составляющей скорости убывают по степенным законам: $u_r^{(p)} \sim r$, $u_z^{(p)} \sim (2/k)(1 + k^2r^2/4)$. Такая структура поля скоростей характерна для теории пограничного слоя, и можно полагать, что вихревая составляющая скорости существенна лишь в тонком слое вблизи свободной поверхности жидкости, в то время как в остальном объеме движение является потенциальным.

2. Формулировка задачи в рамках представлений о пограничном слое

Сформулируем модельную задачу исходя из выявленной выше структуры течения. Представление поля скоростей в виде (7) позволяет решать задачу для потенциальной компоненты во всем объеме жидкости, а для вихревой — лишь в тонком пограничном слое толщиной δ (которую пока будем считать неопределенной). В математической формулировке задачи (1)–(6) изменения коснутся только условий ограниченности решения на оси струи (5). Для точной задачи с учетом разложения (10) они принимали вид: $r \to 0$: $\varphi \to 0$; $\psi \to 0$. В модельной задаче условие ограниченности решения на оси сохраняется для потенциальной компоненты поля скоростей, а для вихревой его составляющей потребуем обращения в нуль вихря на нижней границе пограничного слоя: $r = 1 - \delta$: $\operatorname{rot}\mathbf{u}^{(c)} = 0$. Учитывая (9), (10), это условие несложно записать в терминах скалярной функции ψ: $\operatorname{rot}\mathbf{u}^{(c)} = \partial_r\Delta\psi\,\mathbf{e}_\varphi = 0 \Rightarrow \partial_r\Delta\psi = 0$.

Из уравнения (9) для функции ψ и решения (11) следует: $\Delta\psi = (1/\nu)\partial_t\psi = (s/\nu)\psi$ и условие обращения в нуль ротора скорости на нижней границе пограничного слоя принимает вид $r = 1 - \delta$: $\partial_r\psi = 0$.

В результате уравнения (9) для модельной задачи дополнятся следующими граничными условиями

$$r = 1: \quad \partial_t\xi - u_r^{(p)} - u_r^{(c)} = 0; \quad (17)$$

$$\partial_r\bigl(u_z^{(p)} + u_z^{(c)}\bigr) + \partial_z\bigl(u_r^{(p)} + u_r^{(c)}\bigr) = 0; \quad (18)$$

$$-p + 2\nu\partial_r\bigl(u_r^{(p)} + u_r^{(c)}\bigr) + \chi(\partial_r\Phi + 4\pi\chi\xi) - (\xi + \partial_{zz}\xi) = 0; \quad (19)$$

$$r \to 0: \quad \varphi \to 0; \quad (20)$$

$$r = 1 - \delta: \quad \partial_r\psi = 0. \quad (21)$$

Электрический потенциал $\Phi(\mathbf{r},t)$ вблизи поверхности струи определяется из соотношений (2), (4), (6).

3. Решение модельной задачи

Решение сформулированной задачи для неизвестных функций $\xi(z,t)$, $\varphi(\mathbf{r},t)$, $\psi(\mathbf{r},t)$, $\Phi(\mathbf{r},t)$ ищется в виде бегущих волн

$$\begin{pmatrix}\xi(z,t) \\ \varphi(\mathbf{r},t) \\ \psi(\mathbf{r},t) \\ \Phi(\mathbf{r},t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha \\ f(r) \\ h(r) \\ g(r)\end{pmatrix}\exp(st - ikz). \quad (22)$$

Подставив выражения для функций $\varphi(\mathbf{r},t)$, $\psi(\mathbf{r},t)$ и $\Phi(\mathbf{r},t)$ в уравнения (2), (9) и учитывая соответственно условия (6), (20), (21), получим следующие решения для искомых величин,

$$\begin{pmatrix}\xi(z,t) \\ \varphi(\mathbf{r},t) \\ \psi(\mathbf{r},t) \\ \Phi(\mathbf{r},t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha \\ aI_0(kr) \\ b\bigl(I_0(lr)/I_1(l\eta) + K_0(lr)/K_1(l\eta)\bigr) \\ 4\pi\chi\alpha K_0(kr)/K_1(k)\end{pmatrix} \times \exp(st - ikz); \quad (23)$$

$$l = \sqrt{s/\nu + k^2}; \quad \eta \equiv 1 - \delta.$$

Используя (9), (10), находим поля скоростей и давления

$$p(\mathbf{r},t) = -saI_0(kr)\exp(st-ikz);$$

$$\begin{pmatrix} u_z^{(p)}(\mathbf{r},t) \\ u_r^{(p)}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} -ikI_0(kr) \\ kI_1(kr) \end{pmatrix}\exp(st-ikz);$$

$$\begin{pmatrix} u_z^{(c)}(\mathbf{r},t) \\ u_r^{(c)}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} = b$$

$$\times\begin{pmatrix} -l^2\{[I_0(lr)/I_1(l\eta)]+[K_0(lr)/K_1(l\eta)]\} \\ -ikl\{[I_1(lr)/I_1(l\eta)]-[K_1(lr)/K_1(l\eta)]\} \end{pmatrix}\exp(st-ikz). \tag{24}$$

Подставив решения (23), (24) в граничные условия (17)–(19), получим систему трех линейных алгебраических уравнений для определения неизвестных констант α, a и b

$$\begin{pmatrix} -s & kI_1(k) & -ikl\,f_1(l,\eta) \\ 0 & 2ik^2I_1(k) & l(l^2+k^2)f_1(l,\eta) \\ & \omega^2/G(k)I_0(k)\Big(s+2\nu\big(k^2-G(k)\big)\Big) & -2i\nu kl\big(l\,f_2(l,\eta)-f_1(l,\eta)\big) \end{pmatrix}$$

$$\times\begin{pmatrix} \alpha \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \tag{25}$$

$$f_1(l,\eta) \equiv I_1(l)/I_1(l\eta) - K_1(l)/K_1(l\eta);$$

$$f_2(l,\eta) \equiv I_0(l)/I_1(l\eta) + K_0(l)/K_1(l\eta).$$

Для нетривиального решения системы (25) необходимо, чтобы определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных α, a и b, обращался в нуль. Это требование позволяет найти дисперсионное уравнение задачи

$$s^2 - 2\nu\big[sG(k) - 2k^2(s+\nu k^2)$$

$$\times\big(1-G(k)f(l,\eta)\big)\big] + \omega^2 = 0; \tag{26}$$

$$f(l,\eta) \equiv \frac{f_2(l,\eta)}{l\,f_1(l,\eta)} = \frac{[I_0(l)K_1(l\eta)+K_0(l)I_1(l\eta)]}{l[I_1(l)K_1(l\eta)-K_1(l)I_1(l\eta)]}.$$

Используя граничные условия (17), (18), можно выразить константы a и b через амплитуду волны α и записать решение для полей скорости течения жидкости и давления в струе в виде

$$p(\mathbf{r},t) = -\alpha s(s+2\nu k^2)\frac{I_0(kr)}{kI_1(k)}\exp(st-ikz);$$

$$\begin{pmatrix} u_z^{(p)}(\mathbf{r},t) \\ u_r^{(p)}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} -i(s+2\nu k^2)I_0(kr)/I_1(k) \\ (s+2\nu k^2)I_1(kr)/I_1(k) \end{pmatrix}$$

$$\times\exp(st-ikz);$$

$$\begin{pmatrix} u_z^{(c)}(\mathbf{r},t) \\ u_r^{(c)}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 2i\nu kl\,\dfrac{[I_0(lr)K_1(l\eta)+K_0(lr)I_1(l\eta)]}{[I_1(l)K_1(l\eta)-K_1(l)I_1(l\eta)]} \\ -2\nu k^2\,\dfrac{[I_1(lr)K_1(l\eta)-K_1(lr)I_1(l\eta)]}{[I_1(l)K_1(l\eta)-K_1(l)I_1(l\eta)]} \end{pmatrix}$$

$$\times\exp(st-ikz). \tag{27}$$

Переход к точному решению соответствует стремлению толщины пограничного слоя к единице (к радиусу струи): $\delta \to 1$. Это соответствует стремлению параметра η к нулю. Учитывая, что при стремлении аргумента к нулю модифицированные функции Бесселя $I_n(x)$ ограничены, а $K_n(x) \to \infty$, несложно получить, что

$$\lim_{\eta\to 0} f(l,\eta) = 1/G(l),$$

а предел выражений (26), (27) совпадает с соответствующими выражениями точного решения (12), (14).

В приближении малой, но не нулевой вязкости сохранение в дисперсионном уравнении (26) линейных по ν слагаемых позволяет легко привести его к виду (15) (здесь следует учесть, что при $\nu \to 0$ функция $f(l,\eta)$ ведет себя как $\sqrt{\nu}$). Таким образом, исследуемое движение в модельном приближении при малой вязкости подчиняется дисперсионному уравнению, которое получается в точном решении, т.е. s и l также определяются формулами (15).

4. Упрощение модельной задачи

Опираясь на характерные свойства точного решения рассматриваемой задачи, можно упростить математическую формулировку модельной задачи (9), (10), (17)–(21) без ущерба для вида решения в пределе малой вязкости. Соответствующие рассуждения приводились в [7] при рассмотрении теории пограничного слоя для плоской свободной поверхности жидкости.

Отметим следующие наиболее существенные свойства точного решения:

— течение состоит из двух составляющих: основной — потенциальной и добавочной — вихревой (сосредоточенной в пограничном слое);

— вихревая часть течения является малой по сравнению с потенциальной и стремится к нулю при уменьшении вязкости жидкости ν;

— для потенциальной составляющей характерный линейный масштаб изменения одинаков как в продольном, так и в перпендикулярном к поверхности направлении и равен длине волны λ — характерному горизонтальному размеру поверхностного возмущения;

— характерный пространственный масштаб изменения вихревой компоненты течения в продольном направлении также равен λ, а в поперечном — существенно меньше и определяется толщиной пограничного слоя $\delta \ll \lambda$.

На основе вышеизложенного примем следующие правила оценки производных от искомых величин по пространственным переменным:

— для потенциальной составляющей поля скоростей (т.е. для функций $u_z^{(p)}(\mathbf{r},t)$, $u_r^{(p)}(\mathbf{r},t)$, $\varphi(\mathbf{r},t)$) дифференцирование по координатам z и r формально сводится к появлению множителя $1/\lambda$ у соответствующей функции, например, $\partial_z u_z^{(p)} \to u_z^{(p)}/\lambda$;

— для вихревой составляющей (т.е. для функций $u_z^{(c)}(\mathbf{r},t)$, $u_r^{(c)}(\mathbf{r},t)$, $\psi(\mathbf{r},t)$) оператор ∂_z переходит в $1/\lambda$, а ∂_r — в $1/\delta$, например, $\partial_z u_z^{(c)} \to u_z^{(c)}/\lambda$, но $\partial_r u_z^{(c)} \to u_z^{(c)}/\delta$.

В соответствии со сказанным выше, учитывая малость δ по сравнению с λ, упрощение модельной задачи проведем, пренебрегая, где это возможно, слагаемыми, имеющими значение $\sim \delta^2/\lambda^2$.

В уравнении (9) для функции $\psi(\mathbf{r},t)$ можно пренебречь производными по координате z. Действительно, соотношение между слагаемыми в операторе Лапласа показывает, что

$$\left[\partial_{zz}\psi/\big(\partial_r(r\partial_r\psi)/r\big)\right] \sim \delta^2/\lambda^2.$$

Уравнение неразрывности (1), записанное для каждой из компонент течения (потенциальной и вихревой), позволяет получить оценки соотношений между величинами проекций соответствующих компонент

$$\nabla\cdot\mathbf{u}^{(p,c)} = 0 \Rightarrow \frac{1}{r}\,\partial_r\left(r u_r^{(p,c)}\right) \sim \partial_z u_z^{(p,c)};$$

$$u_r^{(p)} \sim u_z^{(p)} \sim V; \quad u_r^{(c)}/u_z^{(c)} \sim \delta/\lambda, \tag{28}$$

где V обозначает характерную скорость потенциального течения.

Учитывая (28), из динамического граничного условия для касательной компоненты тензора напряжений (18) можно оценить соотношение на поверхности струи между величинами проекций на оси координат потенциальной и вихревой компонент течения. Во-первых, несложно убедиться, что из двух „вихревых“ слагаемых уравнения (18) одним можно пренебречь: $\partial_z u_r^{(c)}/\partial_r u_z^{(c)} \sim \delta u_r^{(c)}/\lambda u_z^{(c)} \sim \delta^2/\lambda^2$. Во-вторых, в силу соотношений (10) очевидно, что „потенциальные“ слагаемые равны между собой: $\partial_r u_z^{(p)} = \partial_r\partial_z\varphi = \partial_z\partial_r\varphi = \partial_z u_r^{(p)}$. В результате граничное условие (18) может быть записано в виде $2\partial_z u_r^{(p)} + \partial_r u_z^{(c)} = 0$. Откуда следует, что $\partial_r u_z^{(c)} \sim \partial_z u_r^{(p)}$, и с учетом (28) получаем оценки

$$u_z^{(c)}/V \sim \delta/\lambda; \quad u_r^{(c)}/V \sim \delta^2/\lambda^2. \tag{29}$$

Согласно (29), в кинематическом граничном условии (17) следовало бы пренебречь последним слагаемым — вихревой компонентой скорости. Однако в этом случае получающееся в ходе решения упрощенной модельной задачи дисперсионное уравнение в пределе малой вязкости $\nu \to 0$ не совпадает с пределом малой вязкости точного дисперсионного уравнения (15). Если в кинематическом граничном условии (17) сохранить вихревую компоненту скорости, несмотря на ее малость, дисперсионные уравнения точной и упрощенной модельной задач совпадают. Исходя из приведенных соображений уравнение (17) оставим без изменений.

В динамическом граничном условии для нормальной компоненты тензора напряжений (19) оценим отношение „вязких“ слагаемых к лапласовскому давлению. Из кинематического условия (17) следует, что $\omega\cdot\xi \sim V$, т.е. $\xi \sim V/\omega$. Кроме того, воспользуемся тем, что, согласно [1], для толщины пограничного слоя у свободной поверхности вязкой жидкости используется следующая оценка: $\delta \sim \sqrt{\nu/\omega}$, откуда получим $\nu \sim \delta^2\omega$. Тогда отношение „вязких“ слагаемых к „лапласовским“ в (19) будет следующим: $\nu\partial_r u_r^{(p)}/\xi \sim \omega^2\delta^2/\lambda$; $\nu\partial_r u_r^{(c)}/\xi \sim \omega^2\delta^3/\lambda^2$. Видно, что вторым из оцениваемых слагаемых (вихревым) можно пренебречь как имеющим более высокий порядок малости, чем δ^2/λ^2 при $\delta \to 0$.

Учитывая все описанные выше оценки, выпишем математическую формулировку упрощенной модельной задачи

$$\Delta\varphi = 0; \quad \partial_t\psi - \frac{\nu}{r}\,\partial_r(r\partial_r\psi) = 0; \quad p = -\partial_t\varphi; \tag{30}$$

$$r = 1: \quad \partial_t\xi - u_r^{(p)} - u_r^{(c)} = 0; \quad 2\partial_z u_r^{(p)} + \partial_r u_z^{(c)} = 0;$$

$$-p + 2\nu\partial_r u_r^{(p)} + \chi(\partial_r\Phi + 4\pi\chi\xi) - (\xi + \partial_{zz}\xi) = 0;$$

$$r \to 0: \quad \varphi \to 0; \quad r = 1-\delta: \quad \partial_r\psi = 0.$$

Поле электрического потенциала $\Phi(\mathbf{r},t)$ вблизи поверхности струи определяется, как и прежде, из уравнений (2), (4), (6).

5. Решение упрощенной модельной задачи

Ход решения упрощенной задачи аналогичен решению исходной модельной задачи, однако объем вычислений уменьшается. Отметим, что модельные изменения и последующие упрощения коснулись только вихревой части течения, поэтому решения для потенциальной и электрической частей задачи останутся такими же, как и в точной задаче и определяются формулами (11), (12). Решение упрощенного уравнения для функции $\psi(\mathbf{r},t)$ (а следовательно, и выражения для $u_z^{(c)}(\mathbf{r},t)$ и $u_r^{(c)}(\mathbf{r},t)$) имеет такой же вид, как и в модельной задаче (см. (23), (24)), изменится лишь явный вид параметра $l \equiv \sqrt{s/\nu}$, а вместо системы уравнений (25) получим следующую:

$$\begin{pmatrix} -s & kI_1(k) & -ikl\,f_1(l,\eta) \\ 0 & 2ik^2I_1(k) & l^3 f_1(l,\eta) \\ \omega^2/G(k) & I_0(k)\big(s + 2\nu\big(k^2 - G(k)\big)\big) & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \alpha \\ a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Приравняв нулю определитель этой системы, в пределе малой вязкости, можно получить дисперсионное уравнение в виде

$$s^2 + s2\nu\big(2k^2 - G(k)\big) + \omega^2 = 0.$$

Видно, что это уравнение совпадает со взятыми в пределе малой вязкости дисперсионными уравнениями как точной, так и модельной задачи (см. (15)). В этом же приближении выражения для комплексной частоты и параметра l определяются формулами (15), а решениние упрощенной модельной задачи имеет вид (27). Таким образом, в приближении малой вязкости для моделирования течения в рамках теории пограничного слоя можно воспользоваться упрощенной математической формулировкой задачи (30).

Выразив в (27) параметры s и l по формулам (15), получим асимптотический (в пределе малой вязкости) вид решения, несколько отличающийся от полученных в точном решении выражений (16) для вихревой составляющей поля скоростей

$$\begin{pmatrix} u_z^{(c)}(\mathbf{r},t) \\ u_r^{(c)}(\mathbf{r},t) \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} -i(1+i)k\sqrt{2\nu\omega}\,F_z^2(r,l,\eta) \\ -2\nu k^2 F_r^{(2)}(r,l,\eta) \end{pmatrix}$$

$$\times \exp(st - ikz); \tag{31}$$

$$F_z^{(2)}(r,l,\eta) \equiv \frac{[I_0(lr)K_1(l\eta) + K_0(lr)I_1(l\eta)]}{[I_1(l)K_1(l\eta) - K_1(l)I_1(l\eta)]};$$

$$F_r^{(2)}(r,l,\eta) \equiv \frac{[I_1(lr)K_1(l\eta) - K_1(lr)I_1(l\eta)]}{[I_1(l)K_1(l\eta) - K_1(l)I_1(l\eta)]}. \tag{32}$$

Легко видеть, что отличие приближенного решения (31) от точного (16) заключается лишь в множителях $F_z^{(2)}(r,D,\delta_L)$ и $F_r^{(2)}(r,D,\delta_L)$, которые в точных решениях имеют более простой вид:

$$F_z^{(1)}(r,l) \equiv I_0(lr)/I_1(l); \quad F_r^{(1)}(r,l) \equiv I_1(lr)/I_1(l). \tag{33}$$

6. Подбор толщины пограничного слоя

Исследуем, насколько хорошо соотношения (31) в зависимости от толщины пограничного слоя δ аппроксимируют вихревую составляющую (16), полученную из точного решения. Аналогично тому, как это делалось в [7], толщину пограничного слоя будем считать определенной с точностью до постоянного множителя D, согласно следующим соотношениям:

$$\delta = D\,\delta_L; \quad \delta_L \equiv \sqrt{2\nu/\omega}, \tag{34}$$

где δ_L — величина, предложенная для оценки толщины пограничного слоя Лонгет-Хиггинсом [1].

Введем новую координату $x = (r-1)/\delta$, чтобы при изменении r в диапазоне $1-\delta \le r \le 1$ координата x изменялась в пределах $-1 \le x \le 0$. Аргументы модифицированных функций Бесселя в сравниваемых решениях примут следующий вид:

$$l = (1+i)/\delta_L; \quad lr = (1+i)(Dx + 1/\delta_L);$$

$$l\eta = (1+i)(1/\delta_L - D),$$

а сами решения (31) и (16) будут отличаться только функциональными множителями $F_z^{(2)}(x,D,\delta_L)$, $F_r^{(2)}(x,D,\delta_L)$ в приближенном решении и $F_z^{(1)}(x,D,\delta_L)$, $F_r^{(1)}(x,D,\delta_L)$ в точном решении, определяющими зависимость решений от радиальной переменной x.

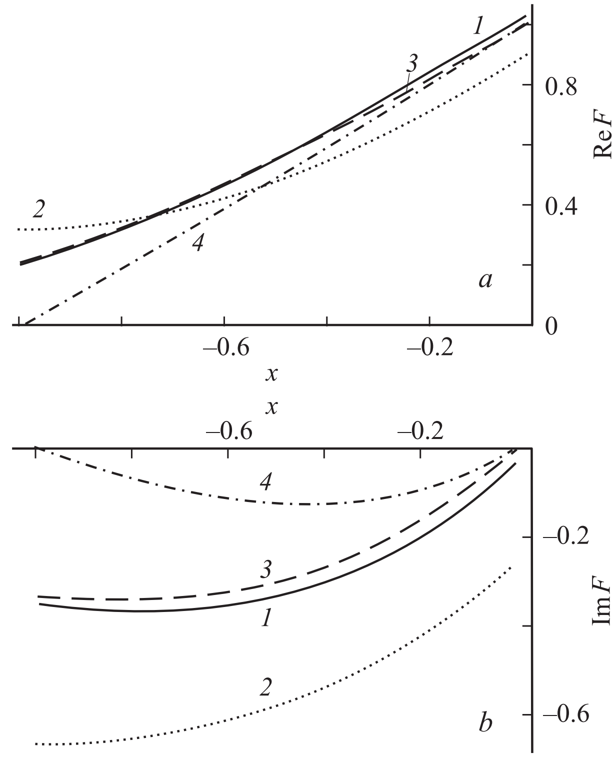

Рис. 1. Зависимости от безразмерной радиальной переменной x вещественной (a) и мнимой (b) частей функциональных множителей: *1* — $F_z^{(1)}$, *2* — $F_z^{(2)}$, *3* — $F_r^{(1)}$, *4* — $F_r^{(2)}$, рассчитанные при $D = 1$, $k = 2$, $\nu = 0.01$, $\chi = 0.3$ ($W \approx 1.1$).

Зададимся вопросом, при каком значении коэффициента D в формуле (34) функции $F_z^{(2)}(x,D,\delta_L)$, $F_r^{(2)}(x,D,\delta_L)$ из модельного решения, определенные соотношениями (32), наилучшим образом описывают соответствующие функции $F_z^{(1)}(x,D,\delta_L)$, $F_r^{(1)}(x,D,\delta_L)$ точного решения, определенные соотношениями (33).

На рис. 1 показано, как изменяются реальные и мнимые части сравниваемых функций (32), (33) в диапазоне $-1 \le x \le 0$ при значении коэффициента $D = 1$. Поведение функциональных множителей $F_z^{(2)}$ и $F_r^{(2)}$ сильно отличается от аналогичных множителей $F_z^{(1)}$ и $F_r^{(1)}$, что свидетельствует о недостаточной корректности формулы: $\delta_L \equiv \sqrt{2\nu/\omega}$, предложенной для оценки толщины пограничного слоя в [1].

Отметим, что в отличие от задачи о волнах на плоской поверхности [7], в случае цилиндрической геометрии исследуемые функции (32), (33) зависят от параметра δ_L, а следовательно, от таких физических характеристик задачи, как вязкость жидкости ν, волновое число k, поверхностная плотность заряда χ (см. выражение (14) для частоты ω). Выбор принятых для расчета значений безразмерных физических параметров: $k = 2$, $\nu = 0.01$, $\chi = 0.3$ обусловлен следующими соображениями.

1) Значение безразмерной вязкости $\nu = 0.01$ соответствует радиусу струи воды порядка десятых долей миллиметра, а струи этилового спирта — порядка

миллиметра. Увеличение радиуса соответствует уменьшению значения безразмерного параметра ν, поэтому $\nu = 0.01$ примерно соответствует верхней границе области реальных значений данного параметра в области практических приложений [12,14,15].

2) Из выражения (14) для частоты ω следует, что на незаряженной поверхности струи идеальной жидкости устойчивы только достаточно короткие волны с $k > 1$ (что соответствует $\lambda < 2\pi R$). Принятое для модельных расчетов значение $k = 2$ достаточно близко к границе области устойчивости — границе области применимости излагаемой теории.

3) Наличие электрического заряда на поверхности струи приводит к тому, что изначально устойчивая волна становится неустойчивой, если величина поверхностной плотности заряда превысит некоторое критическое значение χ_{cr}. Для $k = 2$ значение $\chi_{\text{cr}} \approx 0.4$ [12,13], поэтому для расчетов принималась величина плотности заряда из области устойчивости $\chi = 0.3$. Заметим, что в работах с заряженной свободной поверхностью жидкости для оценки ее устойчивости по отношению к напряженности электрического поля часто используется безразмерный параметр: $W \equiv E^2/4\pi$ [12]. В случае идеально проводящей жидкости он связан с поверхностной плотностью заряда соотношением $W = 4\pi\chi^2$. Значению $\chi_{\text{cr}} \approx 0.4$ соответствует критическое значение $W_{\text{cr}} \approx 2$, в то время как принятое значение $\chi = 0.3$ соответствует значению параметра, примерно равному половине критического: $W \approx 1$.

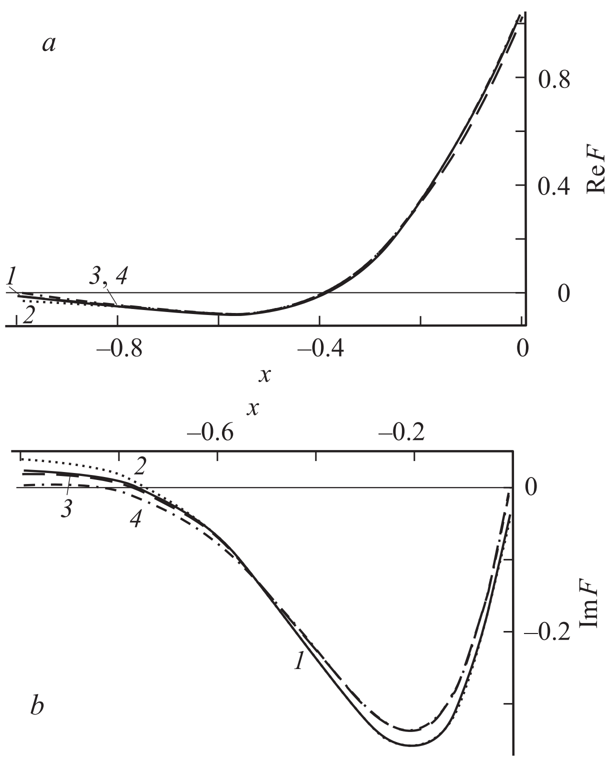

Рис. 2. Те же зависимости, что и на рис. 1, рассчитанные при $D = 4$.

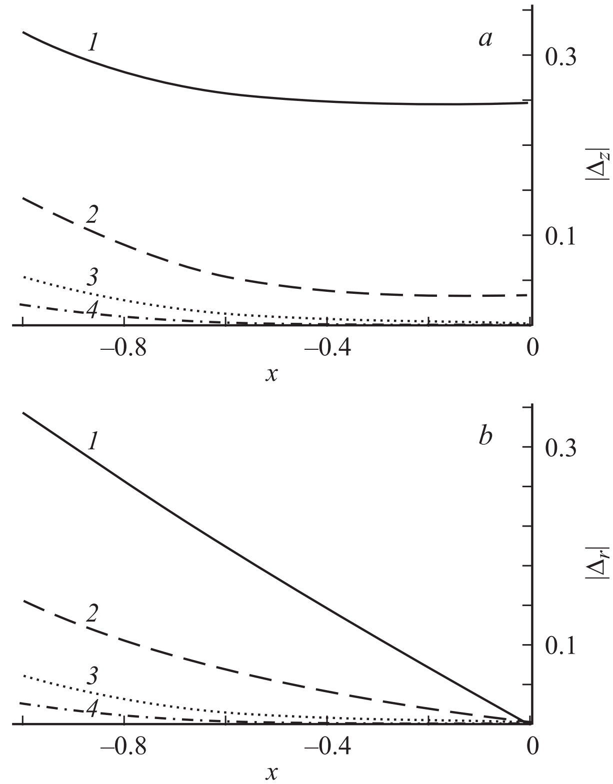

Рис. 3. Зависимости от безразмерной радиальной переменной x относительной погрешности $|\Delta_z|$ аппроксимации точного выражения приближенным, рассчитанным в рамках теории пограничного слоя, для продольной проекции скорости течения жидкости — (a) и для радиальной компоненты скорости $|\Delta_r|$ — (b), рассчитанные при $k = 2$, $\nu = 0.01$, $\chi = 0.3$ ($W \approx 1.1$) для различных значений параметра D: *1* — $D = 1$; *2* — 2; *3* — 3; *4* — $D = 4$.

На рис. 2 приведены те же зависимости, что и на рис. 1, для $D = 4$. Увеличение D по сравнению с единицей улучшает соответствие модельного и точного решений, и уже при $D = 4$ разница между решениями заметна лишь в непосредственной близости нижней границы пограничного слоя. Уменьшение относительной погрешности аппроксимации продольной и поперечной составляющей скорости с ростом параметра D хорошо иллюстрирует рис. 3, на котором показана зависимость от глубины x величин $|\Delta_z|$ и $|\Delta_r|$, определяемых выражениями

$$|\Delta_z| = \left|F_z^{(1)} - F_z^{(2)}\right| / \left|F_z^{(1)}\right|\Big|_{x=0},$$

$$|\Delta_r| = \left|F_r^{(1)} - F_r^{(2)}\right| / \left|F_r^{(1)}\right|\Big|_{x=0}.$$

При значении $D = 4$ погрешность на нижней границе пограничного слоя не превышает двух процентов для обеих компонент вектора скорости. Дальнейшее увеличение параметра D приведет к еще более значительному снижению погрешности, но это приведет и к увеличению толщины пограничного слоя, что не всегда желательно, а поэтому значение $D = 4$ представляется оптимальным. Подводя итог сказанному выше, можно утверждать, что

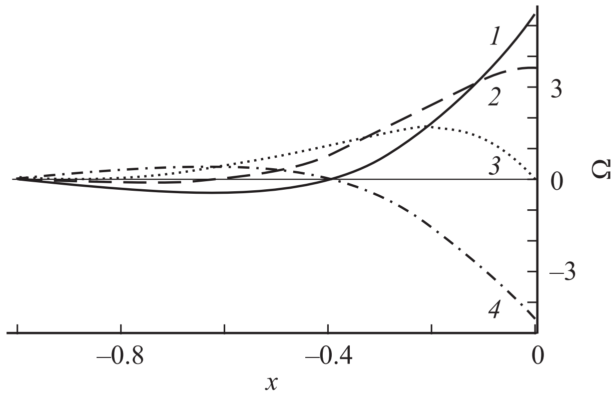

Рис. 4. Зависимости от безразмерной радиальной переменной x в пределах пограничного слоя ротора поля скоростей, рассчитанные при $D = 4$, $z = 0$, $k = 2$, $\nu = 0.01$, $\chi = 0.3$ ($W \approx 1.1$) для различных моментов времени, измеренного в долях T — периода волны *1* — $t = 0$, *2* — $t = T/8$, *3* — $t = T/4$, *4* — $t = T/2$.

значение $D = 4$ определяет ту толщину пограничного слоя $\delta = D\delta_L$, глубже которой вихревое движение жидкости можно не учитывать с контролируемой точностью.

Выпишем ротор поля скоростей волнового течения маловязкой жидкости в струе

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \left(\partial_z u_r^{(c)} - \partial_r u_z^{(c)}\right)\mathbf{n}_\varphi$$

$$\equiv i\alpha\left[2\nu k^3 F_r^{(2)}(r, D, \delta_L) - (1+i)k\sqrt{2\nu\omega}\,\frac{\partial F_z^{(2)}(r, D, \delta_L)}{\partial r}\right]$$

$$\times \exp(st - ikz)\mathbf{n}_\varphi. \tag{35}$$

Несложно показать, что

$$\frac{\partial F_z^{(2)}}{\partial r} \equiv l\,F_r^{(2)}. \tag{36}$$

Подставим (36) в (35) и с учетом того, что при малой вязкости $l = (1+i)\sqrt{\omega/2\nu}$, получим

$$\boldsymbol{\Omega} \equiv \left(\partial_z u_r^{(c)} - \partial_r u_z^{(c)}\right)\mathbf{n}_\varphi \equiv [2\alpha k(\omega + i\nu k^2)F_r^{(2)}(r, D, \delta_L)$$

$$\times \exp(st - ikz) + \text{к. с.}]\,\mathbf{n}_\varphi,$$

$\mathbf{n}_\varphi$ — орт угловой переменной цилиндрической системы координат, параллельный оси струи. Именно ротор поля скоростей определяет вихревое движение жидкости в струе.

Из рис. 4 видно, что в соответствии с рис. 2, *a* на нижней границе пограничного слоя ротор обращается в нуль, как это и требовалось в модельной постановке задачи. Видно также, что направления вращения вихрей в пограничном слое зависят как от расстояния до поверхности струи, так и от времени.

7. Пределы применимости предлагаемой модификации теории пограничного слоя

Увеличение волновго числа k, т.е. уменьшение длины волны, улучшает качество аппроксимации точного решения модельным в рамках теории пограничного слоя. Увеличение параметра вязкости ν, так же как и приближение к критическому для реализации неустойчивости заряженной поверхности жидкости значению поверхностной плотности заряда, приводит к выходу за пределы области применимости теории пограничного слоя, и построенная теория перестает работать. Действительно, упрощение модельной задачи основано на малости толщины пограничного слоя δ по сравнению с характерным линейным продольным масштабом возмущения свободной поверхности жидкости — длиной волны λ. Учитывая выражения (34), можно получить ограничение области регулярности принятых упрощений по величине безразмерного параметра вязкости

$$\frac{\delta}{\lambda} \ll 1 \Rightarrow \frac{D^2\delta_L^2}{\lambda^2} \ll 1 \Rightarrow \nu \ll \frac{4\pi^2\omega}{2k^2D^2}.$$

Для принятых в расчетах значений $k = 2$, $\chi = 0.3$, $D = 4$ правая часть последнего соотношения составляет ~ 0.4 и, следовательно, верхняя граница параметра $\nu \sim 0.04$, что и подтверждается расчетами.

На рис. 5 приведены зависимости отношения δ/λ от безразмерного волнового числа (обезразмеренного на радиус струи), рассчитанные для незаряженной струи и различных значений безразмерного коэффициента кинематической вязкости. Диапазон изменения безразмерного волнового числа λ естественным образом характеризуется неравенствами $0 < \lambda < 2\pi$, где верхний предел определяется условием обращения в нуль частоты в определении характерного масштаба пограничного слоя: $\delta_L \equiv \sqrt{2\nu/\omega}$ (что соответствует проявлению капиллярной неустойчивости цилиндрической

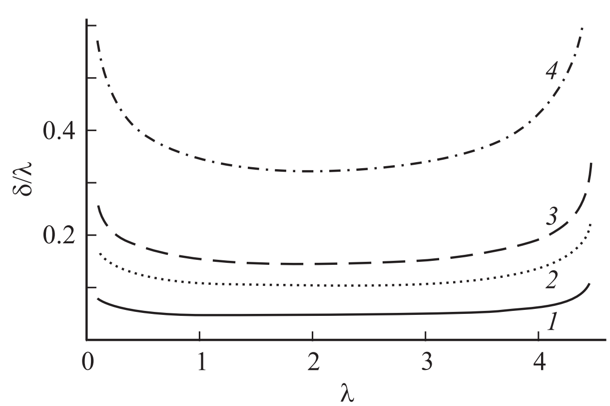

Рис. 5. Зависимости отношения толщины пограничного слоя к длине волны δ/λ от безразмерной длины волны, рассчитанные при $D = 4$, $\chi = 0$ ($W = 0$) и различных значениях безразмерного коэффициента кинетической вязкости жидкости: *1* — $\nu = 0.001$, *2* — 0.005, *3* — 0.01, *4* — 0.05.

струи, сопровождающейся ее разбиением на отдельные капли под действием сил поверхностного натяжения, — см., например, [12,16,17]).

При $\lambda \geq 2\pi$ частота s из комплексной величины становится чисто вещественной, что означает смену затухающего приодического волнового движения поверхности струи для волн из диапазона $0 < \lambda < 2\pi$ на апериодическое с растущей во времени амплитудой в диапазоне $\lambda \geq 2\pi$ (при этом квадрат мнимой части комплексной частоты s переходит из области положительных значений через нуль в область вещественных отрицательных значений, а положение такого перехода определяется условием $\omega^2 = 0$ [12]). Из выражения для δ_L видно, что при $\omega \to 0$ толщина пограничного слоя неограниченно увеличивается. Это соответствует распространению вихревого движения на весь объем струи.

Из рис. 5 видно, что левые и правые концы кривых загибаются кверху, что означает ограниченную применимость теории пограничного слоя в соответствующих диапазонах длин волн. Левые концы кривых поднимаются при $\lambda \to 0$ из-за того, что в дроби δ/λ длина волны стоит в знаменателе. Если построить чистые зависимости $\delta = \delta(\lambda)$, то при $\lambda \to 0$ они независимо от величины коэффициента кинематической вязкости сходятся в начале координат. Иными словами, при $\lambda \to 0$ толщина пограничного слоя также стремится к нулю $\delta \to 0$, но несколько медленнее, чем $\sim \lambda$. Правые концы кривых на рис. 5 поднимаются при $\lambda \to 2\pi$ за счет стремления частоты волны при таком переходе к нулю и соответствующего неограниченного роста толщины пограничного слоя.

Поскольку обезразмеривание коэффициента кинематической вязкости проведено на $\sqrt{\sigma R/\rho}$, то по заданному значению безразмерного коэффициента кинематической вязкости, например $\nu = \nu_*$, для конкретной жидкости можно найти минимальный радиус струи, для которого еще можно использовать обсуждаемую теорию пограничного слоя: $R_{\min} = \rho\nu^2/\sigma\nu_*^2$. Так, полагая, согласно рис. 5, что необходимую точность расчетов может обеспечить безразмерный коэффициент кинематической вязкости $\nu = \nu_* = 0.01$, для воды можно найти $R_{\min} \approx 150\,\mu$m. При $\nu = \nu_* = 0.05$ для воды можно найти $R_{\min} \approx 6\,\mu$m.

Из сказанного выше следует, что предлагаемая модификация теории пограничного слоя применима для расчетов волновых течений жидкости в струе маловязкой жидкости в диапазоне длин капиллярных волн, по отношению к которым струя устойчива $0 < \lambda < 2\pi$, за исключением некоторых окрестностей (зависящих от величины безразмерного коэффициента кинематической вязкости) границ диапазона. Наличие на струе вязкой электропроводной жидкости электрического заряда приводит к некоторому смещению правой границы диапазона $0 < \lambda < 2\pi$ в сторону меньших значений длин волн, поскольку электрический заряд на струе играет дестабилизирующую роль для всех волн из обсуждаемого диапазона [12].

Заключение

Теория пограничного слоя может быть использована для аналитического расчета течений, связанных с капиллярными волнами на свободной поверхности струи маловязкой жидкости, и для исследования устойчивости заряженной струи. Более простая математическая процедура решения задачи расчета течений в заряженной струе вязкой жидкости в рамках развитой теории пограничного слоя по сравнению с процедурой анализа точной математической модели позволяет надеяться на снижение трудоемкости расчета нелинейных волн на поверхности струи вязкой электропроводной жидкости.

Работа выполнена при поддержке грантов РФФИ № 05-08-01147-а и 06-01-00066-а.

Список литературы

[1] *Longuet-Higgens M.S.* // Royal. Soc. London. Trans. Ser. A. 1953. Vol. 245. N 903. P. 535–581.

[2] *Longuet-Higgens M.S.* // J. Fluid Mech. 1992. Vol. 240. P. 659–679.

[3] *Fedorov A.V., Melville W.K.* // J. Fluid Mech. 1998. Vol. 354. P. 1–42.

[4] *Wu J.Z.* // Phys. Fluid. 1995. Vol. 7. N 10. P. 2375–2395.

[5] *Lundgren T., Koumoutsakos P.* // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 382. P. 351–366.

[6] *Pozrikidis C.* // J. Fluid Mech. 2000. Vol. 425. P. 335–366.

[7] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 8. С. 19–28.

[8] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 3. С. 21–28.

[9] *Жаров А.Н., Ширяева С.О., Жарова И.Г., Григорьев А.И.* // ЭОМ. 2007. № 5. С. 39–47.

[10] *Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 3. С. 5–13.

[11] *Жаров А.Н., Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 12. С.33–42.

[12] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В.* Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2007. 340 с.

[13] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Левчук Т.В., Рыбакова М.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 5. С.5–12.

[14] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Святченко А.А.* Классификация режимов работы электродинамических источников ионов. Препринт ИМ РАН № 25. Ярославль, 1993. 118 с.

[15] *Аметистов Е.В., Блаженков В.В., Городков А.К.* и др. Монодиспергирование вещества: принципы и применение / Под ред. В.А. Григорьева. М.: Энергоатомиздат, 1991. 336 с.

[16] *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.

[17] *Левич В.Г.* Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 700 с.