

01;04

Формирование функции распределения убегающих электронов в сильных полях импульсных газовых разрядов

© Д.С. Никандров

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,
195251 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: NikandrovDS@mail.ru

(Поступило в Редакцию 14 марта 2008 г.)

Построено упрощенное уравнение Больцмана, описывающее убежание электронов в слабоионизованном газе. Электрические поля предполагаются настолько сильными, что все электроны оказываются убегающими, а функция распределения электронов — сильно анизотропной. Уравнение решено аналитически и показано, что в относительно слабых полях имеют место экспоненциальный рост электронной плотности во времени и экспоненциально убывающая зависимость функции распределения от импульса. В достаточно сильных полях реализуются логарифмический рост плотности электронов со временем и немонотонная зависимость функции распределения от импульса. Получены характерные масштабы времени и энергий, определяющие различные сценарии.

PACS: 52.80.-s; 51.10.+y

Введение

Если за короткое время (1–100 ns) к разрядному промежутку порядка 1 см прикладывается высокое напряжение (10–100 kV), то происходит инициирование импульсного пробоя. Такие разряды находят широкое применение в приложениях [1,2]. Они соответствуют оптимальным по энерговыделению параметрам ионизации [3].

Самосогласованная теория импульсного пробоя с предварительной ионизацией, разработанная ранее [4], предполагала локальную ионизацию и подвижность электронов. В практических приложениях и экспериментах с импульсными разрядами условия локальности и отсутствия убегающих электронов обычно не выполняются. Это происходит из-за сильных полей и(или) из-за низкой плотности газа, в котором инициируется пробой. Отсутствие локальности в ионизационных процессах и процессах переноса в сильных полях приводит к необходимости решать кинетическое уравнение.

История исследований явления убежания электронов в сильных электрических полях подробно изложена в [5]. Здесь стоит отметить, что первая публикация, где было высказано предположение о принципиальной возможности непрерывного ускорения заряженных частиц даже в плотных газах принадлежит, по-видимому, Вильсону [6]. В середине 1960-х гг. теория убегающих электронов в полностью ионизированной плазме была развита Драйсером, Гуревичем, Коврижных [7–9] и многими другими в связи с проблемой управляемого термоядерного синтеза.

В настоящей статье рассматривается вопрос о формировании функции распределения убегающих электронов в слабоионизованном газе импульсного разряда. При этом электрические поля предполагаются настолько сильными, что все свободные электроны переходят в

режим убежания, а функция распределения оказывается сильно анизотропной.

Для приложений импульсных газовых разрядов интерес представляют случаи не очень больших промежутков порядка сантиметра [5]. В этих условиях электроны не могут набрать кинетическую энергию, сравнимую с mc^2 . По этой причине ограничимся только нерелятивистским случаем.

Общий вид кинетического уравнения для убегающих электронов, на основе которого проведен анализ, приведен в первом разделе. Во втором разделе выводится упрощенное кинетическое уравнение, в третьем разделе приведено решение уравнения и показано, что в зависимости от отношения (52) реализуются два принципиально разных сценария процесса убежания электронов в газовом разряде.

1. Кинетическое уравнение для убегающих электронов

Взаимодействие достаточно быстрого электрона ($\epsilon > 1-10$ keV для воздуха) с нейтральным атомом носит характер кулоновского рассеяния на ядре и атомарных электронах [10,11]. Резерфордское сечение уменьшается с ростом скорости убегающего электрона, и, таким образом, быстрый электрон, ускоряясь, попадет в область низких сечений и убежит от столкновений. В этом смысле нет принципиальной разницы между слабоионизованной плазмой газового разряда и полностью ионизованной плазмой. Но все же разница в процессе убежания в полностью ионизованной плазме и газовом разряде есть. Она состоит в учете размножения электронов, выбитых из нейтральных атомов.

Общий вид уравнения Больцмана для убегающих электронов в слабоионизованном газе можно найти

в [12–14]. Так как в лабораторной плазме газового разряда релятивистскими эффектами обычно можно пренебречь [5], то уравнение имеет вид¹

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} - \left(\frac{(1-\mu^2)}{p} \frac{\partial f}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial f}{\partial p} \right) eE = \delta f_{df} + \delta f_{sc} + \delta_{ion} f, \quad (1)$$

$$\delta f_{df} = \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 F_D f), \quad (2)$$

$$\delta f_{sc} = \frac{F_D}{4p} \left(\frac{Z}{2} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1-\mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right), \quad (3)$$

$$\delta_{ion} f = \frac{Np}{m} \int d\Omega' \int_{2\varepsilon+1}^{\infty} \frac{W}{\varepsilon} f(W, \mu') \sigma(W, \varepsilon, \xi') dW. \quad (4)$$

Здесь $f(t, x, p, \mu)$ — функция распределения убегающих электронов; p — импульс электрона, ε — его энергия; m — масса электрона, μ — косинус угла, который составляет направление импульса и вектор электрического поля E , а ξ' — угол между направлениями импульсов налетающего и выбитого электронов. Интеграл столкновений состоит из трех слагаемых (2)–(4). Так как энергия убегающего электрона много больше ионизационных потенциалов, то потери энергии в правой части (1) можно считать непрерывными. Первое слагаемое (2) в правой части кинетического уравнения (1) соответствует непрерывному замедлению частиц вследствие трения о нейтральные атомы. Выражение для динамической силы трения F_D , описывающей этот процесс, получено Бете [8,9]. В нерелятивистском случае эта сила имеет вид

$$F_D = \frac{4\pi m e^4 N Z}{p^2} \ln \left(\frac{p^2}{mI} \right), \quad (5)$$

где Z — заряд ядра, а N — плотность газа. Энергия I соответствует характерной энергии связи электрона с атомом. Для ее определения обычно используют оценку [20]:

$$I \approx 13 \text{ eV } Z. \quad (6)$$

Более точные оценки для водорода — $I \approx 15 \text{ eV}$, для гелия — $I \approx 30 \text{ eV}$, а в воздухе — $I \approx 80 \text{ eV}$ [8]. Второе слагаемое (3) в правой части (1) определяет рассеяние, а третье слагаемое (4) описывает процессы рождения новых электронов при ионизации.

Кинетическое уравнение достаточно сложно. Упростим выражения, входящие в исходную систему (1)–(4) для случая достаточно сильных полей, когда можно пренебречь силой динамического трения и рассеянием.

¹ Заменять кинетический подход гидродинамическим, вводя средние энергии и скорости [15,16], можно только с большой осторожностью и только в том случае, когда такие средние величины имеют смысл [17].

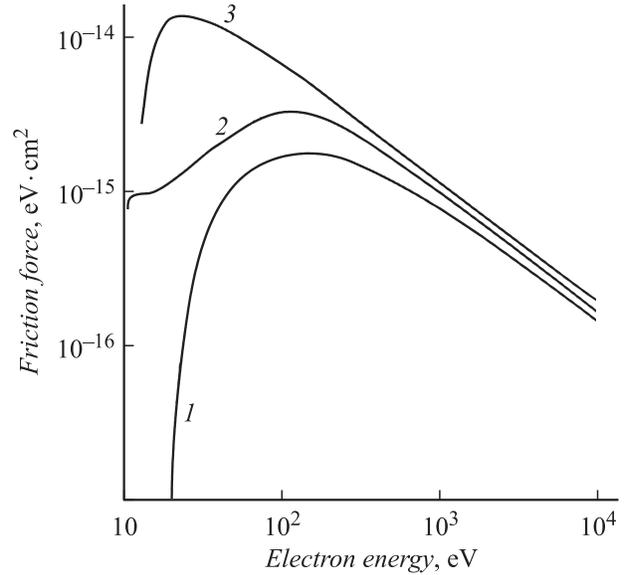


Рис. 1. Зависимость силы динамического трения от энергии быстрых электронов в H_2 и He . Кривая 1 соответствует расчету [21] для He , 2 — [22] для H_2 , 3 — закону Бете (5).

1.1. Сила трения в сильных электрических полях

Сила динамического трения (5) в нерелятивистском пределе имеет максимум при энергиях электрона порядка $\varepsilon \approx 18Z$. В приближении Бете–Блоха ее максимальное значение равно

$$F_{D \max} = \frac{4\pi e^4 N Z}{2.7I} \approx 10^{-31} (\text{N cm}^3) [\text{N}]. \quad (7)$$

Из оценок (6) и (7) видно, что максимальная сила трения незначительно зависит от заряда ядра. Следует отметить, что первое — наблюдаемые значения $F_{D \max}$ оказываются значительно ниже теоретических [8], сам максимум более пологий, чем в (5). И второе — формула (5) неверна при энергиях электрона ε ниже I , т.е. на растущей ветви $F_D(\varepsilon)$. Это следует из того, что формула получена при помощи борновского приближения. Кроме этого, при энергиях $\varepsilon \approx I$ нельзя пользоваться приближением непрерывного замедления электрона.

Результаты расчетов силы динамического трения и выражение (5) приведены на рис. 1.

Если предположить электрические поля настолько сильными, что

$$eE \gg F_{D \max}, \quad (8)$$

то в кинетическом уравнении можно пренебречь силой трения (2) полностью. В этом случае

$$eE \mu \frac{\partial f}{\partial p} \gg \frac{1}{p^2} \frac{\partial}{\partial p} (p^2 E_D f), \quad (9)$$

т.е. приближение (8) означает, что электрическое поле столь сильное, что электрон не может потерять энергию,

набираемую на длине свободного пробега ни при каком упругом или неупругом процессе. При этом неважно, какой энергией обладает электрон — его ускорение будет определяться только электрическим полем.

Для разрядов при атмосферном давлении величина поля, удовлетворяющая критерию (8), оказывается порядка 100 kV/cm. Поля, необходимые только для пробоя воздушного промежутка, должны составлять 30 kV/cm [23]. Но если учесть, что максимальная сила трения (7) завышена, и ее наблюдаемые величины на порядок ниже, то на практике условие (8) может выполняться даже при атмосферном давлении.

1.2. Рассеяние

Интеграл столкновений (3) описывает рассеяние быстрого электрона на ядрах атома и атомарных электронах. Кулоновские столкновения приводят к рассеянию на малые углы. Поэтому общий вид интеграла столкновений (3) соответствует диффузии по углу.

Аналогично электрической силе, которая препятствует силе трения, в левой части кинетического уравнения (1) слагаемое

$$eE \frac{(1 - \mu^2)}{p} \frac{\partial f}{\partial \mu}$$

препятствует диффузии по углам. Оно соответствует потоку в пространстве углов, вызванному поворотом электронной траектории параллельно электрическому полю. В том случае, когда

$$eE \frac{(1 - \mu^2)}{p} \frac{\partial f}{\partial \mu} \gg \frac{F_D}{4p} \left(\frac{Z}{2} + 1 \right) \frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right), \quad (10)$$

рассеянием можно пренебречь.

Для ядер атомов с малым Z условие (10) сводится к условию (8). Это означает, что при рассеянии на атомах с малым Z характерное время (длина), за которое быстрый электрон потеряет свою энергию, одного порядка со временем (длиной), в течение которого быстрый электрон рассеется на прямой угол. Для атомов с большим Z длина торможения оказывается больше длины рассеяния.

Таким образом, условие, при выполнении которого функцию распределения убегающих электронов можно считать сильно анизотропной, имеет вид

$$eE \gg \frac{F_{D, \max} Z}{8}. \quad (11)$$

В численных расчетах сильная анизотропия функции распределения получена, например, в [14]. Наиболее подвержены рассеянию и торможению электроны с энергией порядка I . Ниже условия (8) и (11) будут предполагаться выполненными.

1.3. Ионизация

Принципиальное отличие явления убегания электронов в слабоионизованном газе от этого явления в полностью ионизованной плазме состоит в существовании процесса ионизации. Интеграл столкновений (4) определяет появление новых свободных электронов в результате ионизации. Двойное сечение в (4), отнесенное к кинетической энергии

$$d\sigma_\varepsilon = \sigma(W, \varepsilon) d\varepsilon, \quad (12)$$

определено как функция энергии ε , переданной от убегающего электрона с энергией W выбитому электрону.

Источник выбитых электронов в кинетическом уравнении соответствует появлению в единицу времени в единице фазового объема новых электронов:

$$\delta_{\text{ion}} f = \frac{dN_i}{dt dp dV}.$$

В этом выражении dV — это элемент объема, приходящегося на мишень. Если плотность нейтрального газа N , то

$$\delta_{\text{ion}} f = N \frac{dN_i}{dt dp}.$$

По смыслу дифференциального сечения число частиц, появившихся в единицу времени с энергиями в интервале $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$, равно

$$\frac{dN_i}{dt d\varepsilon} = \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\varepsilon} J,$$

где J — плотность потока убегающих электронов, производящих ионизацию. Так как само сечение (12) явным образом зависит от энергии W убегающего электрона, то

$$\frac{dN_i}{dt d\varepsilon} = \left| \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\varepsilon} \frac{\mathbf{p}}{m} f(\mathbf{p}) dp_x dp_y dp_z \right|,$$

или учитывая сильную анизотропию функции распределения

$$\frac{dN_i}{dt d\varepsilon} = \int_0^\infty \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\varepsilon} f(W) dW. \quad (13)$$

Таким образом, интеграл столкновений, определяющий появление выбитых электронов, принимает вид

$$\delta_{\text{ion}} f = N \frac{dN_i}{dt dp} = N \frac{dN_i}{dt d\varepsilon} \frac{d\varepsilon}{dp} = \frac{Np}{m} \int_0^\infty \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\varepsilon} f(W) dW, \quad (14)$$

где N — плотность атомов в газе.

Основное рассеяние при неупругих столкновениях убегающих электронов с атомами происходит на малые углы. Физически заранее очевидно, что в этом случае можно рассматривать атомные электроны как свободные, а столкновение с атомами — как упругое

столкновение падающего электрона с первоначально покоящимися атомными электронами [10]. Такой подход использовался в работе [11], посвященной интегралу столкновений убегающих электронов. В этой работе функция распределения электронов предполагалась сферически симметричной. Принципиальное отличие настоящего подхода от [11] состоит в предположении сильной анизотропной функции распределения.

В качестве сечения (12) выберем формулу Резерфорда, учитывающую различимость убегающего и выбитого электронов, а также порог ионизационного процесса:²

$$d\sigma_\varepsilon = \frac{\pi Ze^4 \eta(\varepsilon - 1) \eta(W - \varepsilon)}{W \varepsilon^2} d\varepsilon. \quad (15)$$

Здесь W — энергия убегающего электрона, производящего ионизацию, ε — энергия, переданная выбитому электрону, I — характерная энергия ионизации, а η — функция Хевисайда.

Формула сечения Резерфорда (15) применима только при $W \gg I$. В области энергий $W \approx I$, т.е. при $W \approx (10-100)$ eV, сечение ионизации имеют пологий максимум. Поэтому в области таких энергий можно использовать приближение [25]

$$d\sigma_\varepsilon = \delta(\varepsilon) \sigma_{\max} d\varepsilon. \quad (16)$$

Другими словами, будем считать, что при $W \approx 10-100$ eV сечения практически постоянны, а выбитые электроны рождаются с очень низкой кинетической энергией. Необходимо объединить свойства сечений ионизации в области высоких энергий, где применимо представление об атомарных электронах, как о свободных электронах с сечениями при $W \approx I$.

Из выражений (15), (16) видно, что медленных электронов всегда рождается много больше, чем быстрых. Кроме того, быстрые электроны, убегая от столкновений, редко участвуют в размножении. По этим причинам сечение (15) удобно аппроксимировать

$$\begin{aligned} d\sigma_\varepsilon \frac{\pi Ze^4 \eta(\varepsilon - 1) \eta(W - \varepsilon)}{W \varepsilon^2} d\varepsilon &\approx \frac{\pi Ze^4}{W} \delta(\varepsilon) d\varepsilon \\ &\times \int_0^\infty \frac{\eta(\varepsilon' - I) \eta(W - \varepsilon')}{\varepsilon'^2} d\varepsilon' = \frac{\pi Ze^4}{W} \delta(\varepsilon) \left(\frac{1}{I} - \frac{1}{W} \right) d\varepsilon. \end{aligned} \quad (17)$$

Полученное выражение соответствует формуле Томсона для ионизации атомов. Формула (17) основана на приближении $W \gg I$, поэтому ее можно упростить

$$d\sigma_\varepsilon = \frac{\pi Ze^4}{IW} \delta(\varepsilon) d\varepsilon. \quad (18)$$

Сечение (18) убывает обратно пропорционально энергии быстрого электрона. Однако на основе квантовой

² В существующей литературе в основном используется сечение Моллера [10,24]. Однако, используя симметричное сечение невозможно различить выбитый и ионизовавший электроны, а кинетическое уравнение применимо только к свободным электронам.

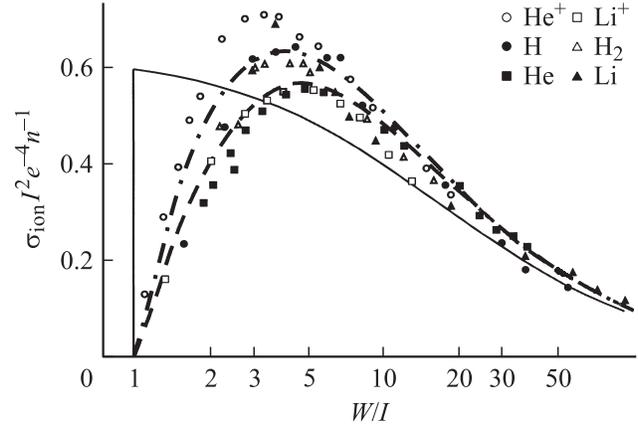


Рис. 2. Аппроксимации сечения ионизации [27] на основе экспериментальных данных. Штриховая кривая соответствует функции $f(x) = 10(x-1)(x+8)^{-1}(x+0.5)^{-1}$, штрихпунктир — функции $f(x) = 10(x-1)(x+8)^{-1}x^{-1}$. Сплошная кривая — аппроксимация (19), используемая в настоящей работе.

механики получается зависимость вида $\sigma \sim \ln(W)/W$. Но несмотря на это, расхождение численных результатов этих подходов невелико [26].

Сечение Томсона (10) позволяет легко объединить сечения ионизации при $W \gg I$ и $W \approx I$. Очевидно, что зависимость

$$d\sigma_\varepsilon = \frac{\sigma_{\max}}{1 + \pi^{-1} Z^{-1} e^{-4} \sigma_{\max} IW} \delta(\varepsilon) d\varepsilon \quad (19)$$

переходит в (18) при $W \gg I$ и в (16) в случае $W \approx I$.

Необходимо заметить, что существует большое число других аппроксимаций сечения ионизации. Эти аппроксимации более детально описывают зависимость $\sigma(W)$, но менее удобны для аналитического анализа. Некоторые из этих аппроксимаций представлены на рис. 2.

Таким образом, упрощенный интеграл столкновений (14), (19), описывающий появление новых электронов в результате актов ионизации, приобретает вид

$$\begin{aligned} \delta_{\text{ion}} f &= \frac{dN_i}{dt dp dV} = \frac{Np}{m} \int_0^\infty \frac{d\sigma_\varepsilon}{d\varepsilon} f(W) dW \\ &= \delta(\varepsilon) \frac{Np}{m} \int_0^\infty \frac{\sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max} IW}{\pi Ze^4}} f(W) dW. \end{aligned} \quad (20)$$

В качестве переменной интегрирования выберем импульс ионизирующего электрона $P = \sqrt{2mW}$, а в качестве независимой переменной $p = \sqrt{2m\varepsilon}$ — импульс выбитого электрона. Тогда интеграл столкновений равен

$$\delta_{\text{ion}} f = \frac{\delta(p)N}{m} \int_0^\infty \frac{\sigma_{\max} P}{1 + \frac{\sigma_{\max} I P^2}{2m\pi Ze^4}} f(P) dP. \quad (21)$$

Интеграл столкновений (21) имеет больцмановский вид, в котором сечение при больших P убывает обратно пропорционально квадрату импульса убегающего электрона.

2. Упрощенное кинетическое уравнение

В достаточно сильном поле выполняются условия (8) и (11). При этом можно пренебречь силой трения по сравнению с электрической силой Ee , а также рассеянием электронов. Используя интеграл столкновений (21), описывающий ионизацию, запишем кинетическое уравнение в виде

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \frac{\partial f}{\partial x} + eE \frac{\partial f}{\partial p} = \frac{\delta(p)N}{m} \int_0^{\infty} \frac{P\sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max}IP^2}{2m\pi Ze^4}} f(P)dP. \quad (22)$$

Уравнение (22) нелинейно. Поэтому в дальнейшем рассмотрении можно ограничиться только случаем начальной функции распределения в виде

$$f|_{t=0} = f_0(x, p; x_0, p_0) = n_0\delta(p - p_0)\eta(x - x_0). \quad (23)$$

Эта функция соответствует электронам, находящимся в области $x \geq x_0$ и имеющим импульс $p = p_0 > 0$. Любую начальную функцию распределения $F(x, p)|_{t=0}$ можно разложить в спектр $F_S = n_0^{-1}\partial F/\partial x$. При этом будет выполняться соотношение

$$F(x, p)|_{t=0} = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_S(x_0, p_0) f(x, p; x_0, p_0)|_{t=0} dx_0 dp_0. \quad (24)$$

Воспользовавшись линейностью уравнения (22) и зная спектр F_S , можно построить решение для любого момента времени

$$F(t, x, p) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F_S(x_0, p_0) f(t, x, p; x_0, p_0) dx_0 dp_0. \quad (25)$$

По функциям $f(x, p; x_0, p_0)$ можно построить функцию Грина для уравнения (22). Из (25) видно, что после интегрирования по частям интеграла по dx_0 следует

$$F(t, x, p) = \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} F(x_0, p_0) \frac{1}{n_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \right)_{t, x, p_0} dx_0 dp_0. \quad (26)$$

Таким образом, функция Грина задачи равна

$$\frac{1}{n_0} \left(\frac{\partial f}{\partial x_0} \right)_{t, x, p_0}. \quad (27)$$

В дальнейшем рассмотрении ограничимся случаем $x_0 = 0$

$$f|_{t=0} = f_0(x, p) = n_0\delta(p - p_0)\eta(x), \quad (28)$$

так как начальное условие (28) переходит в (23) при замене переменной $x \rightarrow x - x_0$. А эта замена не изменяет уравнения (22).

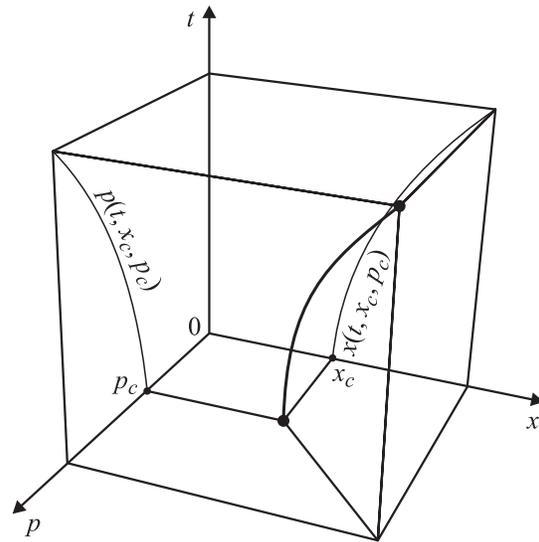


Рис. 3. Схематический вид характеристической кривой, являющейся решением системы (29), (30), в пространстве $\{t, x, p\}$.

2.1. Метод характеристик

Для решения (22) применим метод характеристик [28], который позволит свести интегро-дифференциальное уравнение (22) к интегральному уравнению.

Характеристики уравнения (22) $x(t, x_c, p_c)$ и $p(t, x_c, p_c)$ являются решениями системы

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad x|_{t=0} = x_c, \quad (29)$$

$$\frac{dp}{dt} = eE, \quad p|_{t=0} = p_c. \quad (30)$$

В случае отсутствия ионизации, что соответствует равной нулю правой части уравнения (22), при продвижении вдоль характеристик $x(t, x_c, p_c)$ и $p(t, x_c, p_c)$ решение было бы постоянным во времени (рис. 3). В случае ионизации, когда правая часть (22) не равна нулю, при движении вдоль характеристики, величина f изменяется со временем. Однако изменение функции f явно зависит от времени t , а от x_c, p_c зависит как от параметров. Из (22) следует, что $f(t, x_c, p_c)$ подчиняется уравнению

$$\begin{cases} \frac{df}{dt} = \left[\frac{\delta(p)N}{m} \int_0^{\infty} \frac{P\sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max}IP^2}{2m\pi Ze^4}} f(t, x, P)dP \right]_{\substack{x=x(t, x_c, p_c) \\ p=p(t, x_c, p_c)}} \\ f|_{t=0} = f_0(x_c, p_c). \end{cases} \quad (31)$$

Начальная задача (31) может быть легко проинтегрирована

$$f(t, x_c, p_c) = f_0(x_c, p_c) + \int_0^t \left[\frac{\delta(p)N}{m} \int_0^{\infty} \frac{P\sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max}IP^2}{2m\pi Ze^4}} f(t', x, P)dP \right]_{\substack{x=x(t', x_c, p_c) \\ p=p(t', x_c, p_c)}} dt'. \quad (32)$$

После замены порядка интегрирования в (32) интеграл по времени dt' берется благодаря дельта-функции $\delta(p(t', x_c, p_c))$

$$f(t, x_c, p_c) = f_0(x_c, p_c) + \frac{N}{Em} \int_0^\infty \frac{P\sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max}IP^2}{2m\pi Ze^4}} f \Big|_{\substack{t=\tilde{t}(x_c, p_c) \\ x=x(\tilde{t}, x_c, p_c) \\ p=P}} dP, \quad (33)$$

где \tilde{t} определяется как корень уравнения

$$p(\tilde{t}, x_c, p_c) = 0. \quad (34)$$

Для того чтобы записать функцию распределения в виде $f(t, x, p)$, необходимо обратно перейти от переменных $\{t, x_c, p_c\}$ к переменным $\{t, x, p\}$.

В случае постоянного и однородного электрического поля E решение системы (29), (30) выглядит особенно просто:

$$x = \frac{Ee}{2m} t^2 + \frac{p_c}{m} t + x_c, \quad (35)$$

$$p = Eet + p_c. \quad (36)$$

Таким образом, подставив (35), (36) в (33), находим, что функция распределения подчиняется интегральному уравнению

$$f(t, x, p) = n_0 \delta(p - Eet - p_0) \eta \left(x - \frac{pt}{m} + \frac{Ee}{2m} t^2 \right) + \frac{N}{Em} \int_0^\infty \frac{P\sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max}IP^2}{2m\pi Ze^4}} f \left(t - \frac{p}{Ee}, x - \frac{p^2}{2eEm^2}, P \right) dP. \quad (37)$$

Его удобно переписать в виде

$$f(t, x, p) = n_0 \delta(p - Eet - p_0) \times \eta \left(x - \frac{p_0 t}{m} - \frac{Ee}{2m} t^2 \right) + S \Big|_{\substack{t=t-\frac{p}{Ee} \\ x=x-\frac{p^2}{2eEm^2}}}, \quad (38)$$

где введено обозначение S , имеющее смысл источника электронов

$$S(t, x) = \frac{N}{Em} \int_0^\infty \frac{P\sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max}IP^2}{2m\pi Ze^4}} f(t, x, P) dP. \quad (39)$$

Первое слагаемое в (38) соответствует начальному условию (28). Электроны, которые будем называть начальными, постоянно ускоряются в электрическом поле, а граница области, занятой ими, постоянно смещается вдоль оси x (рис. 4).

Второе слагаемое в (38) соответствует выбитым при ионизации электронам (рис. 5). Плотность этих электронов в точке x в момент времени t , как видно из (38), пропорциональна источнику этих электронов (39) в момент

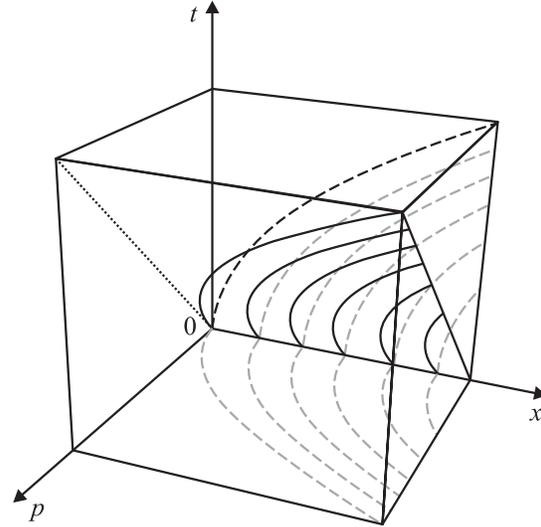


Рис. 4. Схематический вид характеристических кривых для начальных электронов из соотношения (28) (сплошные кривые) и их проекция (светлые штриховые). Пунктир соответствует свободному ускорению начальных электронов в постоянном поле, а штриховая кривая, построенная на основе (40), ограничивает подобласть, занятую этими электронами на плоскости $\{x, t\}$.

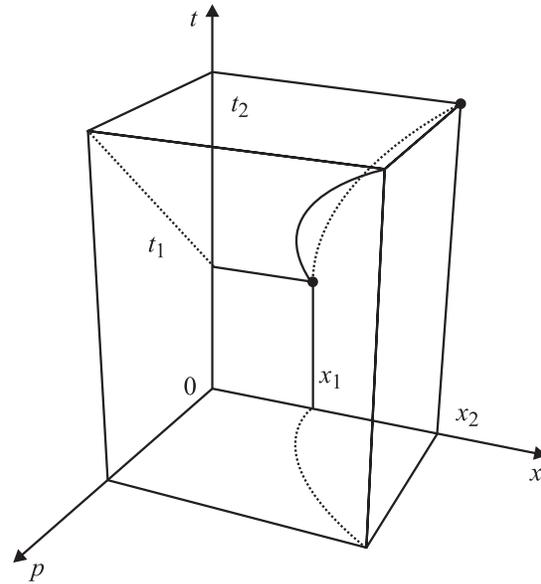


Рис. 5. Схематический вид характеристической кривой вторичного электрона (сплошная кривая) и ее проекции (пунктир) для системы уравнений (29), (30). Вторичный электрон, рожденный в точке x_1 в момент времени t_1 , ионизует атом, рождая электрон в точке x_2 в момент времени t_2 .

времени $t - p/Ee$ и в точке $x - p^2/2eEm^2$. Действительно, электрон с импульсом p , в точке x , в момент t был рожден с нулевым импульсом в точке $x - p^2/2eEm^2$, в момент $t - p/Ee$. Поэтому и количество электронов с импульсом p в точке x в момент времени t будет точно

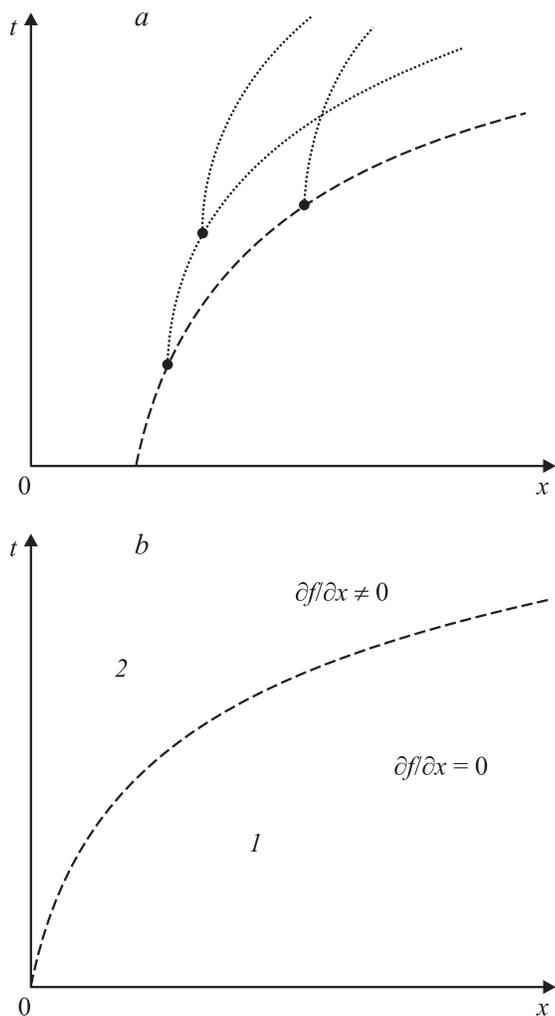


Рис. 6. Проекция характеристических кривых на плоскость $\{x, t\}$ для начальных (штриховые кривые) и вторичных (пунктир) электронов. *a* — черными кружками обозначены моменты рождения вторичных электронов; *b* — разделение области $x > 0$ на подобласти 1 и 2 кривой (40).

таким, количество электронов, рожденных в момент времени $t - p/Ee$ в точке $x - p^2/2eEm^2$.

Это свойство уравнения (38) непосредственно следует из того, что электроны рождаются с нулевым импульсом и ускоряются постоянной силой eE . Графически этот процесс представлен на рис. 6. Согласно начальному условию (28), в области $x < 0$ электронов нет, но, как видно из (38), это остается верным и в любой другой момент времени. Область $x > 0$ делится на две подобласти кривой:

$$x = \frac{Ee}{2m} t^2 + \frac{p_0}{m} t. \quad (40)$$

В первой из этих подобластей кривая (1 на рис. 6) ниже этой кривой присутствуют начальные электроны (28). Функция распределения $f(t, p)$ в этой подобласти не зависит от x . Во второй подобласти (2 на рис. 6)

начальных электронов нет. Однако ионизация вторичными электронами там продолжается (рис. 5), и функция распределения явно зависит от координаты x .

2.2. Решение в пространстве

Из анализа полученного интегрального уравнения (38) видно, что существует граница (40), разделяющая две подобласти в области $\{x > 0, t\}$. Наиболее важной оказывается подобласть, в которой существуют начальные электроны, а функция распределения не зависит от координаты. Позже будет показано, что именно в этой подобласти происходит основная ионизация. Во второй подобласти, где начальных электронов нет, функция распределения оказывается много меньшей, чем в первой подобласти (см. Приложение II).

Из интегрального уравнения (38) видно, что функция распределения $f(t, p)$ в интересующей нас первой подобласти автомодельно зависит от значений t, p :

$$f(t, p) = \frac{n_0}{Ee} \delta\left(\frac{p_0}{Ee} + \tau\right) \Big|_{\tau=t-\frac{p}{Ee}} + S \Big|_{\tau=t-\frac{p}{Ee}},$$

$$S(\tau) = \frac{N}{Em} \int_0^\infty \frac{P\sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max} P^2}{2m\pi Ze^4}} f(\tau, P) dP. \quad (41)$$

Другими словами, функция распределения зависит от времени и импульса только через их автомодельную комбинацию

$$\tau = t - \frac{p}{Ee}. \quad (42)$$

Действительно, так как электроны рождаются с нулевым импульсом, то число частиц в интервале $0 < p < dp$ в момент времени $t = 0$ в точности равно числу частиц в интервале $p' < p < p' + dp$ в момент времени $\tau = p'/eE$. Используя переменную (42), выражение (41) можно переписать в виде

$$f(\tau) = \frac{n_0}{Ee} \delta\left(\frac{p_0}{Ee} + \tau\right) + \frac{N}{Em} \int_0^\infty \frac{P\sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max} P^2}{2m\pi Ze^4}} f\left(\tau - \frac{P}{eE}\right) dP \quad (43)$$

или, произведя замену переменной интегрирования,

$$f(\tau) = \frac{n_0}{Ee} \delta\left(\frac{p_0}{Ee} + \tau\right) + \frac{EeN}{m} \int_0^\infty \frac{\tau'\sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max} E^2}{2m\pi Ze^2} \tau'^2} f(\tau - \tau') d\tau'. \quad (44)$$

Как и прежде, в выражении (44) первое слагаемое соответствует постоянно ускоряющимся начальным электронам (28), а второе слагаемое соответствует выбитым электронам.

Упростим второе слагаемое в (44), заменив интегральное уравнение (44) уравнением Вольтерра второго рода с симметричным ядром. Из физических соображений ясно, что функция распределения f в момент времени t тождественно равна нулю при $p > eEt \geq 0$. Исключение, как видно из (43), составляют только начальные электроны с импульсом $p = p_0 + eEt$. Это означает, что $f(\tau) \neq 0$ только при $\tau > 0$ или $\tau = -p_0/eE$. Следовательно,

$$f(\tau) = \frac{n_0}{Ee} \delta\left(\frac{p_0}{Ee} + \tau\right) + \frac{EeN\eta(\tau)}{m} \int_0^\tau \frac{\tau' \sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max} I E^2}{2\pi Z e^2} \tau'^2} f(\tau - \tau') d\tau' + \frac{EeN\eta(\tau)}{m} \int_{\tau + \frac{p_0}{Ee} - 0}^{\tau + \frac{p_0}{Ee} + 0} \frac{\tau' \sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max} I E^2}{2\pi Z e^2} \tau'^2} f(\tau - \tau') d\tau'. \quad (45)$$

Если в третье слагаемое формулы (45) подставить выражение $f(\tau)$ из (45) и проинтегрировать его, то получим:

$$f(\tau) = \frac{n_0}{Ee} \delta\left(\frac{p_0}{Ee} + \tau\right) + \frac{n_0 N \eta(\tau)}{m} \frac{\left(\frac{p_0}{Ee} + \tau\right) \sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max} I E^2}{2\pi Z e^2} \left(\frac{p_0}{Ee} + \tau\right)^2} + \frac{EeN\eta(\tau)}{m} \int_0^\tau \frac{\tau' \sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max} I E^2}{2\pi Z e^2} \tau'^2} f(\tau - \tau') d\tau'. \quad (46)$$

В этом выражении фигурирует квадрат характерного времени $(\sigma_{\max} I E^2)/(2\pi Z e^2)$, равного времени, в течение которого электрон находится в области плато сечения (16). Действительно, характерный импульс электрона, начиная с которого сечение ионизации начинает спадать обратно пропорционально его энергии, равен

$$p^* = \sqrt{\frac{2\pi Z m e^4}{\sigma_{\max}}} I. \quad (47)$$

Именно при таком импульсе сечения (16) и (18) сравниваются. Время, в течение которого убегающий электрон имеет импульс меньше (47) и находится в области плато сечения, равно соответственно

$$\tau^* = \sqrt{\frac{2\pi Z m e}{\sigma_{\max} I E}}. \quad (48)$$

За это время электрон проходит характерное расстояние

$$\lambda^* = \frac{2\pi Z e^3}{\sigma_{\max} I E}. \quad (49)$$

Введем время ξ , нормированное на характерное время τ^* ,

$$\xi = \sqrt{\frac{\sigma_{\max} I E}{2\pi Z}} \frac{E}{e} \tau. \quad (50)$$

После замены переменной интегрирования уравнение (46) принимает вид интегрального уравнения Вольтерра второго рода с симметричным ядром

$$f(\xi) = n_0 \delta\left(p_0 + \xi e^2 \sqrt{\frac{2\pi Z}{\sigma_{\max} I}}\right) + \frac{n_0 N \eta(\xi)}{m} \frac{\left(\frac{p_0}{Ee} + \frac{\xi e}{E} \sqrt{\frac{2\pi Z}{\sigma_{\max} I}}\right) \sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max} I E^2}{2\pi Z e^2} \left(\frac{p_0}{Ee} + \frac{\xi e}{E} \sqrt{\frac{2\pi Z}{\sigma_{\max} I}}\right)^2} + \frac{2\pi Z e^3 N \eta(\xi)}{IE} \int_0^\xi \frac{\xi - \xi'}{1 + (\xi - \xi')^2} f(\xi') d\xi'. \quad (51)$$

Решение такого уравнения всегда может быть записано в квадратурах (см. Приложение I). Простое аналитическое выражение возможно в двух предельных случаях, определяемых предынтегральным множителем в (51)

$$\frac{2\pi Z e^3 N}{IE}. \quad (52)$$

Физический смысл этого безразмерного параметра соответствует числу ионизаций, которое производит убегающий электрон, еще не попавший в область резерфордовской зависимости сечения ионизации от энергии. Действительно, если перемножить характерную скорость p^*/m , плотность нейтральных атомов N , сечение в области плато и время τ^* , в течение которого электрон остается в этой области, то получается выражение (52), определяющее сценарий процесса убегания.

2.2.1. Случай $2\pi Z e^3 N \geq IE$

В случае относительно невысоких электрических полей электрон долго находится в области плато сечения ионизации. За это время убегающему электрону удается выбить много вторичных электронов. Такому сценарию соответствует условие

$$\frac{2\pi Z e^3 N}{IE} \geq 1. \quad (53)$$

Функция $f(\xi)$ при этом оказывается экспоненциально растущей. Это непосредственно следует из физических соображений и экспоненциального роста резольвенты уравнения (51) (см. Приложение I). Другими словами, убегающих электронов в области плато сечения ионизации, при выполнении (53), всегда много больше, чем электронов вне этой области.

Для этих электронов сечение ионизации можно считать постоянным, а функцию распределения — подчиня-

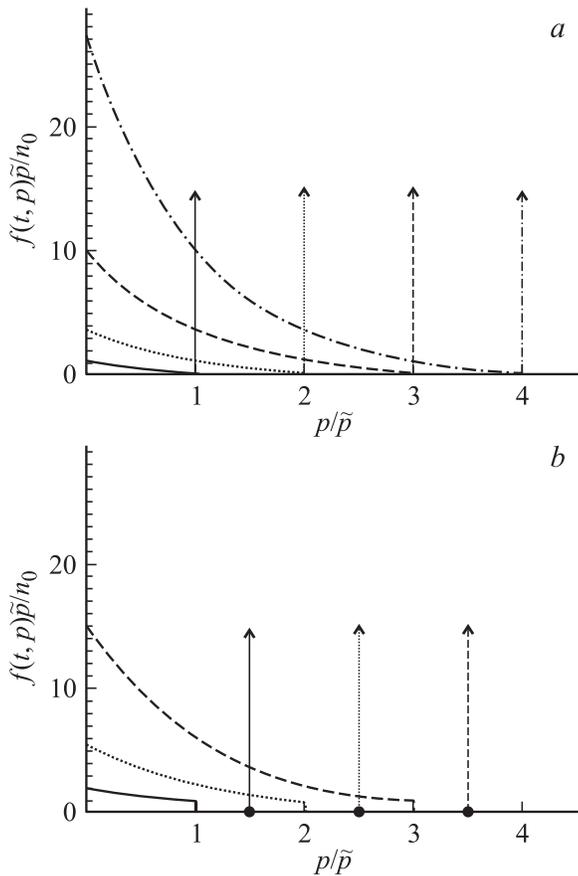


Рис. 7. Графики функций распределения убегающих электронов в зависимости от безразмерного импульса для случая относительно слабых полей, рассчитанные по формуле (56). *a* — начальный импульс электронов $p_0 = 0$; *b* — $p_0 = 0.5\tilde{p}$. Сплошные кривые соответствуют $t = \tilde{p}/eE$, пунктир — $t = 2\tilde{p}/eE$, штриховые кривые — $t = 3\tilde{p}/eE$, штрихпунктирная кривая — $t = 4\tilde{p}/eE$. Импульс нормирован на \tilde{p} (55).

ющейся уравнению

$$f(\xi) = n_0 \delta \left(p_0 + \xi e^2 \sqrt{\frac{2m\pi Z}{\sigma_{\max} I}} \right) + \frac{n_0 N \sigma_{\max} \eta(\xi)}{mEe} \times \left(p_0 + \xi e^2 \sqrt{\frac{2m\pi Z}{\sigma_{\max} I}} \right) + \frac{2\pi Ze^3 N \eta(\xi)}{IE} \int_0^\xi (\xi - \xi') f(\xi') d\xi' \quad (54)$$

Интегрирование этого уравнения методом, указанным в Приложении I, дает

$$\tilde{p} = \sqrt{\frac{meE}{N\sigma_{\max}}}, \quad (55)$$

$$f(t, p) = n_0 \delta(p_0 - p + eEt) + \begin{cases} \frac{n_0 p_0}{\tilde{p}^2} \operatorname{ch}\left(\frac{eEt-p}{\tilde{p}}\right) + \frac{n_0}{\tilde{p}} \operatorname{sh}\left(\frac{eEt-p}{\tilde{p}}\right), & eEt - p \geq 0 \text{ и } p \geq 0, \\ 0, & eEt - p < 0 \text{ или } p < 0. \end{cases} \quad (56)$$

Из решения (56) видно, что медленных электронов экспоненциально больше, чем быстрых. Характерный масштаб f не зависит от времени и равен \tilde{p} (рис. 7). Из физических соображений условие применимости приближения постоянного сечения сводится к условию, согласно которому \tilde{p} много меньше p^* . А это условие совпадает с критерием (53), еще раз подтверждая приближение.

Важно заметить, что, строго говоря, условие (53) противоречит условию (8). Если максимальная сила трения, полученная Бете, много меньше величины электрического поля, то условие (53) не выполняется. Однако, как было отмечено выше, наблюдаемые максимальные силы трения существенно ниже максимальной силы трения, полученной Бете.

2.2.2. Случай $2\pi Ze^3 N \ll IE$

В случае высоких электрических полей электрон ускоряется настолько быстро, что за конечное время не производит в среднем даже одной ионизации. За время движения в области плато сечения убегающего электрона удастся выбить много меньше одного вторичного электрона. Этому сценарию соответствует

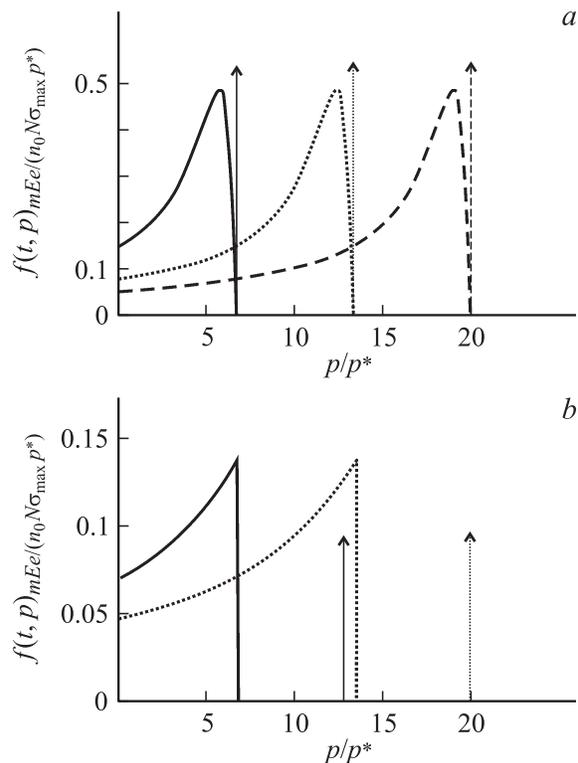


Рис. 8. Графики функций распределения убегающих электронов в зависимости от безразмерного импульса для случая сильных полей, рассчитанные по формуле (59). *a* — начальный импульс электронов $p_0 = 0$; *b* — $p_0 = 6p^*$. Сплошные кривые соответствуют $t = 6.6p^*/eE$, пунктир — $t = 13.3p^*/eE$, штриховая кривая — $t = 20p^*/eE$. Импульс нормирован на p^* (47).

условие

$$\frac{2\pi Ze^3 N}{IE} \ll 1. \quad (57)$$

Ионизация в области резерфордовской зависимости сечения от энергии мала. Как видно из (51), число вторичных электронов растет со временем только по логарифмическому закону

$$\frac{2\pi Ze^3 N}{IE} \ln(\xi) = \frac{2\pi Ze^3 N}{IE} \ln\left(\sqrt{\frac{\sigma_{\max} I}{2m\pi Z}} \frac{E}{e} \tau\right) \ll 1. \quad (58)$$

Таким образом, в случае (57) в уравнении (51) интегральное слагаемое мало:

$$f(t, p) = n_0 \delta(p_0 - p + eEt) + \begin{cases} \frac{n_0 N \sigma_{\max}}{m E e} \frac{p_0 - p + eEt}{1 + \frac{\sigma_{\max} I (p_0 - p + eEt)^2}{2\pi m Z e^4}}, & eEt - p \geq 0 \text{ и } p \geq 0, \\ 0, & eEt - p < 0 \text{ или } p < 0. \end{cases} \quad (59)$$

Как видно из (59), хотя число вторичных электронов и растет со временем, но крайне медленно — только по логарифмическому закону (рис. 8). Ионизация несущественна и общее число электронов остается практически постоянным.

Выводы

Аналитически исследовано влияние ионизации на процесс убегания электронов в нейтральном газе импульсного разряда. Электрические поля предполагались настолько сильными, что все свободные электроны были убегающими, а их функция распределения — сильно анизотропной.

В этих условиях основным параметром, определяющим вид функции распределения, является отношение

$$\frac{2\pi Ze^3 N}{IE}.$$

Оно имеет смысл числа вторичных электронов, выбитых одним убегающим электроном. В том случае, когда это отношение сравнимо или больше единицы, функция распределения является экспоненциально убывающей с импульсом и экспоненциально растущей во времени. В том случае, когда это отношение оказывается много меньше единицы, функция распределения растет с импульсом и убывает со временем. Общее число выбитых электронов растет со временем не экспоненциально, а логарифмически. Аналитические выражения подтверждены численными решениями упрощенного интегрального уравнения.

Автор благодарен Л.Д. Цендину и В.И. Колобову за плодотворные дискуссии и полезные рекомендации.

Приложение I

Решение уравнения Вольтерра второго рода с симметричным ядром

Если ввести следующие обозначения:

$$F(\xi) = f(\xi), \quad (60)$$

$$G(\xi) = n_0 \delta\left(p_0 + \xi e^2 \sqrt{\frac{2m\pi Z}{\sigma_{\max} I}}\right) + \frac{n_0 N \eta(\xi)}{m} \frac{\left(\frac{p_0}{Ee} + \frac{\xi e}{E} \sqrt{\frac{2m\pi Z}{\sigma_{\max} I}}\right) \sigma_{\max}}{1 + \frac{\sigma_{\max} I E^2}{2m\pi Z e^2} \left(\frac{p_0}{Ee} + \frac{\xi e}{E} \sqrt{\frac{2m\pi Z}{\sigma_{\max} I}}\right)^2}, \quad (61)$$

$$K(\xi) = \frac{2\pi Ze^3 N \eta(\xi)}{IE} \frac{\xi}{1 + \xi^2}, \quad (62)$$

то уравнение (51) примет более компактный вид:

$$F(\xi) = G(\xi) + \int_0^\xi K(\xi - \xi) F(\xi) d\xi. \quad (63)$$

Поиск решения уравнения (63) сводится к поиску резольвенты — ядра R интегрального преобразования

$$F(\xi) = G(\xi) + \int_0^\xi R(\xi - \xi) G(\xi) d\xi. \quad (64)$$

Для этого используем преобразование Лапласа

$$\bar{F}(p) = \int_0^\infty F(\xi) e^{-p\xi} d\xi. \quad (65)$$

Действуя оператором преобразования на правую и левую части уравнений (63) и (64), получим

$$\bar{F} = \bar{G} + \bar{K}\bar{F}, \quad (66)$$

$$\bar{F} = \bar{G} + \bar{R}\bar{G}. \quad (67)$$

Отсюда следует, что

$$\bar{R} = \frac{\bar{K}}{1 - \bar{K}}. \quad (68)$$

Применив обратное преобразование для построения оригинала, получим

$$R(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{x-i\infty}^{x+i\infty} \frac{\bar{K}(p)}{1 - \bar{K}(p)} e^{\xi p} dp. \quad (69)$$

Таким образом, резольвента, определяющая решение (64), зависит только от функции K (62).

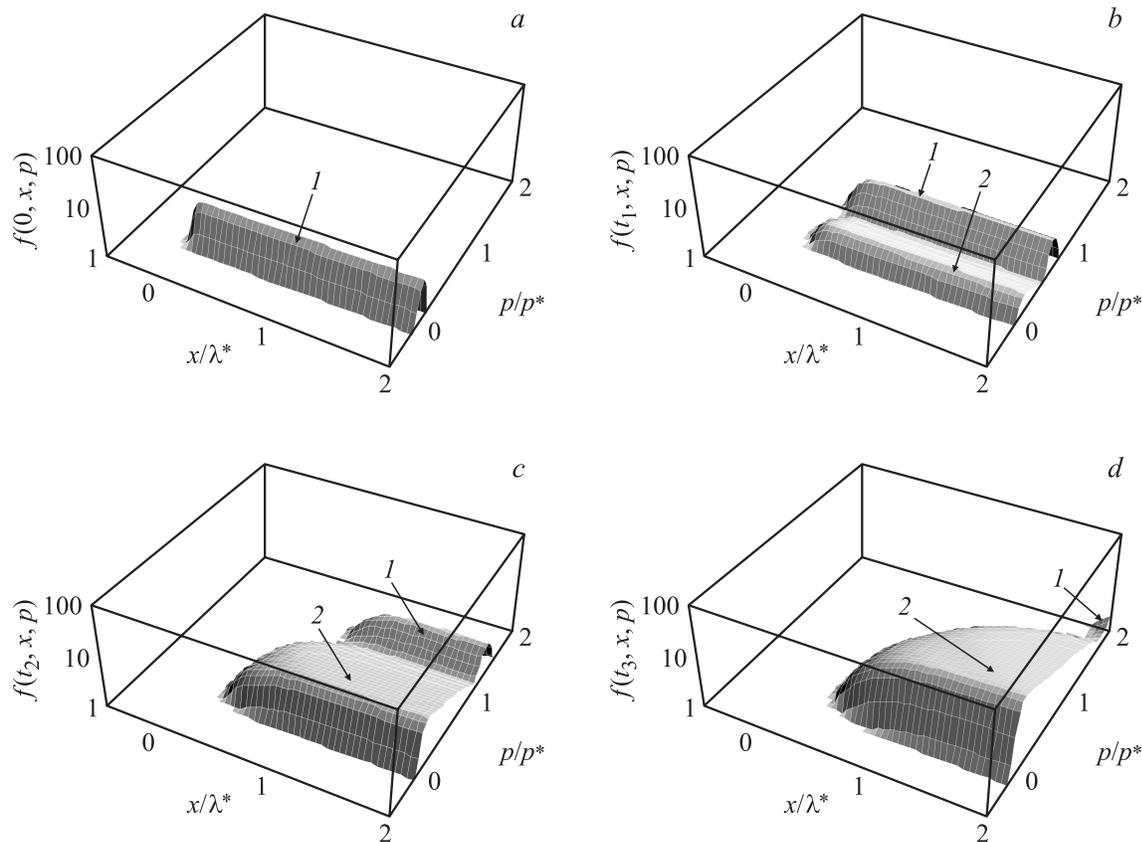


Рис. 9. Графики функции распределения убегающих электронов в зависимости от нормированных координаты и импульса, полученные численным решением уравнения (22). Решение построено с начальным условием (28) при $p_0 = 0$, параметром (52), равным пяти в различные моменты времени: $a - t_0 = 0$, $b - t_1 = 0.67\tau^*$, $c - t_2 = 1.3\tau^*$, $d - t_3 = 2\tau^*$. Импульс нормирован на p^* (47), координата — на λ^* (49); 1 — начальные электроны; 2 — вторичные электроны.

Из (62) и (69) следует, что вид функции R определяется только величиной безразмерного множителя

$$\frac{2\pi Ze^3 N}{IE}. \quad (70)$$

Из эквивалентного выражения для резольвенты, полученного итерационным методом

$$R(\xi - \xi) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2\pi Ze^3 N}{IE} \right)^k K_k(\xi, \xi), \quad (71)$$

$$K_k(\xi, \xi) = \int_0^{+\infty} K_{k-1}(\xi, \psi) K_0(\psi, \xi) d\psi,$$

$$K_0(\xi, \xi) = \begin{cases} K(\xi - \xi), & \xi - \xi \geq 0, \\ 0, & \xi - \xi < 0, \end{cases} \quad (72)$$

следует, что в случае $2\pi Ze^3 N \gg IE$ резольвента (71) является экспоненциально растущей функцией. В противоположном случае $2\pi Ze^3 N \ll IE$ в сумме (71) можно ограничиться только первым слагаемым, и резольвента равна K .

Приложение II

Сравнение аналитических выражений с простыми численными решениями упрощенного кинетического уравнения

Решение кинетического уравнения, подобного (1)–(4), является сложной вычислительной задачей. Этой проблеме посвящены работы [13,15,29,30]. В приложении представлены только решения упрощенного уравнения (22). Они носят в основном качественный и демонстрационный характер.

На рис. 9 показана численно рассчитанная функция распределения $f(t, x, p)$ в четыре разных момента времени. При вычислении предполагалось:

$$\frac{2\pi Ze^3 N}{IE} = 5. \quad (73)$$

Это условие соответствует экспоненциальным зависимостям функции распределения от импульса и времени (56). Видно, что функция распределения существенно отлична от нуля только в подобласти, где отсутствует зависимость от координаты. Численно рассчитанная функция распределения в этой подобласти показана на

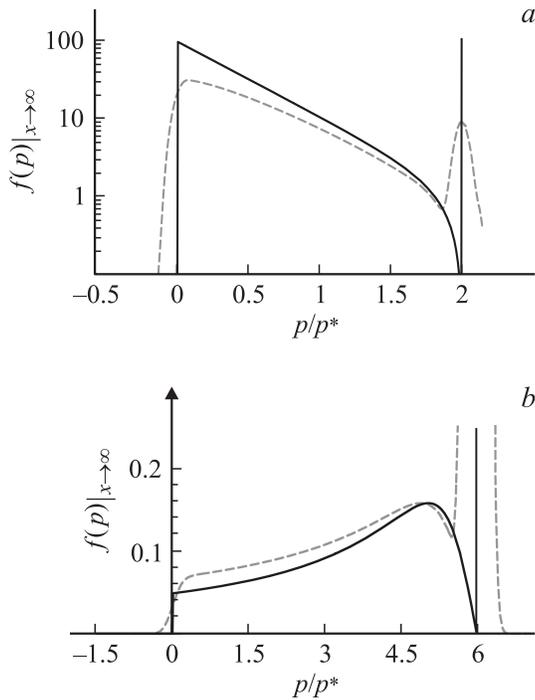


Рис. 10. Графики зависимости функции распределения от нормированного импульса. *a* — сплошная кривая — функция (56), с параметром (52), равным пяти в момент времени $t = 2\tau^*$, *b* — сплошная кривая — функция (59) с параметром (52), равным 0.1 в момент времени $t = 6\tau^*$. Штриховые кривые — численные решения (22).

рис. 10. Для сравнения на этом же рисунке приведена функция (56), удовлетворительно описывающая численное решение.

Функция распределения, соответствующая второму сценарию, показана на рис. 10, *b*. При вычислении этой функции распределения предполагалось, что

$$\frac{2\pi Ze^3 N}{IE} = 0.1. \quad (74)$$

Видно хорошее соответствие результатов численного моделирования и выражения (59). Видно, что функция распределения действительно является немонотонной. Ионизация вносит малый вклад в общее число убегающих электронов.

Список литературы

- [1] *Non-equilibrium air plasmas at atmospheric pressure* / Ed. by K.H. Becker, U. Kogelschatz, K.H. Schoenbach, and J.R. Barker. Bristol, IoP. 2005.
- [2] Баранов В.Ю., Борисов В.М., Степанов Ю.Ю. Электро-разрядные эксимерные лазеры на галогенидах инертных газов. М.: Энергоатомиздат, 1988. 216 с.
- [3] Macheret S.O., Shneider M.N., and Murray R.C. // *Physics of Plasmas*. 2006. Vol. 13. P. 023 502.
- [4] Nikandrov D.S., Tsendin L.D., Kolobov V.I., Arslanbe-kov R.R. // *IEEE Trans. on Plasma Sci.* 2008. Vol. 36. P. 131.

- [5] Babich L.P. *High-Energy Phenomena in Electric Discharges in Dense Gases: Theory, Experiment, and Natural Phenomena*. Arlington: Futurepast, 2003. 358 p.
- [6] Wilson C.T.R. // *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 1924. Vol. 22. P. 534–538.
- [7] Dreicer H. // *Proc. Venice Conf.* 1956. P. 249; *Proc. 2nd Int. Conf. on the Peaceful Uses of Atomic Energy*. Geneva, N.Y.: United Nations, 1958. P. 2292.
- [8] Гуревич А.В. // *ЖЭТФ*. 1960. Т. 39. Вып. 5 (11). С. 1296.
- [9] Коврижных Л.М. // *ЖЭТФ*. 1959. Т. 37. С. 1394.
- [10] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Квантовая механика. Нерелятивистская теория*. М.: Наука, 1989. 768 с.
- [11] Gurevich A.V., Zybin K.P. // *Phys. Lett. A*. 1998. Vol. 237. P. 240–246.
- [12] Roussel-Dupre R.A., Gurevich A.V., Tunnell T., Milikh G.M. // *Phys. Rev. E*. 1994. Vol. 49 (3). P. 2257–2271.
- [13] Бабич Л.П. // *ЖЭТФ*. 2004. Т. 125. Вып. 4. С. 808–820.
- [14] Symbalysty E.M.D., Roussel-Dupre R.A., and Yukhimuk V. // *IEEE Trans. on Plasma Sci.* 1998. Vol. 26 (5). P. 1575–1581.
- [15] Ткачев А.Н., Яковленко С.И. // *Письма в ЖТФ*. 2004. Т. 30. Вып. 7. С. 14–24.
- [16] Тарасенко В.Ф., Яковленко С.И. *Энциклопедия низкотемпературной плазмы*. Сер. Б.М.: Физматлит, 2004. Т. XI-4. С. 330.
- [17] Бабич Л.П. // *УФН*. 2005. Т. 175. № 10. С. 1069–1091.
- [18] Bethe H.A. // *Ann. d. Phys.* 1930. Vol. 5. P. 825.
- [19] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. *Электродинамика сплошных сред*. М.: Физматлит, 2003. 656 с.
- [20] Bloch F. // *Zs. Phys.* 1933. Bd. 81. S. 363.
- [21] Peterson L.R., Green A.E.S. // *J. Phys. B*. 1968. Vol. 1. P. 1131.
- [22] Miles W.T., Thompson R., Green A.E.S. // *J. Appl. Phys.* 1972. Vol. 43. P. 678.
- [23] Базелян Э.М., Райзер Ю.П. *Искровой разряд*. М.: МФТИ, 1997. 320 с.
- [24] Moller C. // *Ann. Phys.* 1932. Vol. 14. P. 531.
- [25] Kolobov V.I., Tsendin L.D. // *Phys. Rev. A*. 1992. Vol. 46 (12). P. 7837–7852.
- [26] Смирнов Б.М. *Ионы и возбужденные атомы в плазме*. М.: Атомиздат, 1974. 456 с.
- [27] Смирнов Б.М. *Физика слабоионизованного газа*. М.: Физматгиз, 1972. 416 с.
- [28] Камке Э. *Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка*. М.: Наука, 1966. 260 с.
- [29] Babich L.P., Bakhov K.I., Kutsyk I.M., and Shamraev B.N. // *Plasma Phys. Rep.* 2006. Vol. 32 (10). P. 814–822.
- [30] Babich L.P., Donskoy E.N., Kunsyk I.M., Kudryavtsev A.Yu., Roussel-Dupre R.A., Shamraev B.N., and Symbalysty E.M.D. // *IEE Trans. Plasma Sci.* 2001. Vol. 29 (3). P. 430–438.