01

О самоорганизации в генераторе Ван-дер-Поля для неэкстенсивных систем

© Р.Г. Зарипов

Институт механики и машиностроения, Казанский научный центр РАН,
420111 Казань, Россия
e-mail: zaripov@mail.knc.ru

(Поступило в Редакцию 4 февраля 2008 г.)

На основе S- и I-теорем об эволюции q-энтропии и q-информации различия рассматривается процесс самооргназации в генераторе Ван-дер-Поля с изменением значений параметра обратной связи при вынужденных переходах между стационарными состояниями в открытой неэкстенсивной системе.

PACS: 05.45.-a, 05.65.+b

Введение

К настоящему времени исследованы многие свойства неэкстенсивных (неаддитивных) статистических систем в различных направлениях в физике, описываемых негауссовыми и негиббсовыми распределениями. Формируется новая область — неэкстенсивная статистическая механика и термодинамика. Подробный обзор работ приводится в сборниках [1,2]. Фундаментом исследований являются энтропия Хаврда–Чарват–Дароши

$$S_q(p) = \int s_q p^q dX = \frac{k}{q-1}\left(1 - \int p^q dX\right) \qquad (1)$$

и информация различия Ратье–Каннаппана

$$\begin{aligned} I_q(p:p_0) &= \int i_q p^q dX \\ &= -\left[S_q(p) - S_q(p_0)\right] + \int (p^q - p_0^q) s_q(p_0) dX \\ &= \frac{k}{1-q}\left(1 - \int p^q p_0^{1-q} dX\right) \ge 0, \end{aligned} \qquad (2)$$

$$\int p\,dX = \int p_0 dX = 1, \quad 0 \le p < \infty, \quad 0 \le p_0 < \infty$$

для классических систем с действительным числом $q > 0$, вывод которых при аксиоматическом подходе впервые приводится в работах [3–5] по статистической теории информации. Функционалы (1) и (2) являются средними значениями микроскопической энтропии $s_q = s_q(p) = k(1-q)^{-1}(1-p^{1-q})$ и микроскопической информации различия $i_q = i_q(p:p_0) = -[s_q(p) - s_q(p_0)] = k(1-q)^{-1}(p^{1-q} - p_0^{1-q})$, где усреднение проводится ненормированным распределением p^q. Справедливость такого единственного правильного усреднения [3–5] вытекает также из условия термодинамического равновесия неэкстенсивных систем [6]. Параметр q связан с фрактальной размерностью для фрактальных систем, а для неэкстенсивных систем характеризует степень их неаддитивности в свойстве композиции с квадратичной нелинейностью

$$S_q = S_{q1} + S_{q2} + k^{-1}(1-q) S_{q1} S_{q2},$$

$$I_q = I_{q1} + I_{q2} + k^{-1}(1-q) I_{q1} I_{q2} \qquad (3)$$

для двух независимых систем с $p(X_1, X_2) = p_1(X_1) p_2(X_2)$, $p_0(X_1, X_2) = p_{01}(X_1) p_{02}(X_2)$ и $dX = dX_1 dX_2$. В пределе $q \to 1$ из (1) и (2) имеем энтропию Больцмана–Гиббса–Шеннона $S(p) = -k \int p \ln p dX$ и информацию различия Кульбака $I(p:p_0) = k \int p \ln(p/p_0) dX$ [7] для аддитивных статистических систем. Различные типы q-энтропий и q-информаций различия, которые имеют указанные пределы, рассматриваются в [8,9].

Энтропия (1) и информация различия (2) (или относительная информация) определяют соответственно статистические меры разупорядоченности и упорядоченности микросостояний с распределением p относительно распределения p_0. В [10,11] рассматриваются в общем случае их изменения в процессе самоорганизации при вынужденных переходах между стационарными состояниями в пространстве управляющих параметров с известной эффективной функцией Гамильтона и в случае, когда сведения о ней отсутствуют. Если $q = 1$, то полученные результаты в [10,11] дают известные S- и I-теоремы [12,13] для аддитивных систем. Представляется необходимым применение теоретико-информационного подхода [10] в исследовании процесса самоорганизации в генераторе Ван-дер-Поля для неэкстенсивных систем. Случай самоорганизации в генераторе для аддитивных систем впервые рассматривался в [14], где собственно и была сформулирована S-теорема об уменьшении переномированной (соответствующей одинаковым значениям средней энергии) энтропии Больцмана–Гиббса–Шеннона. I — теорема [13] утверждает об увеличении переномированной информации различия Кульбака в процессе самоорганизации открытых систем.

Равновесное и стационарное состояние системы

Рассмотрим замкнутую термодинамическую неэкстенсивную систему. Известное равновесное распределение

$$p_0 = \left[1 - k^{-1}(1-q)\beta H\right]^{1/(1-q)} Z_{q0}^{-1},$$
$$Z_{q0} = \int \left[1 - k^{-1}(1-q)\beta H\right]^{1/(1-q)} dX \tag{4}$$

получается из безусловного экстремума энтропии (1) при заданности среднего значения $E_q = \int H p^q dX$ функции Гамильтона $H = H(X)$ (или энергии) и сохранения нормировки распределения. Распределение (4) дает уравнение равновесной термодинамики неэкстенсивных систем $dS_q(p_0) = \beta dE_{q0}$ и $d(\beta F_{q0}) = E_{q0} d\beta$ со средним значением функции Гамильтона $E_{q0} = \int H p_0^q dX$, температурой $T = \beta^{-1}$ и свободной энергией $F_{q0} = E_{q0} - TS_q(p_0) = -k(Z_{q0}^{1-q} - 1)/\beta(1-q)$.

Спонтанный переход между произвольным состоянием системы с распределением p и равновесным с p_0 характеризуется информацией различия

$$I(p:p_0) = \frac{-[S_q(p) - S_q(p_0)] + \beta(E_q - E_{q0})}{1 - k^{-1}(1-q)\beta F_{q0}} = \frac{F_q - F_{q0}}{1 - k^{-1}(1-q)\beta F_{q0}} \geq 0, \tag{5}$$

которая включает в себя неравновесную свободную энергию $F_q = E_q S_q(p)/\beta$. Свободная энергия является потенциалом Максвелла–Гюи $\Phi_q = E_q - S_q(p)/\beta + PV_q$ [15] для открытой неэкстенсивной системы, находящейся в окружении с температурой β^{-1} в термостате. При $q = 1$ информация различия (5) совпадает с известным термодинамическим значением [13] для аддитивных систем.

Сравнив значения энтропий при условии Гиббса $E_q = E_{q0}$, записанного для неэкстенсивных систем, получим, согласно (5), теорему Гиббса в виде неравенства $I(p:p_0)Z_{q0}^{1-q} = [S_q(p) - S_q(p_0)] \geq 0$. Следовательно, увеличение энтропии до ее максимального значения в равновесии происходит с потерей информации различия, т.е. имеет место увеличение статистической разупорядоченности и уменьшение статистической упорядоченности в микросостояниях неэкстенсивной системы. Поскольку информация различия является знакоопределенной функцией Ляпунова, то состояние равновесия является устойчивым при выполнении следующего неравенства:

$$\frac{dI(p:p_0)}{dt} Z_{q0}^{1-q} = -\frac{d[S_q(p) - S_q(p_0)]}{dt} \leq 0. \tag{6}$$

Из (6) следует неравенство для энтропии $dS_q(p)/dt > 0$, которое формулирует H-теорему для открытых неравновесных неэкстенсивных систем. При этом в теореме Гиббса и H-теореме рассматривается перенормированное распределение, которое вытекает из вышеприведенного равенства средних энергий.

Генератор Ван-дер-Поля описывается уравнениями Ланжевена

$$\frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} + (-a + bE)v + \omega_0^2 x = \sqrt{D}\, y(t), \tag{7}$$

где $a = a_f - \gamma$, a_f — коэффициент обратной связи, γ и β — коэффициенты линейного и нелинейного трения, $E = m(v^2 + \omega_0^2 x^2)/2$ — энергия колебаний, D — интенсивность шума и моменты ланжевеновского источника $y(t)$ определяются выражениями $\langle y(t)\rangle = 0$, $\langle y(t)y(t')\rangle = 2\delta(t - t')$. В аддитивной статистической термодинамике для описания процессов вынужденных переходов между состояниями открытой системы при γ, $|a|$, $b\langle E\rangle \ll \omega_0$ имеет место уравнение Фоккера–Планка для распределения [16]

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial E}\left[(-a + bE)Ep + D(E)E\,\frac{\partial p}{\partial E}\right], \tag{8}$$

которое для стационарного состояния с заданным шумом $D(E) = D$ имеет решение в виде „канонического“ распределения Гиббса

$$p_0 = \exp\frac{F - H}{D}, \quad H = -aE + \frac{1}{2}bE^2, \quad \int_0^\infty p_0\, dE = 1 \tag{9}$$

с эффективной „свободной энергией“ F, эффективной „функцией Гамильтона“ H и $k = 1$. Управляющим параметром является коэффициент обратной связи a_f.

В случае неэкстенсивной системы уравнение (8) обобщается зависимостью коэффициента диффузии и от распределения, что приводит к квазипараболическому уравнению

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial E}\left[(-a + bE)Ep + D_q(E,p)E\,\frac{\partial p}{\partial E}\right], \tag{10}$$

описывающему нелинейное броуновское движение. Исследование его свойств представляет отдельный интерес. Коэффициент диффузии в стационарном состоянии при $q = 1$ имеет значение $D_1(E,p) = D$, а при $q \neq 1$ его определение должно приводить к решению в форме негиббсового равновесного распределения (4) с $D = \mathrm{const}$. Этим условиям удовлетворяет функция $D_q(E,p) = Dp^{1-q}$. В итоге для стационарного состояния имеет место распределение

$$p = [1 - (1-q)D^{-1}(-aE + bE^2/2)]^{1/(1-q)} Z_q, \tag{11}$$

зависящее от управляющего параметра a_f.

Уравнение (10) является нелинейным относительно распределения, а его решение (11) дает описание броуновского движения, которое используем для выявления процесса самоорганизации в генераторе Ван-дер-Поля при вынуженных переходах между состояниями.

S- и I-теоремы для генератора Ван-дер-Поля

Согласно работам [14,16], определим два значения управляющего параметра и некоторые приближения, которые приводят к двум распределениям, и рассмотрим вынужденные переходы между соответствующими стационарными состояниями.

В первом случае имеем начальное значение $a_f = 0$ для состояния физического хаоса [14,16] и полагаем приближение $b\langle E\rangle/\gamma \sim Db/\gamma^2 \ll 1$. Тогда из (11) вытекает распределение в виде „равновесного" распределения

$$p_{(1)} = \left[1-(1-q)D^{-1}\gamma E\right]^{1/(1-q)} Z_{q(1)}^{-1},$$
$$Z_{q(1)} = \left[\frac{D}{\gamma(q-1)}\right]\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{q-1}\right), \tag{12}$$

где $\Gamma(\xi)$ — гамма-функция и $1 < q < 2$.

Энтропия (1) и среднее значение энергии имеют следующий вид:

$$S_q(p_{(1)}) = \frac{1-\int p_{(1)}^q dE}{q-1} = \frac{1}{q-1}\left\{1-\left[\frac{D}{\gamma(q-1)}\right]\right.$$
$$\left.\times\,\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)Z_{q(1)}^{-q}\right\},$$
$$E_{q(1)} = \int E p_{(1)}^q dE \tag{13}$$
$$= \left[\frac{D}{\gamma(q-1)}\right]^2\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)Z_{q(1)}^{-q}.$$

Во втором случае рассматривается порог генерации с $a_f = \gamma$ и распределение с $q < q < 3$

$$p_{(2)} = \left[1-(1-q)D^{-1}(bE^2/2)\right]^{1/(1-q)} Z_{q(2)}^{-1},$$
$$Z_{q(2)} = \sqrt{\frac{\pi D}{2b(q-1)}}\,\Gamma\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{q-1}\right). \tag{14}$$

Аналогичным образом находим энтропию и среднее значение энергии

$$S_q = (p_{(2)}) = \frac{1}{q-1}\left\{1-\left[\frac{\pi D}{2b(q-1)}\right]^{1/2}\Gamma\left(\frac{q+1}{2(q-1)}\right)\right.$$
$$\left.\times\,\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)Z_{q(2)}^{-q}\right\}, \tag{15}$$
$$E_{q(2)} = \left[\frac{D}{b(q-1)}\right]\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)Z_{q(2)}^{-q}.$$

При больших значениях энергии из (12) и (14) вытекают асимптотические степенные распределения $p_{(1)} \sim E^{-1/(q-1)}$ и $p_{(2)} \sim E^{2/(q-1)}$, характерные для фрактальных систем. Если $q = 1$, то имеем соответственно известные распределения $p_{(1)} = (\gamma/D)\exp(-\gamma E/D)$ и $p_{(2)} = \sqrt{2b/\pi D}\exp(-b^2E/2D)$, используемые в аддитивной статистической термодинамике [14,16]. Граничное значение $q = 2$ приводит к степенным распределениям $p_{(1)} = C_1E^{-1}$ и $p_{(2)} = C_2E^{-2}$, справедливым также при малых значениях энергии для фрактальных систем.

Для выяснения степени упорядоченности микросостояний в генераторе введем, согласно [10], следующее перенормированное распределение:

$$\tilde{p}_{(1)} = \left[1-(1-q)\tilde{D}^{-1}(a_f)\gamma E\right]^{1/(1-q)}\tilde{Z}_{q(1)}^{-1},$$
$$\tilde{Z}_{q(1)} = \left[\frac{\tilde{D}(a_f)}{\gamma(q-1)}\right]\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{1}{q-1}\right), \tag{16}$$

где $\tilde{D}(a_f) = D$, $\tilde{Z}_{q(1)} = Z_{q(1)}$ при $a_f = 0$. Энтропия и средняя энергия выражаются как

$$S_q(\tilde{p}_{(1)}) = \frac{1}{q-1}\left\{1-\left[\frac{\tilde{D}(a_f)}{\gamma(q-1)}\right]\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)\right.$$
$$\left.\times\,\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)\tilde{Z}_{q(1)}^{-q}\right\}, \tag{17}$$
$$\tilde{E}_{q(1)} = \left[\frac{\tilde{D}(a_f)}{\gamma(q-1)}\right]^2\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)\tilde{Z}_{q(1)}^{-q}.$$

Рассмотрев переход между $p_{(2)}$ и $\tilde{p}_{(1)}$, находим

$$I_q(p_{(2)}:\tilde{p}_{(1)}) = \frac{1}{q-1}\left[1-\int p_{(2)}^q\tilde{p}_{(1)}^{1-q}dE\right]$$
$$= \tilde{Z}_q^{q-1}\left\{-\left[S_q(p_{(2)}) - S_q(\tilde{p}_{(1)})\right]\right.$$
$$\left.+\,\tilde{D}^{-1}(a_f)[E_{q(2)} - \tilde{E}_{q(1)}]\right\}. \tag{18}$$

Потребуем выполнения равенства средних энергий

$$\int E p_{(2)}^q dE = \int E\tilde{p}_{(1)}^q dE, \tag{19}$$

которое вытекает, согласно (10), из условия аддитивности

$$I_q(p_{(2)}:\tilde{p}_{(1)})\tilde{Z}_{q(1)}^{1-q} = \left[I_q(p_{(2)}:p_{(1)}) - I_q(p_{(2)}:\tilde{p}_{(1)})\right]Z_{q(1)}^{1-q} \tag{20}$$

при всех значениях управляющего параметра, и находим зависимость между перенормированной величиной шума и его заданного значения

$$\left[\frac{\tilde{D}(a_f)}{\gamma(q-1)}\right]^{2-q}\Gamma\left(\frac{2-q}{q-1}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{2-q}{q-1}\right)$$
$$= \frac{D}{b(q-1)}\left[\frac{2b(q-1)}{\pi D}\right]^{q/2}\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)\Gamma^{-q}\left(\frac{3-q}{2(q-1)}\right),$$
$$D(a_f) > D. \tag{21}$$

В итоге получим доказательства S- и I-теорем

$$\begin{aligned}&\big[I_q(p_{(2)}:p_{(1)})-I_q(p_{(2)}-\tilde{p}_{(1)})\big]Z_q^{1-q}\\&=-\big[S_q(p_{(2)})-S_q(\tilde{p}_{(1)})\big]\\&=\left[\frac{\pi D}{2b(q-1)}\right]^{1/2}\Gamma\left(\frac{q+1}{2(q-1)}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)Z_{q(2)}^{-q}\\&-\left[\frac{\tilde{D}(a_f)}{\gamma(q-1)}\right]\Gamma\left(\frac{1}{q-1}\right)\Gamma^{-1}\left(\frac{q}{q-1}\right)\tilde{Z}_{q(1)}^{-q}>0.\end{aligned}\tag{22}$$

Таким образом, из (22) следует, что при увеличении параметра обратной связи от значения $a_f=0$ до $a_f=\gamma$ происходят совместное уменьшение перенормированной энтропии Хаврда–Чарват–Дароши $S_q(\tilde{p}_{(1)})<S_q(p_{(2)})$ (S-теорема) и увеличение перенормированной информации различия Ратье–Каннаппана $I_q(p_{(2)}:p_{(1)})>I_q(p_{(2)}:\tilde{p}_{(1)})$ (I-теорема). Это свидетельствует о наличии процесса самоорганизации в генераторе Ван-дер-Поля. Аналогичный результат вытекает при использовании третьего стационарного состояния с режимом развитой генерации с соответствующей перенормировкой относительно состояния с $a_f=0$. При этом изменение энтропии $D[S_q(p_{(1)})-S_q(\tilde{p}_{(2)})]=R_{\min}$ [13,15] (где $k^{-1}D$ играет роль эффективной температуры) обусловлено работой по упорядочиванию в генераторе.

Вычисления приводят к неравенству $d[S_q(\tilde{p}_{(1)})]/da_f<0$, которое доказывает устойчивость состояния генератора с распределением $\tilde{p}_{(1)}$. Отметим, что в общем случае равенство (20) и соответственно условие (19) может не выполняться. Тогда не имеет места неравенство (22) и нельзя точно утверждать о принадлежности рассматриваемого процесса генерации к самоорганизующимся.

Заключение

В работе показано, что с увеличением параметра обратной связи при переходе к порогу генерации в генераторе Ван-дер-Поля для неэкстенсивных систем с $1<q<2$ происходит процесс самоорганизации с увеличением меры упорядоченности и уменьшением меры разупорядоченности. При $q=1$ полученные результаты совпадают с известными для аддитивных систем [14,16]. Здесь ограничивались изучением только двух стационарных состояний и переходом между ними. Полученные результаты могут быть использованы при рассмотрении электрических колебательных систем фрактальной природы, в которых возникает необходимость определения наличия процессов самоорганизации.

Известна лишь одна работа [17], в которой также рассматривался генератор Ван-дер-Поля с использованием энтропии (1) и меры Брэгмана

$$D(p:p_0)=\int\left[f(p)-f(p_0)-(p-p_0)\frac{\partial f(p_0)}{\partial\tilde{p}_0}\right]dX\tag{23}$$

в качестве информации различия. Функционал (23) впервые введен в работе [18] как выпуклая функция в задачах линейного и выпуклого программирования. Функция $f(p)=k(q-1)^{-1}(p^q-p)-p$ задается из определения энтропии (1) в виде $S_q=-\int f(p)dX$ и, следовательно, из (23) вытекает используемая мера [17]

$$\begin{aligned}D(p:p_0)&=-\big[S_q(p)-S_q(p_0)\big]-\int(p-p_0)\frac{\partial f(p_0)}{\partial p_0}dX\\&=\frac{k}{q-1}\int p^q dX+k\int p_0^q dX\\&-\frac{k}{q-1}\int pp_0^{q-1}dX-k\int pp_0^{q-1}dX,\end{aligned}\tag{24}$$

свойства которой рассматривались в работах [19,20].

При $q=1$ из (24) получим информацию различия Кульбака, а энтропия принимает уточненное значение

$$S=-k\int p\ln\frac{p}{e}\,dX$$

из аддитивной статистической механики.

Недостатком меры Брэгмана (23) является отсутствие какого-либо закона композиции для независимых систем. Отметим, что в работе [17] применяются распределения из работ [14,16], которые характеризуют стационарные состояния для аддитивных систем, описываемые уравнением (8). Также рассматриваются переходы между распределениями $p_{(1)}$ и $p_{(2)}^q/\int p_{(2)}^q dX$ различных семейств, что противоречит основам используемого подхода в [10–14].

В данной работе проводится строгое рассмотрение процесса самоорганизации на основе известных S- и I-теорем с использованием распределений неэкстенсивной статистической термодинамики, вытекающих из нестационарного уравнения (10). Поскольку уравнения проводятся ненормированными распределениями p^q и p_0^q одного семейства, то естественным обобщением меры (23) на неэкстенсивные системы является следующий функционал:

$$D_q(p:p_0)=\int\left[f(p)-f(p_0)-(p^q-p_0^q)\frac{\partial f(p_0)}{\partial(p_0^q)}\right]dX\tag{25}$$

для определения информации различия. При использовании вышеприведенной функции $f(p)$ для энтропии Хаврда–Чарват–Дароши данный функционал имеет значение

$$\begin{aligned}D_q(p:p_0)&=-\big[S_q(p)-S_q(p_0)\big]-\int(p^q-p_0^q)\frac{\partial f(p_0)}{\partial(p_0^q)}\,dX\\&=\frac{1}{1-q}\left(1-\int p^q p_0^{1-q}dX\right),\end{aligned}\tag{26}$$

совпадающее с выражением информации различия Ратье–Каннаппана (2), что и следовало ожидать. Это позволяет находить соответствующую информацию различия и для других выражений неэкстенсивных энтропий и использовать для определения процесса самоорганизации открытых термодинамических систем.

Список литературы

[1] Nonextensive Statistical Mechanics and its Applications / Ed. by S. Abe, Y. Okamoto. Series Lecture Notes in Physics. Berlin–N.Y.–Heidelberg: Springer-Verlag, 2001. 277 p.

[2] Nonadditive Entropy and Nonextensive Statistical Mechanics / Ed. by M. Sugiyama. Continuum Mechanics and Thermodynamics. Vol. 16. Heidelberg: Springer-Verlag, 2004. P. 221–304.

[3] *Havrda J., Charval F.* // Kybernetika. 1967. Vol. 3. P. 30–34.

[4] *Daroczy Z.* // Inform. Control. 1970. Vol. 16. P. 36–51.

[5] *Rathie P.N., Kannappan Pl.* // Inform. Control. 1972. Vol. 20. P. 38–45.

[6] *Зарипов Р.Г.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 11. С. 1–5.

[7] *Кульбак С.* Теория информации и статистика. М.: Наука, 1967. 408 с.

[8] *Taneja I.J.* // Advances in Electronics and Electron Physics. 1989. Vol. 76. P. 327–413 (a bibliography is accessible at http:/www.mtm.ufsc.br/∼taneja/book).

[9] *Зарипов Р.Г.* Новые меры и методы в теории информации. Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2005. 364 с.

[10] *Зарипов Р.Г.* // Изв. вузов. Физика. 2001. № 11. С. 24–29.

[11] *Зарипов Р.Г.* // Изв. вузов. Физика. 2004. № 6. С. 67–73.

[12] *Klimontovich Yu.L.* // Z. Phys. B. 1987. Bd 66. N 1. S. 125–127.

[13] *Зарипов Р.Г.* // ЖТФ. 1988. Т. 58. Вып. 11. С. 2247–2249.

[14] *Климонтович Ю.Л.* // Письма в ЖТФ. 1983. Т. 8. Вып. 23. С. 1412–1416.

[15] *Зарипов Р.Г.* // Изв. вузов. Физика. 1987. Т. 30. № 7. С. 29–33.

[16] *Klimontovich Yu.L.* // Physica A. 1987. Vol. 142. P. 390–404.

[17] *Bağci G.B.* arXiv: 0705.2053. Vol. 1. Cond-mat. 2007.

[18] *Брэгман Л.М.* // Ж. Вычисл. Матем. и Матем. Физ. 1967. Т. 7. № 3. С. 620–631.

[19] *Naudts J.* // Rev. Math. Phys. 2004. Vol. 16. P. 809–815.

[20] *Abe S., Bağci G.B.* // Phys. Rev. E. 2005. Vol. 71. P. 016 139.