01;03;04

Расчет электрического потенциала и силы Лоренца, действующей на поток в локально ионизованном магнитогидродинамическом течении в неоднородном магнитном поле

© Е.Г. Шейкин

Санкт-Петербургский государственный университет,
198904 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: egsh@pochta.ru

(Поступило в Редакцию 28 марта 2008 г.)

Найдено аналитическое решение электродинамических уравнений для электрического потенциала в локально ионизованном магнитогидродинамическом (МГД) течении в неоднородном магнитном поле, создаваемом прямолинейным проводником. Получены аналитические формулы для расчета объемной плотности силы Лоренца и интегральной силы Лоренца, действующей на поток в локально ионизованном МГД-течении. Показано, что МГД-воздействие на локально ионизованный поток в неоднородном магнитом поле может быть использовано для управления как подъемной силой, так и отношением подъемной силы к силе сопротивления.

PACS: 52.30.Cv, 47.85.L-

Введение

В настоящее время в литературе большое внимание уделяется изучению магнитогидродинамического (МГД) воздействия на поток с целью управления его характеристиками [1–16]. Изучаются возможности управления: потоком в воздухозаборнике летательного аппарата, процессами смешения потоков, процессами в двигателе высокоскоростного летательного аппарата, положением головной ударной волны, тепловыми потоками на обтекаемую поверхность. В большом числе указанных МГД-приложений равновесная проводимость потока пренебрежимо мала, и для осуществления МГД-воздействия на поток необходимо тем или иным способом создать в потоке неравновесную проводимость [4,6,8,17]. При этом поток будет локально ионизован.

Геометрия области неравновесной ионизации зависит от способа ионизации потока и от конфигурации магнитного поля. В большинстве рассматриваемых МГД-приложений магнитное поле будет неоднородным. Для расчета МГД-воздействия на локально ионизованный поток в неоднородном магнитном поле необходимо решать систему МГД-уравнений совместно с электродинамическими уравнениями, определяющими распределение потенциала в области МГД-взаимодействия.

Иногда для описания МГД течений в неоднородном магнитном поле используется приближение идеально секционированного фарадеевского МГД-канала [8,12], что существенно облегчает решение задачи, исключая необходимость решения электродинамических уравнений. Но в работе [18] показано, что приближение идеально секционированного фарадеевского МГД-канала неприменимо для описания МГД-воздействия на поток в неоднородном магнитном поле. Погрешности расчета силы Лоренца с использованием указанного приближения оценены в работе [19] для МГД-течения в неоднородном магнитном поле, создаваемом прямолинейным проводником.

В настоящей работе будет получено аналитическое решение электродинамических уравнений для электрического потенциала в локально ионизованном МГД-течении в неоднородном магнитном поле, создаваемом прямолинейным проводником, и проведен анализ особенностей МГД-воздействия на локально ионизованный поток в рассматриваемом неоднородном магнитном поле.

Уравнение для электрического потенциала в локально ионизованном МГД-течении в неоднородном магнитном поле

Для нахождения пространственного распределения электрического потенциала в области МГД-течения необходимо решить уравнение непрерывности для плотности электрического тока в плазме $\mathbf{j}$ совместно с обобщенным законом Ома [20]. Рассмотрим стационарное МГД-течение. Уравнение непрерывности для электрического тока и обобщенный закон Ома запишем в следующем виде [20]:

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = 0, \tag{1a}$$

$$\mathbf{j} + \mu_e(\mathbf{j}\times\mathbf{B}) = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}), \tag{1b}$$

где $\mathbf{B}$ — магнитная индукция, $\mathbf{E}$ — электрическое поле, $\mathbf{v}$ — скорость потока, μ_e — подвижность электронов, σ — проводимость потока. В качестве неоднородного

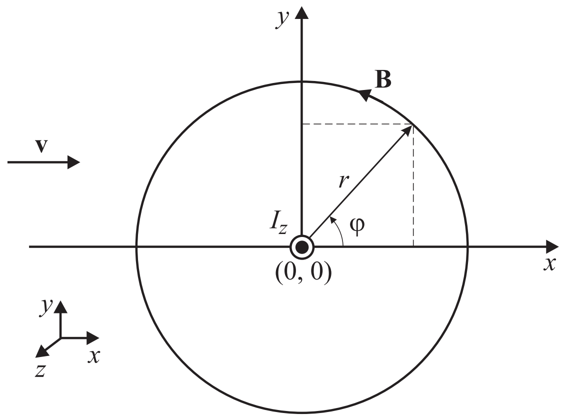

Рис. 1. Геометрия, используемая для нахождения электрического потенциала в МГД-течении в неоднородном магнитном поле, создаваемом прямолинейным током I_z.

магнитного поля будем рассматривать поле, создаваемое прямолинейным проводником. Геометрия задачи и основные обозначения показаны на рис. 1.

Рассматривается двумерное приближение, в котором характеристики МГД-течения, электрического и магнитного поля, а также токи в плазме не зависят от координаты z. Магнитное поле создается прямолинейным проводником, направленным вдоль оси z и проходящим через центр координаты в точке (0,0). Ограничимся рассмотрением режимов с малым значением магнитного числа Рейнольдса. В этом случае магнитное поле, индуцируемое плазменными токами, много меньше внешнего магнитного поля, и индуцированным магнитным полем можно пренебречь при расчетах магнитного поля в потоке. В рассматриваемом приближении зависимость величины магнитной индукции от радиуса может быть определена следующим соотношением: $B = B_0 r_0/r$. Величина B_0 магнитной индукции на расстоянии r_0 от центра координат определяется величиной тока I_z в проводнике, создающем магнитное поле. В декартовой системе координат проекции вектора магнитной индукции на координатные оси определяются следующим образом:

$$B_x = -B_0 r_0 y/(x^2+y^2),$$

$$B_y = B_0 r_0 x/(x^2+y^2), \quad B_z = 0. \tag{2a}$$

Для решения электродинамической задачи удобней использовать цилиндрическую систему координат, в которой магнитное поле имеет более простой вид:

$$B_r = 0, \quad B_\varphi = B_0\frac{r_0}{r}, \quad B_z = 0. \tag{2b}$$

Используя уравнения (1b) и (2b), нетрудно получить выражения для проекций плотности тока в плазме в цилиндрической системе координат через характеристики плазмы, электрического и магнитного полей в следующем виде:

$$j_r = \frac{\sigma B_0 r_0 r\left(\frac{rE_r}{r_0B_0} + \beta_0\frac{r_0}{r}\upsilon_r + \mu_e E_z\right)}{r^2+\beta_0^2r_0^2}, \quad j_\varphi = \sigma E_\varphi,$$

$$j_z = \frac{\sigma B_0 r_0 r\left(\frac{E_z}{B_0}\frac{r}{r_0} - \mu_e E_r + \upsilon_r\right)}{r^2+\beta_0^2r_0^2}, \tag{3}$$

где $\beta_0 = \mu_e B_0$ — характерное значение параметра Холла.

Уравнение непрерывности (1a) в цилиндрической системе координат в рассматриваемом двумерном приближении выглядит следующим образом:

$$\operatorname{div}\mathbf{j} = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial}{\partial r}(r j_r) + \frac{\partial j_\varphi}{\partial\varphi}\right) = 0. \tag{4}$$

Уравнение для электрического потенциала Φ может быть получено подстановкой (3) в уравнение непрерывности (4) при $\mathbf{E} = -\operatorname{grad}\Phi$.

При выводе уравнения для потенциала ограничимся рассмотрением приближения постоянной проводимости потока и подвижности электронов в области МГД-взаимодействия. Также ограничимся рассмотрением слабого уровня МГД-воздействия на поток, при котором можно пренебречь влиянием изменения параметров течения на формирование потенциала в области МГД-взаимодействия.

Напомним, что в рассматриваемой модели параметры электрического поля не зависят от координаты z, что с помощью уравнения Максвелла $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$ приводит к следующим условиям, накладываемым на проекцию электрического поля E_z: $\partial E_z/\partial r = \partial E_z/\partial\varphi = 0$. Данные условия, очевидно, свидетельствуют о постоянстве поля E_z. В этом случае потенциал в цилиндрической системе координат может быть записан в следующем виде: $\Phi(r,\varphi,z) = \Phi(r,\varphi) + C - E_z z$, где C — неопределенная константа.

Подставив уравнения (3) в (4), с учетом вышесказанных приближений, получим следующее дифференциальное уравнение в частных производных для потенциала $\Phi(r,\varphi)$:

$$(r^2+\beta_0^2r_0^2)^2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + r^4(r^2+\beta_0^2r_0^2)\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}$$

$$+ r^3(r^2+3\beta_0^2r_0^2)\frac{\partial\Phi}{\partial r} + r(r^2-\beta_0^2r_0^2)\upsilon_r\frac{\beta_0^2r_0^2}{\mu_e}$$

$$-2r^2\beta_0^3r_0^3E_z = 0. \tag{5}$$

В рассматриваемой задаче скорость течения целесообразно выражать через компоненты скорости в декартовой системе координат, поэтому в дальнейшем вместо радиальной проекции вектора скорости υ_r будем использовать ее представление через компоненты скорости υ_x и υ_y в виде $\upsilon_r = \upsilon_x\cos\varphi + \upsilon_y\sin\varphi$. Для нахождения решения неоднородного дифференциального уравнения в частных производных (5) вначале найдем общее решение однородного уравнения относительно функции $\Phi_0(r,\varphi)$, имеющего следующий вид:

$$(r^2+\beta_0^2 r_0^2)^2 \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial\varphi^2} + r^4(r^2+\beta_0^2 r_0^2) \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial r^2} + r^3(r^2+3\beta_0^2 r_0^2) \frac{\partial\Phi_0}{\partial r} = 0. \quad (6)$$

Для решения уравнения (6) используем метод разделения переменных, представляя искомую функцию в виде произведения $\Phi_0(r,\varphi)=R(r)\Psi(\varphi)$. В качестве константы разделения выберем $-k^2$. В результате получим следующую систему уравнений для функций $R_k(r)$ и $\Psi_k(\varphi)$:

$$\frac{d^2\Psi_k}{d\varphi^2} + k^2\Psi_k = 0, \quad (7)$$

$$\frac{d^2R_k}{dr^2} + \frac{r^2+3\beta_0^2 r_0^2}{r(r^2+\beta_0^2 r_0^2)} \frac{dR_k}{dr} - k^2 \frac{r^2+\beta_0^2 r_0^2}{r^4} R_k = 0. \quad (8)$$

Очевидно, что решением уравнения (7) является линейная комбинация функций $\cos k\varphi$ и $\sin k\varphi$. Для упрощения уравнения (8) введем новую переменную $\xi=\beta_0 r_0/r$ и, используя очевидные преобразования, получим следующее уравнение для функции $R_k(\xi)$:

$$\xi^2 \frac{d^2R_k}{d\xi^2} + \xi \frac{1-\xi^2}{1+\xi^2} \frac{dR_k}{d\xi} - \big(k^2+(k\xi)^2\big)R_k = 0. \quad (9)$$

Нетрудно заметить, что при $\xi\to 0$ уравнение (9) стремится к модифицированному уравнению Бесселя [21]. Это позволяет получить асимптотическое выражение для решения уравнения (9) в виде

$$R_k(\xi) \xrightarrow[\xi\to 0]{} C_1^k I_k(k\xi) + C_2^k K_k(k\xi),$$

где $I_k(x)$ и $K_k(x)$ — модифицированные функции Бесселя соответственно первого и второго рода. Решив уравнение (9) методом разложения в обобщенный степенной ряд и учитывая известное асимптотическое выражение для решения при $\xi\to 0$, удалось получить общее решение уравнения (9) в следующем виде:

$$R_k(\xi) = C_1^k\big(I_k(k\xi)+\xi I_{k+1}(k\xi)\big) + C_2^k\big(K_k(k\xi)-\xi K_{k+1}(k\xi)\big). \quad (10)$$

Для удобства записи полученных результатов введем функции Z_1 и Z_2, заменяющие комбинации модифицированных функций Бесселя в уравнении (10):

$$Z_1(k,x) = I_k(kx) + xI_{k+1}(kx),$$
$$Z_2(k,x) = K_k(kx) - xK_{k+1}(kx). \quad (11)$$

В результате общее решение однородного дифференциального уравнения (6) может быть представлено в следующем виде:

$$\Phi_0(r,\varphi) = \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r)\,\Psi_k(\varphi),$$

где

$$R_k(R) = C_1^K Z_1(k,\beta_0 r_0/r) + C_2^k Z_2(k,\beta_0 r_0/r),$$
$$\Psi_k(\varphi) = C_3^k\cos k\varphi + C_4^k \sin k\varphi. \quad (12)$$

Частное решение неоднородного дифференциального уравнения (5) удалось найти в виде

$$\Phi_1(r,\varphi) = \beta_0 r_0 E_z \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{\upsilon_x\cos\varphi+\upsilon_y\sin\varphi}{\mu_e} r. \quad (13)$$

Правильность найденного частного решения нетрудно проверить прямой подстановкой (13) в уравнение (5). Таким образом, общее решение неоднородного дифференциального уравнения (5) может быть записано в следующем виде:

$$\Phi(r,\varphi) = \Phi_1+\Phi_0 = \beta_0 r_0 E_z \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) - \frac{\upsilon_x\cos\varphi+\upsilon_y\sin\varphi}{\mu_e} r + \sum_{k=1}^{\infty} R_k(r)\Psi_k(\varphi), \quad (14)$$

где функции $R_k(r)$ и $\Psi_k(\varphi)$ определяются уравнениями (11), (12).

Для нахождения неопределенных констант C_1^k в (12) необходимо использовать граничные условия. Решение ищется в области $r_1\le r\le r_2$, $\varphi_1\le\varphi\le\varphi_2$. В качестве граничных условий используется обращение в нуль нормального тока на границах плазмы, т.е. $j_r\big|_{r=r_1} = j_r\big|_{r=r_2} = 0$ и $j_\varphi\big|_{\varphi=\varphi_1} = j_\varphi\big|_{\varphi=\varphi_2}$. Согласно уравнениям (3), требование равенства нулю радиального тока на границах $r=r_1$, $r=r_2$ приводит к следующему граничному условию для потенциала:

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{\substack{r=r_1\\ r=r_2}} = \frac{\beta_0^2 r_0^2}{\mu_e r^2}(\upsilon_x\cos\varphi+\upsilon_y\sin\varphi) + \beta_0 E_z \frac{r_0}{r}. \quad (15)$$

Подставив (14) в (15), получим следующее уравнение:

$$\left.\left[\sum_{k=1}^{\infty}\Psi_k(\varphi)\frac{dR_k}{dr} - \frac{\upsilon_x\cos\varphi+\upsilon_y\sin\varphi}{\mu_e}\left(1+\beta_0^2\frac{r_0^2}{r^2}\right)\right]\right|_{\substack{r=r_1\\ r=r_2}} = 0. \quad (16a)$$

Граничное условие $j_\varphi=0$, согласно уравнениям (3), приводит к граничному условию для потенциала в виде $\partial\Phi/\partial\varphi=0$, которое с использованием уравнения (14) принимает следующий вид:

$$\left.\left[\sum_{k=1}^{\infty}R_k(r)\frac{d\Psi_k}{d\varphi} + (\upsilon_x\sin\varphi-\upsilon_y\cos\varphi)\frac{r}{\mu_e}\right]\right|_{\substack{\varphi=\varphi_1\\ \varphi=\varphi_2}} = 0. \quad (16b)$$

В настоящей работе будем рассматривать плазменную область, ограниченную поверхностями: $\varphi_1=0$, $\varphi_2=\pi$, показанную на рис. 2. Данная область ионизации потока может быть реализована при использовании пучка электронов в качестве ионизатора [12]. Течение будем

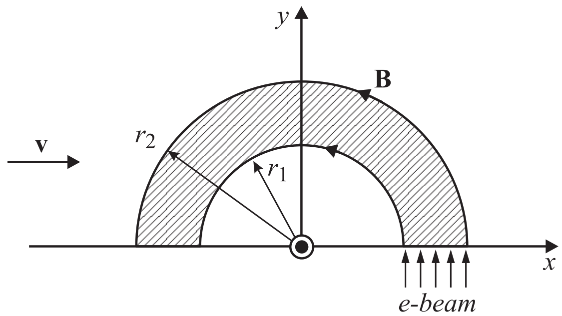

Рис. 2. Геометрия локально ионизованной области, создаваемой электронным пучком в неоднородном магнитном поле, используемая при нахождении электрического потенциала в МГД-течении.

рассматривать в объеме, ограниченном снизу плоскостью $y = 0$. При этом, так как поверхности $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$ лежат в плоскости $y = 0$, ограничивающей поток, то компонента скорости v_y обращается в нуль на границах $\varphi_1 = 0$ и $\varphi_2 = \pi$. Нетрудно показать, что решение уравнения (5), удовлетворяющее граничным условиям (16a) и (16b) принимает в этом случае следующий вид:

$$\Phi(r,\varphi) = \beta_0 r_0 E_z \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) + \frac{v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi}{\mu_e} \times \left(C_1^1 Z_1(1, \beta_0 r_0/r) + C_2^1 Z_2(1, \beta_0 r_0/r) - r\right), \quad (17)$$

где коэффициенты C_1^1 и C_2^1 определяются следующими соотношениями:

$$C_1^1 = \frac{r_2 K_1(\beta_0 r_0/r_1) - r_1 K_1(\beta_0 r_0/r_2)}{I_1(\beta_0 r_0/r_1)K_1(\beta_0 r_0/r_2) - I_1(\beta_0 r_0/r_2)K_1(\beta_0 r_0/r_1)},$$

$$C_2^1 = \frac{r_1 I_1(\beta_0 r_0/r_2) - r_2 I_1(\beta_0 r_0/r_1)}{I_1(\beta_0 r_0/r_1)K_1(\beta_0 r_0/r_2) - I_1(\beta_0 r_0/r_2)K_1(\beta_0 r_0/r_1)}. \quad (18)$$

Таким образом, в данном разделе получено общее решение (14) для электрического потенциала в области МГД-течения в неоднородном магнитном поле, задаваемом уравнением (2), и получены аналитические выражения (17), (18) для распределения электрического потенциала в области локально ионизованной плазмы, границы которой задаются условиями: $r_1 \le r \le r_2$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Анализ полученного решения. Расчет силы Лоренца, действующей на поток

Анализируя полученное решение (17), (18), нетрудно заметить, что при $E_z = 0$ угол φ влияет только на абсолютную величину потенциала Φ, но не влияет на характер зависимости потенциала от радиуса. Это позволяет ограничиться фиксированным значением угла φ при исследовании зависимости потенциала Φ от радиуса.

На рис. 3 приведены радиальные зависимости потенциала, рассчитанного по формулам (17), (18) в области МГД-взаимодействия $r_1 \le r \le r_2$, $0 \le \varphi \le \pi$ для разных значений параметра β_0, при $\varphi = 0$. Рассматривается простейшая ситуация плоскопараллельного течения с $v_y = 0$ и $v_x = v_0$ при нулевом значении поперечного электрического поля $E_z = 0$. Потенциал представлен в безразмерной форме, нормированный на величину $v_0 r_0/\mu_e$:

$$\Phi_n = \frac{\Phi}{v_0 r_0/\mu_e}.$$

Из рис. 3 следует, что потенциал монотонно возрастает с увеличением радиуса. При значениях $\beta_0 \le 10$ нормированная разность потенциалов $(\Phi_n(r_2) - \Phi_n(r_1))$ на границах $r = r_1$, $r = r_2$ области ионизованного потока заметно увеличивается с ростом параметра Холла. При дальнейшем увеличении параметра Холла данная разность потенциалов изменяется слабо, а поле становится сильно неоднородным, концентрируясь в окрестностях границ ионизованной области.

Наложение поперечного поля E_z, согласно рис. 4, сильно влияет на радиальное распределение потенциала в области ионизованного потока. Так, в частности, зависимость потенциала от радиуса становится немонотонной при отрицательном значении E_z.

Сила Лоренца, действующая на МГД-течение при заданном распределении магнитного поля, определяется величиной и направлением токов, протекающих в области МГД-взаимодействия с использованием соотношения: $\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B}$, где $\mathbf{f}$ — объемная плотность силы Лоренца. Подставив выражение для потенциала (17) в уравнении (3), получим следующие выражения для

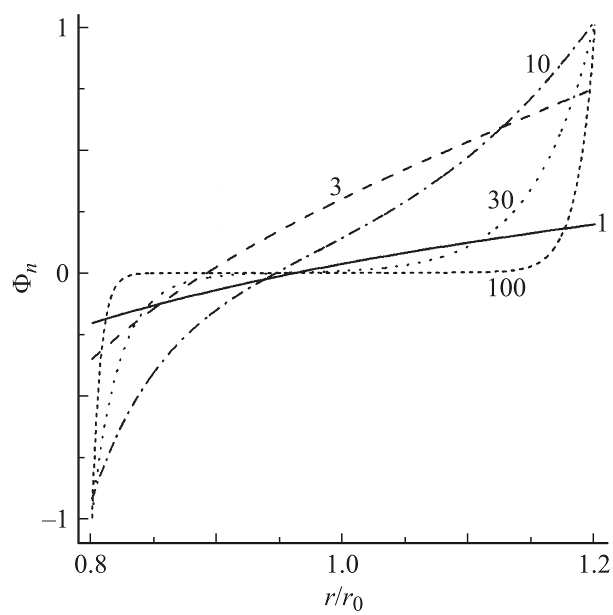

Рис. 3. Радиальное распределение нормированного электрического потенциала для различных значений параметра Холла β_0 при $\varphi = 0$, $E_z = 0$, $r_1/r_0 = 0.8$, $r_2/r_0 = 1.2$. Величины β_0 указаны у кривых.

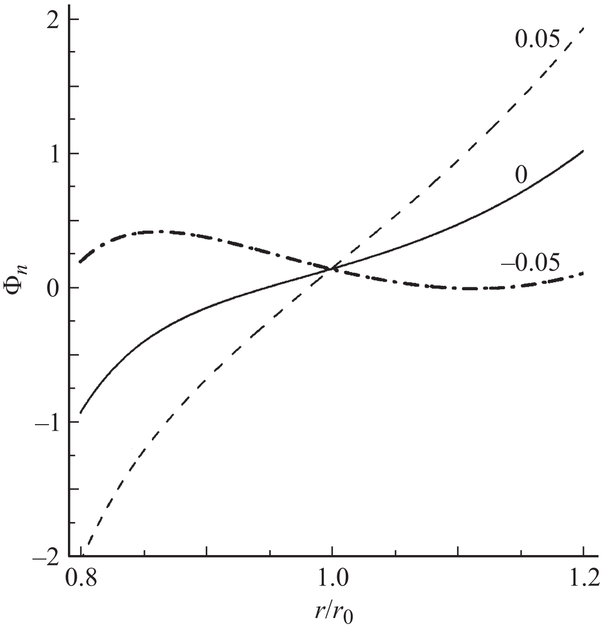

Рис. 4. Радиальное распределение нормированного электрического потенциала для различных значений поля E_z при $\varphi = 0$, $\beta_0 = 10$, $r_1/r_0 = 0.8$, $r_2/r_0 = 1.2$. Нормированные значения поля $E_z/(B_0 v_0)$ указаны у кривых.

проекций плотности тока в ионизованной области:

$$j_z = \sigma E_z - \frac{\sigma B_0 r_0}{r^2}\left(v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi\right) \times \left(C_1^1 I_1\left(\frac{\beta_0 r_0}{r}\right) + C_2^1 K_1\left(\frac{\beta_0 r_0}{r}\right)\right),$$

$$j_r = \frac{\sigma B_0}{\beta_0 r}\left(v_x \cos\varphi + v_y \sin\varphi\right) \times \left(r + C_1^1 I_1\left(\frac{\beta_0 r_0}{r}\right) + C_2^1 K_1\left(\frac{\beta_0 r_0}{r}\right)\right),$$

$$j_\varphi = \frac{\sigma B_0 (v_x \sin\varphi - v_y \cos\varphi)}{\beta_0 r} \times \left(C_1^1 Z_1(1, \beta_0 r_0/r) + C_2^1 Z_2(1, \beta_0 r_0/r) - r\right). \quad (19)$$

Распределение векторов плотности токов в области МГД-взаимодействия показано на рис. 5 при значении $E_z = 0$. Видно, что электрический ток в плоскости xy имеет вихревой характер. Наличие ненулевой радиальной компоненты плотности тока j_r при заданной конфигурации магнитного поля (2b) приводит к появлению ненулевой компоненты силы Лоренца, действующей вдоль оси oz, которая определяется соотношением $f_z = j_r B_\varphi$.

Наличие силы f_z может, в принципе, привести к изменению параметров течения вдоль оси oz. Рассматриваемое в статье двумерное приближение справедливо при выполнении неравенства $f_z \ll f_r$. При этом сила Лоренца, действующая в радиальном направлении, f_r, определяется следующим соотношением: $f_r = -j_z B_\varphi$.

Таким образом, в рассматриваемой конфигурации $f_z/f_r = -j_r/j_z$, что с использованием уравнений (19) позволяет получить аналитическое выражение для отношения указанных проекций силы Лоренца. При $E_z = 0$ данное отношение может быть представлено в следующем виде:

$$\frac{f_z}{f_r} = -\frac{r}{r_0\beta_0}\left(1 + r\left(C_1^1 I_1\left(\frac{\beta_0 r_0}{r}\right) + C_2^1 K_1\left(\frac{\beta_0 r_0}{r}\right)\right)^{-1}\right). \quad (20)$$

Радиальная зависимость отношения f_z/f_r представлена на рис. 6 для разных значений параметра Холла β_0. Согласно полученным результатам, максимальное значение величины f_z/f_r в диапазоне $r_1 < r < r_2$, растет с увеличением параметра Холла. На границах области $r = r_1$ и $r = r_2$ величина f_z/f_r обращается в нуль, что

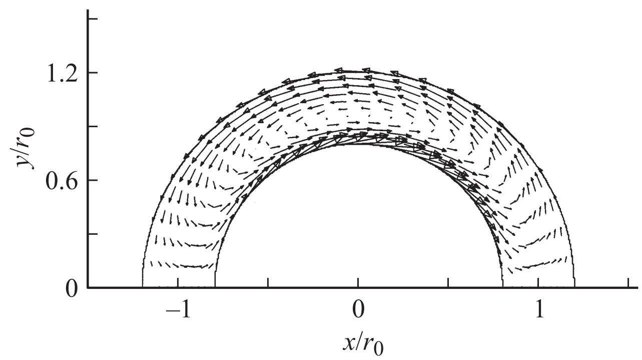

Рис. 5. Векторное поле плотностей токов в плоскости xy при $\beta_0 = 10$, $E_z = 0$, $r_1/r_0 = 0.8$, $r_2/r_0 = 1.2$, $v_x = v_0$, $v_y = 0$.

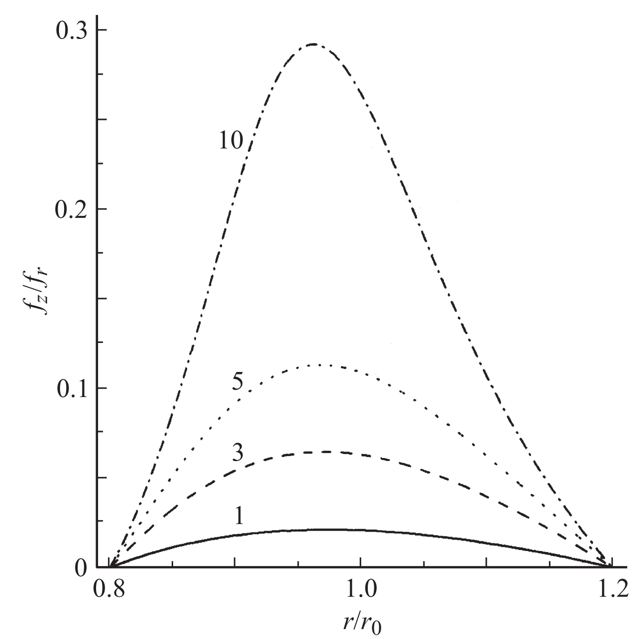

Рис. 6. Радиальное распределение отношения проекций f_z/f_r для различных значений параметра Холла β_0 при $E_z = 0$, $r_1/r_0 = 0.8$, $r_2/r_0 = 1.2$. Величины β_0 указаны у кривых.

обусловлено нулевым значением радиального тока на данных границах.

На рис. 7 представлены радиальные зависимости отношения f_z/f_r при различных значениях r_1 и r_2. Согласно рис. 7, ширина области МГД-взаимодействия оказывает сильное влияние на максимальное значение f_z/f_r. Увеличение ширины области МГД-взаимодействия приводит к сильному росту отношения f_z/f_r, сужение данной области оказывает противоположное действие. Таким образом, при заданных значениях параметра Холла всегда можно выбрать такую ширину области МГД-взаимодействия, при которой неравенство $f_z \ll f_r$ выполняется, и следовательно, процесс МГД-взаимодействия можно описывать в двумерном приближении.

На рис. 8–10 показаны векторные поля силы Лоренца, действующей на поток в плоскости xy при различных значениях электрического поля E_z. Видно, что во всех случаях проекция силы Лоренца на ось x будет направлена навстречу потоку и, следовательно, будет вызывать его торможение. Действие силы Лоренца в направлении оси y имеет более сложный характер. В области $x < 0$ сила Лоренца в основном будет способствовать отходу потока от поверхности. И наоборот, при $x > 0$ сила Лоренца в основном будет способствовать поджатию потока к поверхности.

Изменение знака у поля E_z, согласно рис. 9, 10, существенно влияет на характер воздействия силы Лоренца на поток. Так, при положительных значениях E_z в интегральном воздействии силы Лоренца на поток будет превалировать эффект поджатия потока к поверхности. При $E_z < 0$, наоборот, МГД-воздействие в основном будет способствовать отходу потока от поверхности. Получим выражения для суммарной силы Лоренца, действующей на поток в направлении осей x и y, проинтегрировав соответствующие объемные плотности силы Лоренца по области МГД-взаимодействия:

$$F_x = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\pi} f_x(r,\varphi)\, r d\varphi dr, \quad F_y = \int_{r_1}^{r_2}\int_0^{\pi} f_y(r,\varphi)\, r d\varphi dr.$$

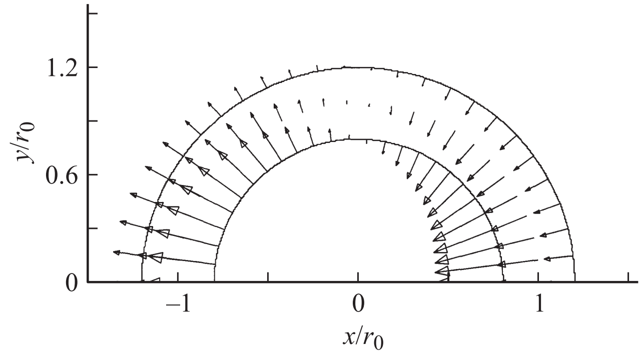

Рис. 8. Векторное поле силы Лоренца при $\beta_0 = 1$, $E_z = 0$, $r_1/r_0 = 0.8$, $r_2/r_0 = 1.2$, $v_x = v_0$, $v_y = 0$.

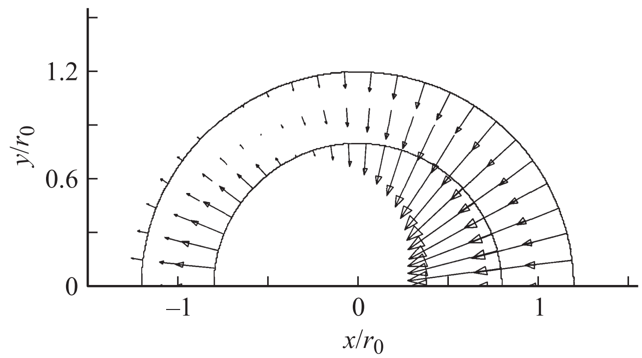

Рис. 9. Векторное поле силы Лоренца при $\beta_0 = 1$, $E_z/(B_0 v_0) = 0.5$, $r_1/r_0 = 0.8$, $r_2/r_0 = 1.2$, $v_x = v_0$, $v_y = 0$.

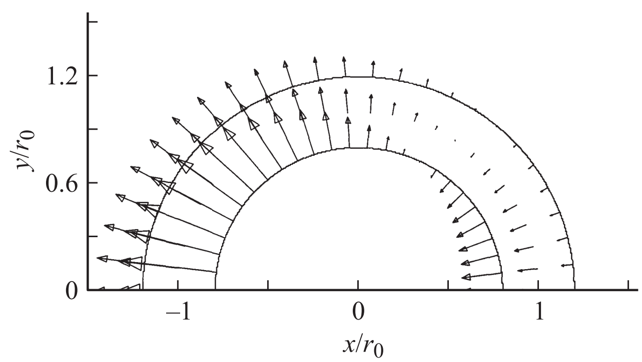

Рис. 10. Векторное поле силы Лоренца при $\beta_0 = 1$, $E_z/(B_0 v_0) = -0.5$, $r_1/r_0 = 0.8$, $r_2/r_0 = 1.2$, $v_x = v_0$, $v_y = 0$.

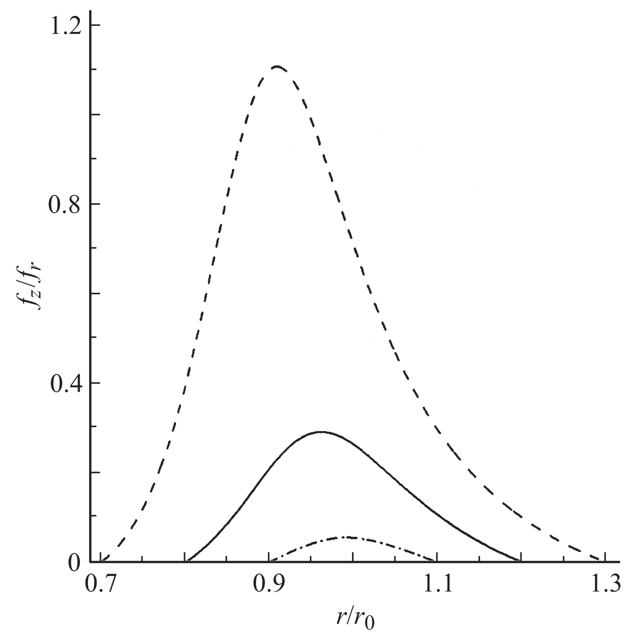

Рис. 7. Радиальное распределение отношения проекций f_z/f_r для различных геометрий областей ионизации потока при $E_z = 0$, $\beta_0 = 10$. Пунктир $r_1/r_0 = 0.7$, $r_2/r_0 = 1.3$, сплошная кривая $r_1/r_0 = 0.8$, $r_2/r_1 = 1.2$, штрихпунктир $r_1/r_0 = 0.9$, $r_2/r_1 = 1.1$.

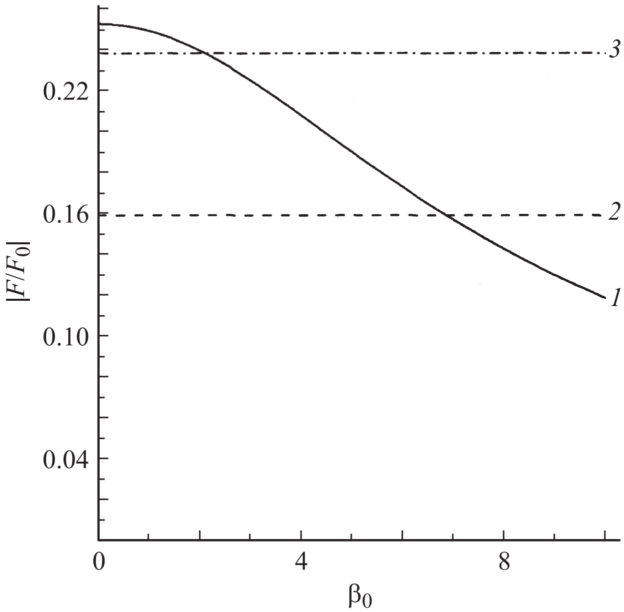

Рис. 11. Зависимости F_x (кривая *1*) и F_y (*2* и *3*) проекций интегральной силы Лоренца, действующей на локально ионизованный поток при $r_1/r_0 = 0.8$, $r_2/r_0 = 1.2$, $v_x = v_0$, $v_y = 0$, $E_z/(B_0v_0) = 0.5$ (*2*), $E_z/(B_0v_0) = 0.75$ (*3*).

Ограничимся рассмотрением ситуации с $v_x = v_0$, $v_y = v_0$. Используя соотношения $f_x = -j_zB_y$, $f_y = j_zB_x$ и выражения (2a), (18) соответственно для магнитного поля и плотности тока j_z, нетрудно показать, что

$$F_y = -2\sigma B_0E_zr_0(r_2 - r_1),$$

$$F_x = \frac{\pi\sigma B_0^2v_0r_0}{2\beta_0}\left[C_1^1\left(I_0\left(\frac{\beta_0r_0}{r_1}\right) - I_0\left(\frac{\beta_0r_0}{r_2}\right)\right)\right.$$

$$\left. - C_2^1\left(K_0\left(\frac{\beta_0r_0}{r_1}\right) - K_0\left(\frac{\beta_0r_0}{r_2}\right)\right)\right], \qquad (21)$$

где коэффициенты C_1^1 и C_2^1 определяются соотношениями (18). Из полученных уравнений (21) видно, что при фиксированных геометрических параметрах и проводимости потока в области ионизации сила Лоренца F_x зависит от параметра Холла и не зависит от поля E_z. Проекция силы Лоренца, действующая в направлении оси y зависит от поля E_z и не зависит от параметра Холла. Направление действия силы F_y определяется направлением поля E_z. При $E_z > 0$, согласно (21), $F_y < 0$, следовательно, сила Лоренца будет прижимать поток к поверхности, что согласуется с результатами, представленными на рис. 9.

Расчеты по формулам (21) показывают, что F_x имеет отрицательное значение при любых параметрах задачи, т.е. сила Лоренца в рассматриваемой конфигурации МГД-взаимодействия всегда тормозит поток. Зависимости абсолютных значений проекций силы Лоренца F_x и F_y от параметра Холла представлены на рис. 11. Силы представлены в безразмерном виде нормированные на величину $F_0 = \sigma B_0^2v_0\pi(r_2^2 - r_1^2)$. Проекция силы Лоренца F_y, в соответствии с уравнением (21), не зависит от параметра Холла, но зависит от величины E_z. Значение $|F_x/F_0|$, согласно рис. 11, монотонно убывает с ростом параметра Холла. Следовательно, с увеличением параметра Холла значение $|F_x|$ может стать меньше $|F_y|$. Так, для $E_z/(B_0v_0) = 0.5$ неравенство $|F_y| > |F_x|$ выполняется при $\beta_0 > 6.9$. С увеличением $|E_z|$ неравенство $|F_y| > |F_x|$ выполняется начиная с меньших значений параметра Холла. При значении $E_z/(B_0v_0) > 0.8$ в условиях, отвечающих рис. 11, величина проекции силы Лоренца, перпендикулярной обтекаемой поверхности, будет больше величины проекции силы Лоренца, тормозящей поток, для всех значений параметра Холла.

Таким образом, МГД-взаимодействие на локально ионизованный поток в неоднородном магнитном поле может быть использовано для управления как подъемной силой, так и отношением подъемной силы к силе сопротивления. Отметим, что при значительном уровне МГД-взаимодействия, приводящего к заметному изменению скоростей в потоке, использование формул (21) для расчета интегральных сил некорректно. В этом случае для расчета интегрального силового воздействия на поток необходимо использовать результаты численного моделирования МГД-течения.

Заключение

В заключение перечислим основные результаты работы. Получено общее решение электродинамических уравнений для электрического потенциала МГД-течения в неоднородном магнитном поле, создаваемом прямолинейным проводником, получены аналитические выражения для распределения электрического потенциала в области локально ионизованной плазмы, границы которой задаются условиями $r_1 \le r \le r_2$, $0 \le \varphi \le \pi$.

Получены аналитические формулы для расчета объемной плотности силы Лоренца и интегральной силы Лоренца, действующей на поток. Показано, что МГД-воздействие на локально ионизованный поток в неоднородном магнитном поле может быть использовано для управления как подъемной силой, так и отношением подъемной силы к силе сопротивления.

Полученные аналитические результаты позволяют проанализировать особенности МГД-воздействия на локально ионизованный поток в неоднородном магнитном поле и провести простые оценки МГД-воздействия на поток при различных параметрах течения. Также полученные результаты могут быть использованы при численных рачетах МГД-течения в неоднородном магнитном поле.

Список литературы

[1] *Фрайштадт В.Л., Куранов А.Л., Шейкин Е.Г.* // ЖТФ. 1998. Т. 68. Вып. 11. С. 43–47.

[2] *Kopchenov V.I., Vatazhin A.B., Gouskov O.V.* // 9th Int. Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf. Norfolk, 1999. AIAA Paper 99−4971.

[3] *Головачев Ю.П., Сущих С.Ю.* // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 2. С. 28–33.

[4] *Macheret S.O., Shneider M.N., Miles R.B.* // 39th AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit. Reno, 2001. AIAA Paper 2001−0492.

[5] *Bityurin V., Bocharov A., Baranov D., Leonov S.* // 40th AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit. Reno, 2002. AIAA Paper 2002−0492.

[6] *Kuranov A.L., Sheikin E.G.* // J. Spacecraft and Rockets. 2003. Vol. 40. N 2. P. 174–182.

[7] *Gaitonde D.* // 41st AIAA Aerospace Science Meeting and Exhibit. Reno, 2003. AIAA Paper 2003−0172.

[8] *Macheret S.O., Shneider M.N., Miles R.B.* // 34th AIAA Plasmadynamics and Lasers Conf. Orlando, 2003. AIAA Paper 2003−3763.

[9] *Битюрин В.А., Ватажин А.Б., Гуськов О.В., Копченов В.И.* // ТВТ. 2004. Т. 42. № 5. С. 745–752.

[10] *Taylor R., Riggins D.W.* // 42nd Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, 2004. AIAA Paper 2004−0859.

[11] *Васильева Р.В., Ерофеев А.В., Лапушкина Т.А., Поняев С.А., Бобашев С.В., Ван-Ви Д.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 9. С. 27–33.

[12] *Sheikin E.G., Kuranov A.L.* // AIAA/CIRA 13th Int. Space Planes and Hypersonic Systems and Technologies Conf. Capua, 2005. AIAA Paper 2005−3223.

[13] *Adamovich I., Nishihara M.* // 44th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, 2006. AIAA Paper 2006−1004.

[14] *Biturin V., Bocharov A., Baranov D.* // 44th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, 2006. AIAA Paper 2006−1008.

[15] *Bityurin V.A., Bocharov A.N.* // Fluid Dynamics. 2006. Vol. 41. N 5. P. 843–856.

[16] *Sheikin E.G.* // 45th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, 2007. AIAA Paper 2007−1379.

[17] *Шейкин Е.Г.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 5. С. 1–9.

[18] *Sheikin E.G., Kuranov A.L.* // 44th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit.. Reno, 2006. AIAA Paper 2006−1372.

[19] *Sheikin E.G.* // 46th Aerospace Sciences Meeting and Exhibit. Reno, 2008. AIAA Paper 2008−1391.

[20] *Бреев В.В., Губарев А.В., Панченко В.П.* Сверхзвуковые МГД-генераторы. М.: Энергоатомиздат, 1988. 240 с.

[21] *Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф.* Специальные функции. М.: Наука, 1977. 344 с.