Краткие сообщения

01

Решение задачи о намагничении тонкостенной цилиндрической оболочки при действии в материале оболочки магнитных полей из рэлеевской области

© М.М. Приемский

Государственный научный центр РФ Центральный научно-исследовательский институт им. акад. А.Н. Крылова,
196158 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: krylov@krylov.spb.ru

(Поступило в Редакцию 9 августа 2007 г. В окончательной редакции 11 декабря 2207 г.)

В рамках теории намагниченности тонкостенных оболочек рассмотрена задача о намагничении во внешнем однородном магнитном поле тонкостенной круговой цилиндрической оболочки бесконечной длины в случае, когда в материале оболочки действуют магнитные поля из рэлеевской области. Показано, что решение задачи может быть сведено к решению бесконечных систем нелинейных уравнений относительно коэффициентов рядов Фурье, представляющих (средние по толщине оболочки и касательные к ее поверхности) составляющие намагниченности и напряженности магнитного поля в материале оболочки. Получены приближенные решения этих систем уравнений, и приведены выражения, определяющие первые коэффициенты упомянутых рядов.

PACS: 41.20.Gz

Задача о намагничении тонкостенных ферромагнитных оболочек во внешнем магнитном поле неоднократно рассматривалась в работах разных авторов (см., например, [1–4]). В них были рассмотрены разные аспекты этой задачи и ее решения. Однако рассмотрение всегда ограничивалось случаем, когда зависимость между намагниченностью $\overline{M}$ материала оболочки и напяженностью $\overline{H}$ действующего в материале оболочки магнитного поля — линейная [5]

$$\overline{M} = k_m \overline{H}, \tag{1}$$

где k_m — начальная магнитная восприимчивость материала.

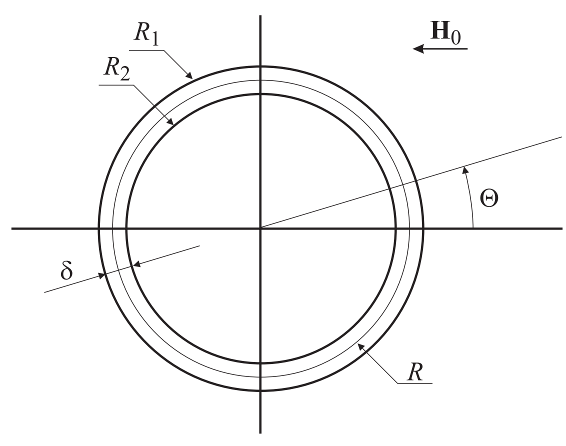
Зависимость (1) имеет место при намагничении магнитотвердых ферромагнитных материалов или действии слабых магнитных полей из рэлеевской области. При намагничении более магнитомягких ферромагнитных материалов или действии более сильных магнитных полей из рэлеевской области зависимость между намагниченностью и напряженностью поля в упомянутых материалах — нелинейная и выражается законом Рэлея [5]

$$\overline{M} = k(H)\overline{H}, \tag{2}$$

где $H = |\overline{H}|, k(H) = k_m + b(H)$, b — коэффициент Рэлея. Эта зависимость является более общей и приближается к линейной при малых значениях параметра bH/k_m.

В настоящей работе с учетом зависимости (2) получено решение задачи о намагничении тонкостенной цилиндрической оболочки, имеющей бесконечную длину и круговое сечение, соотношения между радиусами R_1, R_2 и толщиной δ которого выражаются неравенством $R_1 > R_3 \gg \delta$. При этом оболочка намагничивается внешним однородным магнитным полем с напряженностью $\overline{H}_0$, направленной перпендикулярно продольной оси оболочки и горизонтально (см. рисунок).

Решение задачи получено в рамках теории намагничения тонкостенных ферромагнитных оболочек [2–3], правомерной при малой толщине оболочек по сравнению с другими габаритными размерами. Согласно этой теории намагниченность таких оболочек имеет направление, касательное к их срезанной поверхности (воображаемой поверхности, все точки которой равноудалены от внешней и внутренней поверхностей оболочки), а напряженность действующего в материале магнитного поля, кроме того, меняется линейно в пределах толщины оболочки и, если оболочка бесконечно длинная — всюду вполне определяется средней по толщине намагниченно-



Цилиндрическая оболочка во внешнем магнитном поле.

стью, заданной на срединной поверхности [3]:

$$\overline{H}_M(s_1) = -\text{grad}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \langle M\rangle(s_2)\delta(s_2)\,\frac{\partial}{\partial s_2}\,\ln\,\frac{1}{r_{12}}\,ds_2, \quad (3)$$

где L — направляющая срединной поверхности, r_{12} — расстояние между точками s_1, s_2, $(s_2 \in L)$, $\frac{\partial}{\partial s_2}$ — производная по направлению, касательному к L в точке s_2, $\langle M\rangle(s_2)$ — модуль средней по толщине (измеряемой в нормальном к срединной поверхности направлении ξ) намагниченности

$$\langle\overline{M}\rangle(s_2) = \frac{1}{\delta}\int\limits_{-\frac{\delta}{2}}^{\frac{\delta}{2}} \overline{M}(s_2,\xi)d\xi. \quad (4)$$

В рамках теории намагничения тонкостенных оболочек в представлении напряженности действующего в материале оболочки магнитного поля

$$\overline{H} = \overline{H}_0 + \overline{H}_m \quad (5)$$

достаточно учитывать только касательные составляющие векторов $\overline{H}_0$, $\overline{H}_m$. Поэтому в рамках той же теории зависимости (2) между намагниченностью и напряженностью магнитного поля в материале рассматриваемой оболочки можно придать вид нейлинейного интегрального уравнения

$$\frac{\langle M\rangle(\Theta_1)}{k(H(\Theta_1))} + \frac{1}{2}\,\frac{\delta}{R}\,\frac{\partial}{\partial\Theta_1}\int\limits_0^{2\pi}\langle M\rangle(\Theta_2)\frac{\delta}{\delta\Theta_2}\,\ln\,\frac{1}{r_{12}}\,d\Theta_1$$

$$= H_0\sin\Theta_1, \quad (6)$$

где $R = \frac{R_1+R_2}{2}$ — радиус срединной поверхности; Θ_1, Θ_2 — угловые цилиндрические координаты точек s_1, $s_2 \in L$ в цилиндрической системе координат.

Первое слагаемое в левой части (6) есть величина напряженности магнитного поля в точках срединной поверхности оболочки. Ее можно выразить через $\langle M\rangle(\Theta_1)$, переходя к средним по толщине величинам в зависимости, обратной (2). Последняя при действии поля в материале оболочки магнитных полей из рэлеевской области допускает квадратичную апроксимацию

$$H = \frac{1}{k_m}\,M + pM^2, \quad (7)$$

где p — постоянный коэффициент (при малых bH/k_m равный $-b/k_m^3$). Кроме того, среднюю намагниченность в (6), являющуюся непрерывной и нечетной функцией на L удобно представить в виде ряда Фурье

$$\langle M\rangle(\Theta_1) = m_1\sin\Theta_1 + m_3\sin 3\Theta_1 + m_5\sin 5\Theta_1 + \ldots, \quad (8)$$

где m_i, $i = 1, 3, \ldots$ — коэффициенты ряда. С учетом (7), (8) и разложения логарифма обратного расстояния между точками s_1, s_2 на контуре L [6]

$$\ln\,\frac{1}{r_{12}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\,\cos n(\Theta_1 - \Theta_2) \quad (9)$$

можно преобразовать (6) и получить выражение

$$k_m^{-1}\sum_{n=1}^{\infty} m_{2n-1}\,\frac{2n-1}{2}\left(\frac{2}{2n-1} + \frac{k_m\delta}{R}\right)\sin(2n-1)\Theta_1$$

$$+\,p\left(\sum_{n=1}^{\infty} m_{2n-1}\sin(2n-1)\Theta_1\right)^2 = H_0\sin\Theta_1. \quad (10)$$

Это выражение можно использовать, как производящее, при образовании бесконечной системы нелинейных уравнений относительно коэффициентов m_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$. Такую систему можно образовать, придавая координате Θ_1 в (9) счетное множество значений из интервала $(0;\pi)$, каждое из которых должно соответствовать одному уравнению системы.

Коэффициенты ряда (8), представляющего не только непрерывную, но и многократно дифференцируемую функцию, достаточно быстро затухают с увеличением их номера [7]. Поэтому можно искать приближенное решение системы в виде ограниченного отрезка ряда (8). Коэффициенты этого отрезка можно найти из соответствующим образом усеченной бесконечной системы нелинейных уравнений. Так, ограничиваясь в (8) первым членом и полагая в (10) $\Theta_1 = \frac{\pi}{2}$, можно получить одно уравнение и из его решения найти первый коэффициент ряда (8)

$$m_1 = 2\,\frac{k_m}{2+\frac{k_m\delta}{R}}\,H_0 - 8\,\frac{k_m^3}{\left(2+\frac{k_m\delta}{R}\right)^3}\,pH_0^2$$

$$+\,64\,\frac{k_m^5}{\left(2+\frac{k_m\delta}{R}\right)^5}\,p^2H_0^3\ldots. \quad (11)$$

Ограничиваясь в (8) первыми двумя членами и последовательно полагая в (10) $\Theta_1 = \frac{\pi}{3}$, $\Theta_1 = \frac{\pi}{2}$, можно получить систему из двух уравнений и из ее решения найти коэффициент m_1, незначительно отличающийся от (11)

$$m_1 = 2\,\frac{k_m}{2+\frac{k_m\delta}{R}}\,H_0 - 4\sqrt{3}\,\frac{k_m^3}{\left(2+\frac{k_m\delta}{R}\right)^3}\,pH_0^2$$

$$+\,48\,\frac{k_m^5}{\left(2+\frac{k_m\delta}{R}\right)^5}\,p^2H_0^3\ldots \quad (12)$$

и следующий коэффициент ряда (8)

$$m_3 = \frac{2-\sqrt{3}}{3}\,\frac{k_m p}{\frac{2}{3}+\frac{k_m\delta}{R}+\frac{4}{3}\,pk_m m_1}\,m_1^2$$

$$+\,\frac{2}{3}\left(\frac{2-\sqrt{3}}{3}\right)^2\frac{(k_m p)^3}{\left(\frac{2}{3}+\frac{k_m\delta}{R}+\frac{4}{3}\,k_m p m_1\right)^3}\,m_1^4\ldots. \quad (13)$$

Разложение (8) вместе с коэффициентами m_i представляет собой одно из решений рассматриваемой задачи. Другое решение этой задачи можно получить, если выполнить эквивалентное преобразование (6), применяя к нему оператор $\frac{2}{\pi}\int\limits_L \ldots \ln\frac{1}{r_{13}}\,ds_1$ из [3]. Если при этом принять во внимание (2), то в результате преобразований можно прийти к следующему нелинейному интегральному уравнению относительно средней по толщине оболочки напряженности магнитного поля, действующего в ее материале

$$k_m\langle H\rangle(\Theta_1)+b\langle H\rangle^2(\Theta_1)$$
$$+\frac{2}{\pi}\frac{R}{\delta}\int\limits_0^{2\pi}\langle H\rangle(\Theta_2)\ \ln\frac{1}{r_{12}}\,d\Theta_2=2H_0\,\frac{R}{\delta}\,\sin\Theta_1. \quad (14)$$

Теперь в виде ряда Фурье можно и целесообразно представить величину этой напряженности магнитного поля, как функции нечетной на L

$$\langle H\rangle(\Theta_1)=h_1\sin\Theta_1+h_2\sin3\Theta_1+h_3\sin5\Theta_1\ldots. \quad (15)$$

Преобразуя (14) с учетом (9), (15) можно получить выражение:

$$\sum_{n=1}^{\infty}h_{2n-1}\left(\frac{2}{2n-1}+\frac{k_m\delta}{R}\right)\sin(2n-1)\Theta_1$$
$$+\frac{b\delta}{R}\left(\sum_{n=1}^{\infty}h_{2n-1}\sin(2n-1)\Theta_1\right)^2=2H_0\sin\Theta_1, \quad (16)$$

а придавая координате Θ_1 в (16) счетное множество значений из интервала $(0;\pi)$, можно далее образовать бесконечную систему нелинейных уравнений относительно коэффициентов h_n, $n=1,\,2,\,\ldots$.

Приближенное решение этой системы можно найти так же, как и выше, если ограничиться конечным числом членов ряда (15) и соответствующим образом усечь упомянутую систему уравнений. В результате можно, например, найти, что коэффициенты первых двух членов ряда (15) будут определяться выражениями:

$$h_1=\frac{2}{2+\frac{k_m\delta}{R}}H_0-2\sqrt{3}\frac{\frac{b\delta}{R}}{\left(2+\frac{k_m\delta}{R}\right)^3}H_0^2+12\frac{\left(\frac{b\delta}{R}\right)^2}{\left(2+\frac{k_m\delta}{R}\right)^5}H_0^3\ldots \quad (17)$$

$$h_3=\frac{2-\sqrt{3}}{2}\,\frac{\frac{b\delta}{R}}{\frac{2}{3}+\frac{k_m\delta}{R}+2\,\frac{b\delta}{R}\,h_1}\,h_1^2$$
$$+\left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2\frac{\left(\frac{b\delta}{R}\right)^3}{\left(\frac{2}{3}+\frac{k_m\delta}{R}+2\,\frac{b\delta}{R}\,h_1\right)^3}\,h_1^4+\ldots \quad (18)$$

Следует отметить, что первые члены рядов (11), (12), (17) определяют ту часть средней намагниченности оболочки и ту часть напряженности действующего в материале оболочки магнитного поля, которые можно найти, решая ту же задачу в рамках теории намагничения тонкостенных оболочек в предположении, что правомерна зависимость (1) (см. [2,3]).

В дальнейшем приведенные результаты решения задачи о намагничении тонкостенной цилиндрической оболочки могут быть использованы при определении напряженности магнитного поля оболочки согласно (3) в областях вне и внутри оболочки. При этом в равной мере можно использовать как коэффициенты m_n, так и коэффициенты h_n, $n=1,\,3,\,\ldots$, так как между этими коэффициентами существует связь, следующая из (5), (13)

$$m_1=-2\,\frac{R}{\delta}\,(h_1-H_0),$$
$$m_n=-\frac{2}{n}\,\frac{R}{\delta}\,h_n,\quad n=3,4,\ldots \quad (19)$$

Таким образом, любое из полученных решений может быть использовано в технических приложениях, где необходимо определить магнитное поле рассмотренной тонкостенной оболочки. В частности, эти решения могут быть использованы при разработке магнитостатических экранов.

Список литературы

[1] *Цейтлин Л.А.* // ЖТФ. 1958. Т. 28. Вып. 6. С. 1326–1329.
[2] *Краснов И.П.* Расчетные методы судового магнетизма электротехники. Л.: Судостроение, 1986. 216 с.
[3] *Vishnevsky A., Krasnov I., Lapovok A.* // IEEE Trans. Magn. 1993. Vol. 29. N 3. P. 2152–2155.
[4] *Vishnevsky A., Kalimov A., Lapovok A.* // IEEE Trans. Magn. 2002. Vol. 38. N 2. P. 489–492.
[5] *Вонсовский С.Г.* Ферромагнетизм. М.–Л.: ГИТЛЛ, 1952. 490 с.
[6] *Привалов И.И.* Ряды Фурье. М.–Л.: ГТТИ, 1934. 163 с.
[7] *Смайт В.* Электростатика и электродинамика. М.: ИИЛ, 1954. 604 с.