09

Добротность кольцевых типов колебаний электромагнитных волн в диэлектрической сфере с учетом оптической неоднородности на ее поверхности

© В.И. Тригуб

(Поступило в Редакцию 4 мая 2008 г.)

На основе качественного теоретического анализа получено математическое выражение для подсчета добротности кольцевых типов колебаний электромагнитных волн в капле с учетом оптической неоднородности на ее поверхности, обусловленной флуктуациями.

PACS: 42.62.-b, 92.40.Je

В работе [1] было показано, что добротность резонатора в виде диэлектрической сферы, помещенного в среду с меньшим показателем преломления, чрезвычайно велика. Это объясняется наличием колебаний „кольцевого" типа, которые возникают в результате полного отражения плоской волны от образующей поверхности сферического образца [2]. В работе [2] указанный эффект использовался для объяснения испарения капли под воздействием высокоинтенсивного лазерного излучения. Капля рассматривалась как сферический диэлектрический оптический резонатор, поскольку только в этом случае возможно накопление электромагнитной энергии, достаточной для разрушения водородных связей [2]. Такой подход полностью оправдан, поскольку эффект накопления электромагнитной энергии каплей наблюдался в эксперименте [3].

Однако в работе [2] не исследовано влияние оптической неоднородности на ее поверхности, обусловленной флуктуациями, на добротность кольцевых мод, сформированных в капле при воздействии на нее электромагнитного излучения, поэтому настоящая работа посвящена исследованию этого вопроса.

В работе [4] отмечалось, что если диэлектрическая отражающая поверхность не плоская, то свет, распространяющийся внутри резонатора, вблизи поверхности, должен просачиваться (туннелировать) тангенциально к поверхности, причем свет внутри диэлектрической сферы распространяется по ломаной траектории, грубо приближающейся к окружности.

Для получения коэффициента, учитывающего потери электромагнитной энергии диэлектрической сферой, авторы работы [4] воспользовались известной аналогией между волновой оптикой и квантовой механикой. В соответствии с этой аналогией (моделью) плоская световая волна, распространяясь по ломаной траектории, при некоторой минимальной величине отрезка (этой ломаной) должна туннелировать сквозь поверхность сферы по закону [4]:

$$\mathscr{W} = (A^2/B^2) \sim \exp(-2\Delta s k),$$

где A — амплитуда электромагнитной волны, прошедшей сквозь поверхность сферы, B — амплитуда падающей электромагнитной волны на внутреннюю поверхность сферы, Δs — геометрический размер отрезка ломаной траектории плоской электромагнитной волны, k — волновое число.

В работе [2] показано, что форма капли воды в эксперименте [3] была строго сферической, т. е. тонкая стекловолоконная нить, на которой была подвешена капля в воздушной среде, и гравитационное поле не оказывали существенного влияния на форму капли. Однако известно, что вследствие малых флуктуаций (по сравнению с длиной волны света), возникающих на границе раздела вода–воздух возникает шероховатость, достаточная для рассеяния света.

Нарушение оптической однородности на поверхности капли имеет статистический характер, поэтому коэффициент $\mathscr{W}$ должен выражать вероятность туннелирования света из сферы. Это утверждение справедливо и для твердой диэлектрической сферы, имеющей на поверхности микрошероховатость, поскольку разброс микронеровностей тоже имеет статистическую закономерность. В этом случае необходимо ввести параметр $\mathscr{W}^*$ — вероятность отражения световой волны от образующей поверхности диэлектрической сферы, причем: $\mathscr{W} + \mathscr{W}^* = 1$ [5].

Пусть траектория светового луча в сфере представляет собой замкнутую ломаную линию, состоящую из m отрезков. Тогда в случае точной симметрии и однородности сферы, но с учетом неоднородности (микрошероховатости) на ее поверхности, вероятность туннелирования светового излучения одновременно в m-местах окружности, в соответствии с законами теории вероятностей [5], запишется как

$$\mathscr{W}^m = \mathscr{W}_1 \mathscr{W}_2 \dots \mathscr{W}_m \sim \exp\left[-2\Sigma(\Delta s k)\right] = \exp(-2\Delta s k m), \qquad (1)$$

$$\mathscr{W}_1 = \mathscr{W}_2 = \dots = \mathscr{W}_m.$$

Формула (1) записана для одинаковых (по протяженности) отрезков Δs.

Предел произведения (1) по всем бесконечно малым интервалам Δs замкнутого контура при значении m, стремящемся к бесконечности, представляет собой интеграл потерь электромагнитной энергии за проход:

$$\alpha = \exp\left(-2\int k ds\right), \tag{2}$$

где $s = 2\pi(R/n)$ [6]; $n = n_2/n_1$ — относительный показатель преломления [2], $n_2 = (\varepsilon_2)^{1/2} = 1.33$ — показатель преломления сферы (воды), $n_1 = (\varepsilon_1)^{1/2} = 1$ — показатель преломления воздуха; R — радиус сферы; $\int$ — интеграл по замкнутому контуру s.

В работе [1] исследовались сферические образцы из твердого оптически прозрачного диэлектрика диаметром 1−2 mm (соответствующим размерам капель воды, исследовавшихся в работах [2,3]), причем точность обработки образцов была не менее 10^{-4} размера (т.е. точность обработки составляла $\sim 10^{-7}$ m, что соответствует длине волны света). Микроскопический вид поверхности такой сферы представляет собой случайно расположенные микронеровности. Подобная шероховатость достаточна для рассеяния света. Тем не менее как показал эксперимент, добротность кольцевых мод оказалась высокой.

Известно, что условием накопления электромагнитной энергии в резонаторе является установление стоячих волн. Стоячие волны образуются в сферическом резонаторе, если по его окружности укладывается целое число длин волн:

$$N\lambda = 2\pi R, \tag{3}$$

где $N = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$
В этом случае стоячая волна не уничтожается вследствие интерференции с самой собой. С учетом (3) интеграл по замкнутому контуру s в показателе экспоненты (2) запишется как

$$\int k ds = N. \tag{4}$$

Следовательно, если исходить из известной аналогии между волновой оптикой и квантовой механикой [4], выражение (4) можно отождествить с адиабатической инвариантностью [7]. Следовательно, бесконечно медленные (адиабатические), по сравнению со временем формирования кольцевых мод, флуктуационные изменения поверхности капли, которые можно уподобить шероховатости, не ведут к изменению значения действия $\int k ds$, равного целому числу. В адиабатическом приближении каплю можно рассматривать как твердую диэлектрическую сферу, имеющую на своей поверхности микрошероховатость. Эксперимент показал [1], что подобная микрошероховатость не снижает добротности кольцевых мод, расположенных вблизи поверхности сферы. Приведенные выше выводы качественного теоретического анализа полностью согласуются с этим опытным фактом. Действительно, формулу (2) с учетом (4) можно записать как

$$\alpha = \exp(-2N).$$

Тогда, если N велико ($\lambda \ll R$), т.е. электромагнитная волна приближается к поверхности сферы, то $\alpha \sim 0$. Следовательно, потери сферой электромагнитной энергии за один проход крайне малы. Это явление напоминает известный физический эффект: луч света, падающий почти касательно на матовую поверхность, отражается от нее как от зеркала. Полученные результаты позволяют объяснить причину высокой добротности кольцевых мод в диэлектрической сфере, имеющей микрошероховатость на поверхности.

Таким образом, исходя из полученных результатов можно сделать вывод, что кольцевые моды, соответствующие односторонним поверхностным электромагнитным волнам в сферическом резонаторе, имеющем на поверхности микрошероховатость вышеуказанного вида, должны быть долгоживущими, т.е. их добротность должна быть значительно больше добротности всех других типов колебаний. Напомним, что односторонняя поверхностная волна возникает на границе раздела двух сред с различными значениями диэлектрической проницаемости при падении плоской волны из среды с большей диэлектрической проницаемостью под углом, превышающим угол полного внутреннего отражения [2].

Поскольку при достаточно малых λ и, следовательно больших волновых числах k, поле сосредоточено почти целиком внутри диэлектрической сферы, вблизи ее поверхности, как было отмечено выше, то можно записать

$$k = (n^2 - 1)^{1/2}/\lambda. \tag{5}$$

Докажем справедливость данного утверждения. Для этого выберем на поверхности сферы область a, удовлетворяющую условию: $\lambda \ll a \ll R$, причем $\sigma = a^2$. Тогда при исследовании условий, при которых поле электромагнитной волны концентрируется внутри диэлектрика, с большей диэлектрической проницаемостью, можно не учитывать кривизны поверхности.

Запишем решения уравнения электродинамики для этого случая при

— $z > R$:

$$E_z = (i\chi/\xi)C_1\exp(-\xi z), \quad E_y = C_1\exp(-\xi z),$$

$$H_x = (i/\xi\lambda)C_1\exp(-\xi z);$$

— $-R < z < R$ (и $z = -R,\ R$):

$$E_z = (i\chi/\phi)C_2\cos(\phi z), \quad E_y = C_2\sin(\phi z),$$

$$H_x = (i\varepsilon_2/\phi\lambda)C_2\cos(\phi z), \quad C_1 = C_2\exp(\xi R)\sin(\phi R);$$

— $z < -R$:

$$E_z = (i\chi/\xi)C_1\exp(\xi z), \quad E_y = -C_1\exp(\xi z),$$

$$H_x = (i/\xi\lambda)C_1\exp(\xi z).$$

Параметры ξ и ϕ определяются из системы уравнений:

$$\xi R = (\phi R/\varepsilon_2)\,\mathrm{tg}(\phi R); \quad (\xi R)^2 + (\phi R)^2 = (kR)^2,$$

где $k = (n^2 - 1)^{1/2}/\lambda$; C_1 и C_2 — постоянные; E и H — компоненты электрического и магнитного полей;

$i = (-1)^{1/2}$; χ — постоянная распространения; ось z направлена перпендикулярно плоской поверхности σ; $\mu_1 = \mu_2 = 1$, μ_1, μ_2 — магнитная проницаемость сред.

Из приведенных выше уравнений следует, что при малых λ, т.е. при больших значениях ξ (ϕ — ограничено) поле практически не выходит за пределы среды с диэлектрической проницаемостью ε_2.

Подставив (5) в (4) и проинтегрировав (4), получим

$$\int kds = (2\pi R/\lambda)\left\{\operatorname{arsh}(n) - [(n^2-1)^{1/2}/n]\right\}. \qquad (6)$$

Заметим, что $\operatorname{arsh}(n) = \operatorname{arch}(n)$ при $n > 1$ [8]. Сравнив выражения (6) и (4), находим:

$$2\pi R\left\{\operatorname{arsh}(n) - [(n^2-1)^{1/2}/n]\right\} = N\lambda. \qquad (7)$$

Выражение (7) справедливо для электромагнитных волн, которые удерживаются внутри сферы благодаря внутреннему отражению от ее границы. Из полученных выше выражений видно, что затухание этих мод мало, поэтому они представляют собой свободные моды колебаний диэлектрической сферы [9].

В соответствии с определением добротности Q [9]:

$$Q = ks/\alpha,$$

где s — размер резонатора.

Тогда с учетом формул (2), (5), (6) запишем

$$Q = (2\pi R/\lambda)\left[(n^2-1)^{1/2}/n\right]$$
$$\times \exp\left\{2(2\pi R/\lambda)[\operatorname{arsh}(n) - ((n^2-1)^{1/2}/n)]\right\}.$$

Формула (7) позволяет оценить предельную толщину приповерхностного слоя в капле, устанавливающую область накопления электромагнитной энергии [2]:

$$l_0 = R\left\{\operatorname{arsh}(n) - [(n^2-1)^{1/2}/n]\right\} = 200\ \mu\text{m}.$$

Полученное значение предельной толщины слоя хорошо совпадает с величиной l_0, полученной из закона сохранения энергии [2]:

$$l_0 = (Wt_0/U_0\,\mu),$$

где U_0 — энергия водородной связи, W — интенсивность лазерного излучения, t_0 — время облучения капли до начала ее испарения, μ — концентрация молекул воды.

При экспериментальных значениях параметров [3]: $W = 4\cdot 10^5\ \text{W/m}^2$, $\mu = 3\cdot 10^{28}\ \text{m}^{-3}$, $W = 3.2\cdot 10^{-20}\ \text{J}$, $t_0 = 0.5\,\text{s}$ получим $l_0 = 200\,\mu\text{m}$.

Список литературы

[1] *Garret C.G.B., Kaiser W., Bond W.L.* // Phys. Rev. 1961. Vol. 124. N 6. P. 1807–1809.
[2] *Тригуб В.И.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 4. С. 120–123.
[3] *Рудаш В.К., Бисярин В.П., Ильин Н.М.* и др. // Квант. электрон. 1973. № 3 (17). С. 21–26.
[4] *Тригуб В.И., Болдыревский П.Б.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 1. С. 134–135.
[5] *Вентцель Е.С.* Теория вероятностей. М.: Наука, 1964. 564 с.
[6] *Svelto O.* // Appl. Opt. 1962. Vol. 1. P. 745–746.
[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Квантовая механика (нерелятивистская теория). М.: Наука, 1989. 768 с.
[8] *Двайт Г.Б.* Таблицы интегралов и другие математические формулы. М.: Наука, 1978. 224 с.
[9] *Солименко С., Крозиньяни Б., Ди Порто П.* Дифракция волноводное распределение оптического излучения. М.: Мир, 1989. 662 с.