

01;05

Трехмерное моделирование динамических процессов формирования микрокластеров в кристаллической матрице

© А.В. Можаяв,¹ Э.Ю. Бучин,² А.В. Проказников²

¹ Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия

² Ярославский филиал Физико-технологического института РАН,
150007 Ярославль, Россия
e-mail: prokaznikov@mail.ru

(Поступило в Редакцию 21 марта 2008 г.)

Разработана и реализована дискретная компьютерная трехмерная модель многостадийных процессов формирования пористых кластеров в кристаллической матрице. Создан пакет компьютерных программ, моделирующих динамические процессы формирования кластеров в глубине кристаллов с учетом процессов, происходящих на поверхности, приложенных внешних полей, а также химических реакций, сопровождающих эти процессы. Морфологическая картина формируемых пор соотнесена с закономерностями, связанными с формой вольт-амперной характеристики процесса анодирования.

PACS: 07.05.Tr, 02.60.Cb

Введение

В последнее время значительно возрос интерес к исследованиям структур с пониженной размерностью, проявляющих ряд необычных свойств, которыми не обладает исходный материал. Простейшими возможностями создания такого рода структур с пониженной размерностью являются анодирование полупроводника в режиме порообразования или его химическая обработка в специальных составах, приводящие к формированию пористого пространства, которое включает в себя кластеры квантовых размеров. Процессы формирования структур пониженной размерности тесным образом связаны с явлениями, описываемыми случайными блужданиями различных физических объектов.

Явление случайного блуждания в трехмерном пространстве, когда частицы формируют кластеры в определенных местах, представляет интерес как с точки зрения изучения общих свойств образования кластеров, так и в плане практического применения. С точки зрения фундаментального значения задача о случайных блужданиях тесно связана, например, с проблемой фазовых переходов. Интересной является также задача, в которой помимо случайного блуждания имеет место движение в выделенном направлении, обусловленное приложенным внешним полем. В частности, подобная ситуация имеет место при формировании как кластеров, так и сплошных слоев при осаждении металлов из растворов солей, а также при кластеризации ионно-синтезированных структур в ходе отжига.

Как показывает эксперимент, физические свойства кластеров зависят от условий их формирования [1,2], поэтому вызывает интерес более детальное изучение воздействия различных параметров на свойства как пористых, так и созданных на их основе металлических кластеров, прежде всего, на их рост и размер. Подобный

интерес диктуется в настоящее время стремлением создать объекты нанометровых размеров с заданными свойствами. Следует отметить, что физические закономерности, проявляющиеся на этих масштабах, отличаются от закономерностей для макрообъектов.

Настоящая статья продолжает ряд работ, опубликованных ранее [3,4]. Основной целью исследований является создание и развитие физической модели, адекватно описывающей закономерности процессов кластеризации, которые лежат в основе ряда фундаментальных процессов при создании функциональных микро- и наноструктур. В качестве модельного выбран процесс порообразования в кремнии *n*-типа. Это обусловлено, во-первых, тем, что данный метод доступен с точки зрения экспериментальной проверки теоретических результатов, а, во-вторых, тем, что получаемая пористая матрица (пористый кремний) имеет большое количество морфологических типов, при этом большая их часть может быть отнесена к нанообъектам и проявлять квантовые свойства. Пористый кремний интересен как сам по себе, так и в плане использования его в качестве матрицы, в которую могут быть интегрированы различные вещества, в частности нанокластеры металлов. Подобные нанокомпозитные материалы активно исследуются в настоящее время.

1. Постановка задачи и теоретическая модель

В настоящей работе изучается трехмерный случай задачи формирования кластеров в потенциальных полях. Для плоского случая эта проблема была рассмотрена нами в работах [3,4]. Движение частиц в поле случайных скоростей управляется также приложенным внешним полем. Движение подобной частицы описывается систе-

мой обыкновенных уравнений [5]:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{U}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0, \quad (1)$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{u}_0(\mathbf{r}, t)$ — детерминированная составляющая поля скоростей, а $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ — случайная составляющая поля скоростей. Подобная постановка проблемы для случайного блуждания частицы при наличии приложенного внешнего потенциала обычно приводит к уравнению Фоккера–Планка [6]. Действительно, упорядоченный поток частиц можно записать в виде

$$\rho \mathbf{u}_0 = -\frac{1}{\gamma} \rho \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{r}}, \quad (2)$$

где φ — потенциал внешнего силового поля, $\gamma = 6\pi R\eta$, R — радиус броуновской частицы, η — динамическая вязкость среды, ρ — функция распределения $\rho(t, \mathbf{r})$, причем используется временная шкала, такая, что $t \gg \tau$ (τ — время исчезновения информации о начальном состоянии). Заметим, что распределение по импульсам хаотически блуждающей частицы в этой шкале является в любой момент времени максвелловским. Функция распределения в этой шкале зависит только от координат и времени — $\rho(t, \mathbf{r})$. Случайное блуждание, с макроскопической точки зрения, имеет характер диффузионного процесса, поэтому

$$\rho \mathbf{u} = -D \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}}. \quad (3)$$

Поскольку функция распределения $\rho(t, \mathbf{r})$ должна удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \mathbf{U})}{\partial \mathbf{r}} = 0, \quad (4)$$

с учетом (1)–(3) приходим к уравнению Фоккера–Планка, которое в равновесном случае имеет в качестве решения бальцмановское распределение.

Решение задачи о случайном блуждании в трехмерной решетке приводит к выражению для вероятности $P_N(\mathbf{R})$ того, что точка, совершающая случайные блуждания в решетке с единичными векторами \mathbf{e}_i , будет после $N = n_1 + n_2 + n_3$ шагов иметь координату

$$\mathbf{R} = n_1 \mathbf{e}_1 + n_2 \mathbf{e}_2 + n_3 \mathbf{e}_3 \quad (5)$$

вида [7]

$$P_N(\mathbf{R}) = \left(\frac{3}{2\pi N} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{3R^2}{2N} \right), \quad (6)$$

где $R = |\mathbf{R}|$. Таким образом, стандартные подходы [6,7] приводят к гауссовому виду распределения вероятности $P_N(\mathbf{R})$.

В нашей задаче вблизи одной из границ движения (условно принятой за верхнюю) формируются области скопления образующихся частиц, которые собираются

в кластеры. Эти частицы порождаются как случайным блужданием одного (или нескольких) реагентов при наличии внешнего потенциала, так и случайными процессами на границе. Конечные точки случайного блуждания частиц, стартовавших с противоположной от растущего кластера границы, с определенной вероятностью инициируют формирование точек кластера. Вероятность присоединения частицы различна в разных местах пространства на границе кластера и вычисляется посредством специальной процедуры. В случае преобладания случайной составляющей форма кластера имеет фрактальную структуру и зависит от ряда параметров, например от типа сетки, по которой происходит блуждание, от вероятности прилипания частицы к кластеру и от других параметров. При наличии внешних полей имеется возможность влиять на случайное движение частиц с целью управления формой образующихся кластеров [3,4]. Определенный интерес представляет проблема влияния граничных условий на формируемые кластеры. Таким образом, поставленная проблема заключается в изучении закономерностей роста порождаемых подобным образом кластеров. В исследуемой задаче учитывается влияние поля растущего кластера на движение частицы, поэтому задача является нестационарной.

Компьютерное моделирование позволяет решить определенный круг задач, характеризующийся наличием стохастической составляющей, решение которых иными способами не представляется возможным. Эти задачи касаются прежде всего случаев, когда могут быть сформулированы локальные правила, а глобальные свойства могут быть получены либо усреднением по ансамблю, либо посредством определения особого вида характеристик (например, вычислением фрактальных размерностей [8]).

В настоящей работе изучаются закономерности формирования трехмерных пористых кластеров в глубине трехмерного кристалла, представленного в виде параллелепипеда, которые растут от плоской грани в глубь кристалла. Область внутри параллелепипеда покрыта кубической сеткой, по которой движутся частицы, имеющие стохастическую компоненту в распределении скоростей, а также компоненту, определяемую детерминированным распределением потенциальных полей. Граничные условия на верхней грани параллелепипеда связаны с протеканием адсорбционных процессов и определенных химических реакций, в работах [9,10] явления на поверхности кристалла, помещенного в активную среду, исследовались посредством модели вероятностных клеточных автоматов [11]. Подобная ситуация существует в физико-химических процессах, сопровождающих анодирование, электроосаждение, адсорбцию и др. [12].

По сравнению с моделью, рассмотренной в [9,10], в настоящей работе добавлено четвертое состояние элементарной ячейки („клетки“), которое она может принимать: либо окисление, либо вступление в иную химическую реакцию перед процессом формирования

кластеров. Другим дополнительным процессом, включенным в настоящую модель, является приход положительно заряженной дырки из глубины кристалла, в соответствии с моделью, рассмотренной в работах [3,4], что имеет место при анодировании кремния *n*-типа. Таким образом, в настоящей работе создана трехмерная дискретная модель, объединяющая результаты разработок предыдущих компьютерных моделей [3,4,9,10].

Как показывают оценки длины свободного пробега дырки ее величина, обусловленная подвижностью дырки во внешнем электрическом поле, находится в пределах 0.12–1.2 nm для полей порядка 10–100 V. За счет диффузионного движения дырка проходит расстояние порядка толщины кремниевой пластины 0.5 mm за время порядка 10^{-4} s.

Если принять во внимание возможное глубокое проникновение ионов фтора F^- под поверхность кремния в ходе электрохимических реакций растворения кремния (см., например, [13]), то оценки времени жизни иона фтора в потенциальной яме глубиной ~ 0.7 eV в отсутствие внешнего поля приводят к величине порядка 0.5 s. Приложение внешнего потенциала резко уменьшает время нахождения иона фтора в потенциальной яме, которое составляет $\sim 7.2 \cdot 10^{-2}$ s для приложенной внешней разности потенциалов 5 V и $\sim 2 \cdot 10^{-9}$ s — при разности потенциалов 50 V.

Как свидетельствуют экспериментальные данные, для условий формирования пористого пространства, реализованных в работе [14], когда в ходе анодирования производилось непрерывное освещение образца кремния с обратной стороны интенсивным инфракрасным излучением, время удаления одного атома кремния из кристаллической матрицы в раствор составляло $\sim 10^{-10}$ s, что является весьма высоким значением. В виду того, что кремний является прозрачным для инфракрасного диапазона излучения, генерация неравновесных дырок производилась внутри объема кремниевое кристалла. Темп реакций порообразования лимитировался в [14] только вступлением кремния в химические реакции растворения. В нашем случае подсветка с целью генерации дырок, необходимых для участия в электрохимических реакциях, производилась лампой накаливания большой мощности (порядка 250 W), так что генерация дырок и их доставка к поверхности лимитировали протекание электрохимических реакций.

Постановка компьютерной задачи трехмерного моделирования состоит в следующем. Рассматривается трехмерный кристалл в виде параллелепипеда. Верхняя грань находится в контакте с активной средой (при анодировании — это электролит, в случае сенсоров — газовая среда и т.п.), так что на ее поверхности происходят адсорбция/десорбция активных молекул (атомов), их зарядка и вступление в химическую реакцию. Из глубины кристалла под действием приложенного потенциала приходит дырка (либо другой реагент, например, ион фтора, см. работу [13]). Ее движение описывается случайным блужданием в потенциальном поле.

Вероятность перехода в соседнее состояние зависит от распределения электрического потенциала внутри кристалла. Рассматривались различные модели, в которых вероятности переходов в соседние состояния либо активационно связаны со значением потенциала, что реализует прыжковый тип проводимости, либо вероятность модулируется значением потенциала в ближайших точках, как это было сделано в [3,4]. Приход дырки к поверхности, в совокупности с нахождением клетки на поверхности кристалла в определенном состоянии, приводит к переходу соответствующей клетки кристалла в конечное (неизменяемое) состояние, приписываемое кластеру. Например, при формировании пористого пространства кластером является образующаяся пора, так что принадлежность ячейки поре означает наличие пустого пространства в данном месте исходного параллелепипеда, моделирующего исходный кристалл.

Распределение прикладываемой разности потенциалов учитывается при вычислении перехода дырки (реагента) из текущего состояния в последующее, причем чем выше разность потенциалов, тем больше вероятность перехода между соответствующими состояниями. С ростом кластера, заполненного в ходе реального анодирования проводящим электролитом, увеличивается влияние электрического поля растущего кластера на окружение. Это влияние рассчитывается путем суммирования вкладов отдельных элементарных кубических ячеек, для которых вклад рассчитывается согласно закону Кулона.

Ввиду нестационарности задачи постоянно изменялась конфигурация порового пространства, которое полностью проводящим электролитом, поэтому производился перерасчет распределения зарядов на границе электролит–полупроводник, а затем и новый расчет распределения потенциала. Таким образом, моделировалось решение нестационарной трехмерной задачи, точное решение которой аналитическим способом не представляется возможным.

2. Основные результаты

В настоящей работе было проведено компьютерное исследование формируемого слоя кластеров следующим образом. Весь слой сформированных кластеров разбивался на слои определенной толщины, в которых подсчитывалось общее число частиц, принадлежащих кластерам. После этого с помощью специальной программы строился профиль распределения кластерных частиц по глубине. Эта зависимость, согласно сказанному выше, аппроксимировалась гауссовой кривой следующего вида:

$$f(x) = A \exp\left\{-\frac{(x - m_x)^2}{2\sigma_x^2}\right\}, \quad (7)$$

где x — глубина, отсчитанная от поверхности кристалла кремния со стороны электролита, m_x — математическое ожидание, σ_x^2 — дисперсия распределения, A — параметр.

Как показало компьютерное моделирование, с ростом приложенного потенциала дисперсия распределения (7) убывает, что соответствует более однородному формированию кластеров вследствие их меньшего ветвления. Моделирование продемонстрировало также, что при повышении потенциала плотность пор увеличивается, а их ветвление и длина уменьшаются, в частности, вследствие большего затягивания дырки в глубь полупроводника и меньшего рассеяния дырки, принимающей участие в электрохимических реакциях. Эксперимент показывает для макропор похожую зависимость для плотности пор и их формы, однако дает противоположную зависимость для их длины [15,16]. Это связано с тем, что в компьютерном моделировании была использована одна и та же плотность дырок для разных потенциалов, в то время как в эксперименте большим потенциалам соответствуют большие значения токов, что приводит к формированию более длинных пор. При компьютерном моделировании, чтобы создать аналогичные условия, необходимо большее время, чем для моделирования процесса при меньших потенциалах.

С целью создания адекватной компьютерной модели был использован тот факт, что морфология пористой структуры при анодировании кремния *n*-типа, где дырки не являются основными носителями, определяется положением рабочей точки на вольт-амперной характеристике (ВАХ) процесса анодирования [17]. Для моделирования процесса вводится эталонная вольт-амперная характеристика, которая может быть масштабирована с помощью ВАХ для реального процесса. Согласно этой ВАХ, прикладываемым напряжениям соответствовали определенные плотности тока (с реальными, взятыми из эксперимента, либо модельными величинами). Эти плотности тока вводились в исследуемую модель. Таким образом, разработанная модель приложима к весьма широкому диапазону параметров. В силу универсальной зависимости типа морфологии пористой структуры от положения рабочей точки на ВАХ разработанная модель также имеет достаточно универсальный характер.

Более прямолинейные поры формируются при компьютерном моделировании с учетом диффузии фтора со стороны электролита. Как показано в экспериментальной работе [13], ионы фтора под действием приложенного потенциала способны проникать в глубь кристалла кремния, вплоть до противоположной границы кремниевой подложки. Подобные закономерности по глубокому проникновению ионов фтора в кремний отмечены также в работе [18] для процессов плазмохимического травления. Диффузия ионов фтора в глубь кристалла кремния моделировалась в настоящей работе с учетом активационной зависимости подвижности ионов фтора от приложенного потенциала.

На рис. 1, *a* представлены смоделированная структура плоского кластера и распределение потенциала в виде эквипотенциальных линий, учитывающее как внешний приложенный потенциал, так и потенциал, создаваемый

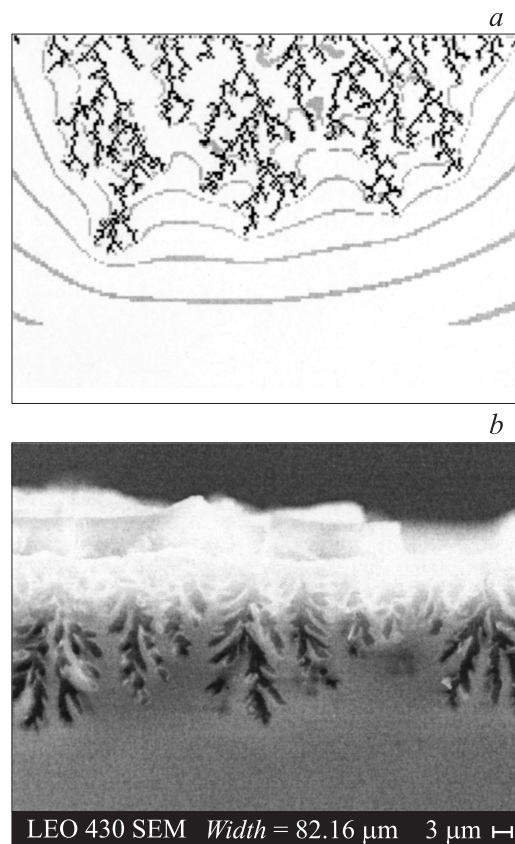


Рис. 1. Двумерная кластерная структура и распределение потенциала в виде эквипотенциальных линий, полученные компьютерным моделированием (*a*). Поперечный срез экспериментально полученной структуры пористого кремния, сформированного путем анодирования кремниевой пластины в растворе плавиковой кислоты (*b*).

формирующимися кластерами. На рис. 1, *b* демонстрируется поперечный срез экспериментально полученной структуры пористого кремния, сформированной путем анодирования кремниевой пластины в растворах плавиковой кислоты при заданных параметрах.

В результате проведенного компьютерного моделирования на основе разработанного пакета программ в трехмерном случае при определенных значениях соответствующих параметров были получены структуры, представленные на рис. 2, *a*. Для сравнения на рис. 2, *b, c* представлены панорамные электронные снимки металлических реплик пористых кластеров, полученных методом гальваноластики. Для изготовления реплики в матрицу пористого кремния, сформированного путем анодирования кремния в растворах плавиковой кислоты, внедрялся никель посредством осаждения и раствора по технологии, аналогичной описанной в работе [19]. При этом никель не полностью проникал в поры так что структура, изображенная на рис. 2, *b, c*, представляет собой только частично заполненные никелем поры вблизи отверстий на поверхности. Сама кремниевая подложка затем удалялась в горячем растворе едкого

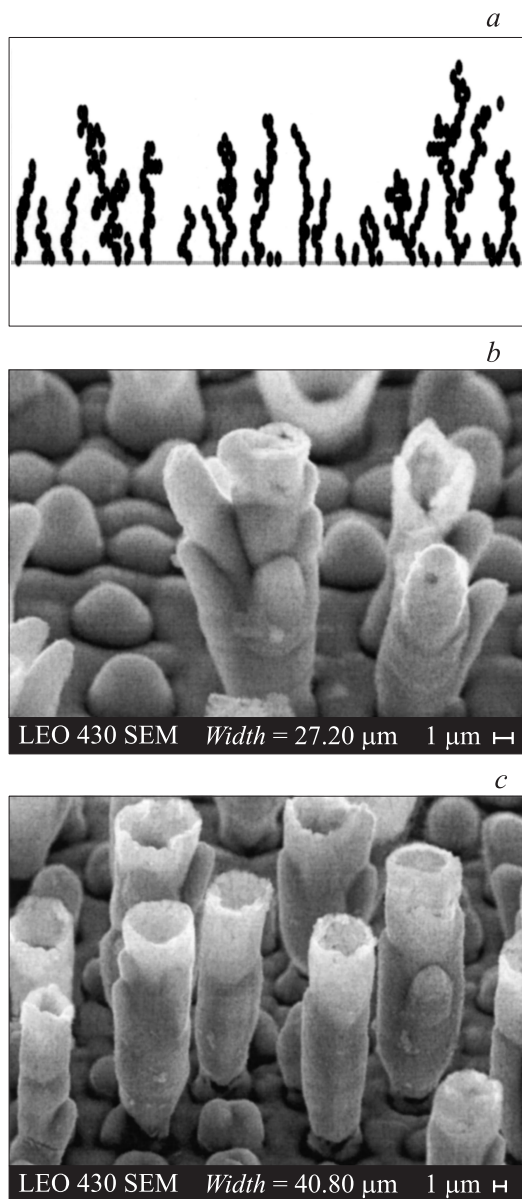


Рис. 2. Структура трехмерного кластера, полученного в результате компьютерного моделирования (а). Трехмерные структуры, полученные по специальной технологии осаждения металла в пористые кластеры и последующего стравливания кремниевой матрицы (b, c).

калия. Аналогичные структуры приведены на рисунке в работе [20].

Сформированные кластеры имели, как правило, достаточно разветвленную структуру, поэтому определялась фрактальная размерность кластеров по формуле [8]

$$D = - \lim_{\xi \rightarrow 0} \left(\ln(N(\xi)) / \ln(\xi) \right), \quad (8)$$

где ξ — диаметр шаров, которыми покрывается структура, $N(\xi)$ — минимальное количество шаров с диаметром ξ , необходимых для покрытия измеряемой структуры.

Для оценки фрактальной размерности получаемых пористых структур применяется метод, состоящий из двух частей.

Первая часть состоит в последовательном вычислении пар величин $\ln(\xi)$ и $\ln(N(\xi))$ для различных ξ . В качестве начального ξ берется длина ребра клетки разбиения — ξ_0 . Остальные значения ξ определяются по формуле: $\xi_{i+1} = \xi_i 2$. Значение ξ возрастает до тех пор, пока оно не станет большим либо равным половине длины максимального из ребер параллелепипеда. Таким образом, получается множество точек с координатами $(-\ln(\xi_i), \ln(N(\xi_i)))$.

Вторая часть заключается в нахождении прямой, наиболее приближенной к этому множеству точек. А именно: ищется такая прямая, сумма квадратов расстояний от которой до точек из указанного множества минимальна. Этот процесс сводится к нахождению точки минимума функции $G(a, b, c) = \sum (ax_i + by_i + c)^2$, где (x_i, y_i) — i -я точка множества; a, b, c — коэффициенты искомой прямой: $ax + by + c = 0$. Причем, можно считать, что $a^2 + b^2 = 1$. После нахождения указанной прямой вычисляем тангенс ее угла наклона — это и будет приближенная фрактальная размерность пористой структуры. Максимальная фрактальная размерность кластерных структур, которые были сформированы на основании разработанного алгоритма в рамках представленной модели, составляла 2.39.

3. Обсуждение и выводы

Задачи, связанные со случайным блужданием частиц по сетке, носят достаточно общий характер и охватывают широкий спектр физических, химических и математических проблем. Используемая в настоящей модели теория броуновского движения частиц по трехмерной решетке важна как в статистической механике, так и для многих других областей теоретической физики. Отметим, что в том случае, когда возможно построить гамильтониан, не содержащий взаимодействия, многие фундаментальные уравнения физики, например, уравнение Шредингера для волновой функции частицы и уравнение Блоха для матрицы плотности имеют такую же математическую структуру, как и уравнение диффузии броуновской частицы. Если включено достаточно слабое взаимодействие, то решение этих уравнений можно найти методом теории возмущений, исходя из уравнения диффузии. Уравнение Лиувилля можно исследовать аналогичным образом (см. например, [6,7]).

Отметим, что важным аспектом настоящего исследования является использование при решении данной проблемы алгоритмов управления динамическими структурами данных, создание которых, вообще говоря, является актуальной задачей программных разработок в настоящее время (см., например, работу [21]). Модель случайных блужданий встречается, например, в задаче оптимального управления одним стеком в

двухуровневой памяти [21]. Актуальность подобных задач диктуется потребностью современной электронной индустрии программного и аппаратного обеспечения, особенно для мобильных устройств с ограниченным ресурсом памяти. Задача, связанная с блужданием по трехмерной решетке, возникает в связи с исследованием распределения m единиц памяти по трем стекам, двум из которых, растущим навстречу друг другу, отведено s единиц памяти, а третьему стеку отведено соответственно $m-s$ единиц. Как отмечалось в работе [22], стохастические методы могут конкурировать с детерминированными численными при решении широкого круга задач. С точки зрения теории информационной сложности стохастические методы оптимальны и дают больший порядок сходимости, чем оптимальные детерминированные [22].

В нашем случае в задаче распределения динамических информационных блоков использовалась трехмерная битовая матрица для хранения состояния моделируемой системы, а также трехмерная матрица модельных потенциалов. Значения в матрицах периодически изменялись ввиду нестационарности решаемой задачи, т.е. к старым значениям матриц добавлялись новые. Для списков, очередей и стеков использовался быстрый менеджер памяти. Моделирование блуждающих частиц (дырок, фтора) проводилось как посредством списков, так и с помощью битовой трехмерной матрицы.

Как следует из всего сказанного выше, алгоритм случайных блужданий является достаточно универсальным, имеющим базовое значение для широкого спектра физических и математических проблем. Кластеры, в основе формирования которых лежат стохастические алгоритмы случайных блужданий, имеют, как правило, достаточно ветвящийся вид. В качестве иллюстрации этого утверждения приведем изображение геологического, окаменелого отложения, который с очевидностью, свидетельствует о наличии явлений формирования стохастических кластеров в геологических процессах образования кристаллизованных пород (рис. 3).

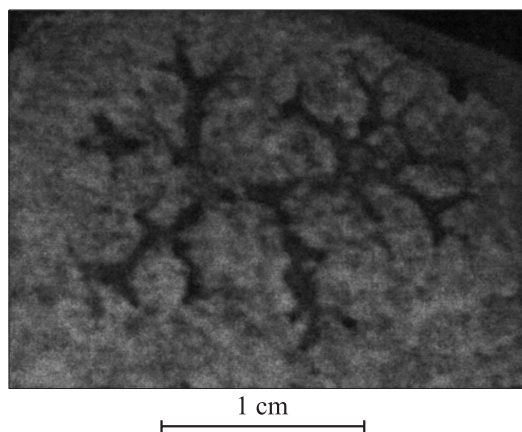


Рис. 3. Двумерная кластерная структура, сформированная в геологическом отложении в процессе кристаллизации породы.

В заключение отметим, что в настоящей работе разработана динамическая дискретная компьютерная модель многостадийных процессов формирования трехмерного пористого пространства в полупроводниковых кристаллах при анодировании в химически активных средах. Создан пакет программ, осуществляющих компьютерное трехмерное моделирование процессов образования кластеров в глубине полупроводниковых кристаллов с учетом процессов, происходящих на поверхности, а также химических реакций, сопровождающих явление порообразования. В основе разработанного подхода лежат достаточно универсальные алгоритмы случайного блуждания, которые являются основой целого ряда процессов в различных областях физики и математики. Максимальный фрактальный размер пористых структур, сформированных на основании разработанного алгоритма в рамках предложенной модели, составлял 2.39. Полученные данные могут быть распространены на ряд других процессов, в основе которых лежат аналогичные закономерности.

Результаты работы могут быть использованы при анализе эффектов анизотропного травления, приводящего к формированию кластеров различного размера [23], в том числе и нанометровых масштабов. В сочетании с различными технологиями электроосаждения результаты могут найти применение также при создании перспективных наноматериалов.

Список литературы

- [1] Nallet P., Chassaing E., Walls M.G., Hytch M.J. // J. Appl. Phys. 1996. Vol. 79. N 9. P. 6884–6889.
- [2] Aravamudhan S., Luongo K., Poddar P., Srikanth H., Bhatsali S. // Appl. Phys. A. 2007. Vol. 83. P. 773–780.
- [3] Каплий С.А., Проказников А.В., Рудь Н.А. // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 5. С. 6–11.
- [4] Каплий С.А., Проказников А.В., Рудь Н.А. // Изв. вузов. Физика. 2004. № 6. С. 31–38.
- [5] Кляцкин В.И., Гуарий Д. // УФН. 1999. Т. 169. Вып. 2. С. 171–207.
- [6] Квасников И.А. Термодинамика и статистическая физика. Теория неравновесных систем. М.: Изд-во МГУ, 1987. 559 с.
- [7] Исихара А. Статистическая физика. М.: Мир, 1973. 471 с.
- [8] Федер Е. Фракталы. М.: Мир, 1991. 254 с.
- [9] Каплий С.А., Проказников А.В., Рудь Н.А. // Письма в ЖТФ. 2004. Т. 30. Вып. 14. С. 46–52.
- [10] Каплий С., Проказников А.В., Рудь Н.А. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 12. С. 1–9.
- [11] Ванаг В.К. // УФН. 1999. Т. 169. Вып. 5. С. 481–505.
- [12] Пьетронеро Л., Тозатти Э. Фракталы в физике. М.: Мир, 1988. 672 с.
- [13] Prokashnikov A.V., Svetovoy V.B. // Phys. Low-Dim. Structures. 2002. Vol. 9/10. P. 65–69.
- [14] Lehmann V. // J. Electrochem. Soc. 1993. Vol. 140. N 10. P. 2836–2843.
- [15] Бучин Э.Ю., Постников А.В., Проказников А.В., Световой В.Б., Чурилов А.Б. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 1. С. 60–65.

- [16] *Buchin E.Yu., Churilov A.B., Postnikov A.V., Prokaznikov A.V., Svetovoy V.B.* // Phys. Low-Dim. Structures. 1995. Vol. 2/3. P. 97–104.
- [17] *Бучин Э.Ю., Проказников А.В.* // МЭ. 1998. Т. 27. Вып. 2. С. 107–113.
- [18] *Winters H., Graves D.B., Humbird D., Tougaard S.* // J. Vac. Sci. Technol. 2007. Vol. A25. N 1. P. 96–103.
- [19] *Никитчук С.А., Лоханин М.В., Проказников А.В., Рудь Н.А., Световой В.Б.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 12. С. 48–55.
- [20] *Можяев А.В., Бучин Э.Ю., Проказников А.В.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. Вып. 10. С. 53–60.
- [21] *Соколов А.В.* Математические модели и алгоритмы оптимального управления динамическими структурами данных. Автореф. докт. физ.-мат. наук. СПб, 2006.
- [22] *Шкарупа Е.В.* // Сибирский математический журнал. 2003. Т. 44. № 5. С. 1163–1182.
- [23] *Bisi Q., Osicini S., Pavesi L.* // Surf. Sci. Reports. 2000. Vol. 38. P. 1–126.