01;04;10

Условия финитности плоских аксиально-симметричных самосогласованных движений электронов заряженной плазмы в магнитном поле

© В.А. Федоров

Радиотехнический институт им. акад. А.Л. Минца,
125083 Москва, Россия
e-mail: f_v99@mail.ru

(Поступило в Редакцию 5 августа 2008 г.)

Исследована динамика плоских аксиально-симметричных самосогласованных движений электронов пучка, имеющего форму цилиндра, происходящих под действием электрической силы нескомпенсированного собственного объемного заряда на фоне ионов плазмы при наличии магнитного поля. Найдены условия финитности движения электронов для данной конфигурации пучка электронов.

PACS: 52.30.Cv, 52.72.+v

Изучение динамики электронных потоков представляет большой интерес для различных задач, возникающих при построении теории радофизических устройств, при формировании и транспортировке пучков электронов в плазме и вакууме, инжекции пучков электронов в плазму в лабораторных условиях и в космосе (активные эксперименты) и т.д. [1,2]. Причем в данных приложениях электронные потоки обычно бывают нескомпенсированными по объемному заряду. Благодаря этому плазма становится заряженной [3], а появляющиеся силы начинают зависеть от геометрии потока. Эти обстоятельства приводят к тому, что возникающее электрическое поле становится самосогласованным. В дальнейшем будем исследовать динамику плоских аксиально-симметричных самосогласованных движений электронов цилиндрического пучка под действием электрической силы не скомпенсированного собственного объемного заряда на фоне ионов плазмы при наличии однородного магнитного поля.

Задачу о динамике электронов пучка, используя цилиндрическую систему координат, сформулируем следующим образом. Пусть при $t \le 0$ пучок электронов представляет собой бесконечный цилиндрический объем V_0, имеющий радиус R_0 и находящийся в неограниченной плазме с однородным магнитным полем $\mathbf{H} = H_0\mathbf{e}_z$, $H_0 = \mathrm{const}$. Расположим ось объема V_0 вдоль вектора $\mathbf{H}$ и будем считать, что электроны плазмы „выметены“ из V_0 и его окрестности, так как для $t \le 0$ положим $n_e/n_i > 1$, где $n_{e,i}$ — концентрация электронов пучка (далее — электроны) и ионов плазмы соответственно, а ионы плазмы неподвижны, т.е. бесконечно тяжелые. Примем, что объем V_0 ограничен непроницаемым барьером для электронов, например, в виде поля (электрического, электромагнитного и т.д.).

В момент времени $t = 0$ поле, удерживающее электроны в объеме V_0, мгновенно убирается, и они начинают движение, которое будем исследовать в плоскости $z = 0$, учитывая, что $\partial/\partial\varphi \equiv 0$, так как система аксиально-симметрична. Для этого используем систему уравнений одножидкостного гидродинамического приближения холодной бесстолкновительной плазмы [4]

$$\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{v}_e + \mathbf{v}_e(\nabla\mathbf{v}_e) = \frac{e}{m_e}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_e \times \mathbf{H}]\right), \tag{1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi e(n_e - n_i), \tag{2}$$

$$\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = -4\pi e n_e \mathbf{v}_e. \tag{3}$$

Здесь $\mathbf{E}(\mathbf{R}, t)$ — вектор напряженности электрического поля, $\mathbf{v}_e(\mathbf{R}, t)$ — концентрация электронов, $\mathbf{R}$ — радиус-вектор точки пространства, e, m_e — заряд и масса электрона.

В качестве начальных условий системы уравнений (1)–(3) для $t = 0$ зададим [5]

$$v_{eR}(R_*, 0) = 0, \quad v_{e\varphi}(R_*, 0) = 0,$$

$$n_e(R_*, 0) = n_e^0 f_e(R_*, 0), \quad n_i(R_*, 0) = n_i^0 f_i(R_*, 0). \tag{4}$$

Здесь $0 \le R_* \le R_0$, R_0 — длина отрезка $[0, R_0]$, на котором задано начальное распределение функций или начальная координата фронта электронов, v_{eR} и $v_{e\varphi}$ — составляющие вектора скорости частицы, $n_e^0 = n_i^0 = \mathrm{const}$, $f_e(R_*, 0)/f_i(R_*, 0) > 1$ — функции, задающие распределения $n_{e,i}(R_*, 0)$. Отметим, что зависимость $E_R(R_*, 0)$ в (4) не приведена, так как может быть найдена из решения задачи. Граничные условия на неподвижной границе (ось симметрии) имеют вид

$$E_R(0, t) = 0, \ E_\varphi(0, t) = 0, \ v_{eR}(0, t) = 0, \ v_{e\varphi}(0, t) = 0,$$

$$n_e(0, t) = n_e^0 f_e(0, t), \quad n_i(0, t) = n_i^0 f_i(0, t), \tag{5}$$

а на подвижной границе и ее положение в пространстве определяется при решении задачи [5].

Пусть для электронов выполнены условия

$$l \gg R_c \ge L \gg R_0. \tag{6}$$

Здесь l — длина свободного пробега электронов, $R_c = |v_{e\perp}/\Omega|$ — циклотронный радиус, $v_{e\perp}$ — скорость электронов в плоскости $z = 0$, $\Omega = eH_0/m_e c$, c — скорость света, L — характерный размер системы. Первое неравенство в (6) позволяет считать плазму бесстолкновительной и при исследовании движения заряженных частиц рассматривать их как независимые [6], а второе неравенство в (6) показывает, что R_c возмущен L. Следовательно, электроны в данных условиях не замагничены [6]. Рассмотрение динамики электронов проведем на интервале $0 \le t \le t_r$, где t_r — момент времени, когда $v_{eR} = 0$, чтобы не возникали обратные токи и не было пересечения траекторий частиц. В противном случае применение гидродинамики будет неоправданным.

Так как вектор — потенциал магнитного поля равен $A_R = A_z = 0$, $A_\varphi = (H_0/2)R$, а вектор напряженности и скалярный потенциал электрического поля можно представить в виде $\mathbf{E}(R) = E(R)\mathbf{e}_R$ и $U = -e\int E(R)dR$, то функция Лагранжа электрона запишется следующим образом

$$L = \frac{m_e}{2}\,(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2) + \frac{eH_0}{2c}\,R^2\dot{\varphi} - e\int E(R)dR. \qquad (7)$$

Данная функция явным образом не зависит от φ, z, t, что приводит к трем первым интегралам

$$p_\varphi = m_e R^2\dot{\varphi} + \frac{eH_0}{2c}\,R^2 = 0, \qquad (8)$$

$$p_z = 0, \qquad (9)$$

$$E_0 = \frac{m_e}{2}\,(\dot{R}^2 + R^2\dot{\varphi}^2) - e\int E(R)dR = \mathrm{const}. \qquad (10)$$

Здесь p_φ — обобщенный импульс, p_z — импульс по оси z, E_0 — сумма кинетической и потенциальной энергий. Заметим, что в выражениях (8)–(10) учтены начальные условия (4).

Используя (8)–(10) найдем

$$\dot{R} = \frac{dR}{dt} = v_{eR}(R_*, R) = \sqrt{\frac{2}{m_e}\,(E_0 - U_{\mathrm{eff}})}, \qquad (11)$$

$$U_{\mathrm{eff}} = -e\int E(R)dR + \frac{M_z^2(R)}{2m_e R^2}, \qquad (12)$$

где U_{eff} — эффективный потенциал, $M_z(R) = -(eH_0/2c)R^2$. Из (11) имеем второй интеграл

$$t(R_*, R) = \pm\int \frac{dR}{\sqrt{\frac{2}{m_e}\,(E_0 - U_{\mathrm{eff}})}}, \qquad (13)$$

а, учитывая закон сохранения p_φ, найдем

$$\dot{\varphi} = \frac{d\varphi}{dt} = \omega = -\frac{\Omega}{2}. \qquad (14)$$

Исключив dt из выражения (13), с помощью (11) получим еще один второй интеграл

$$\varphi(R_*, R) = \pm\frac{\Omega}{2}\int \frac{dR}{\sqrt{\frac{2}{m_e}\,(E_0 - U_{\mathrm{eff}})}}. \qquad (15)$$

Используя выражение (12), найдем условия финитности движения электронов [7]. Положим $E_R(R) = \gamma R^\alpha$, где $\gamma = \mathrm{const} < 0$, так как $v_{eR}(R_*, t \approx 0) > 0$, $\alpha = \mathrm{const}$ и представим U_{eff} в виде

$$U_{\mathrm{eff}} = -e\,\frac{\gamma}{\alpha + 1}\,R^{\alpha+1} + \frac{m_e}{8}\,\Omega^2 R^2. \qquad (16)$$

Примем, что в (16) $e\gamma > 0$. Если $\alpha < 1$, то, устремляя в (16) $R \to \infty$, найдем $\lim\limits_{R\to\infty} U_{\mathrm{eff}} \to \infty$. Следовательно, в данном случае движение электронов финитно. Если $\alpha = 1$, то из (16) имеем

$$\lim_{R\to\infty} U_{\mathrm{eff}} \to \begin{cases} +\infty, & -\frac{e\gamma}{2} + \frac{m_e}{8}\,\Omega^2 > 0, \\ -\infty, & 0 - \frac{e\gamma}{2} + \frac{m_e}{8}\,\Omega^2 \le 0. \end{cases} \qquad (17)$$

При $\alpha = 1$ и выполнении верхнего неравенства в (17) движение электронов финитно, а нижнего — инфинитно. Пусть $\alpha > 1$, тогда из (16) получим, что $\lim\limits_{R\to\infty} U_{\mathrm{eff}} \to -\infty$, т. е. движение электронов инфинитно.

Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М.: Атомиздат, 1980. 167 с.

[2] *Искусственные* пучки частиц в космической плазме / Под ред. Б. Гранналя. М.: Мир, 1985. 456 с.

[3] *Девидсон Р.* Теория заряженной плазмы. М.: Мир, 1978. 215 с.

[4] *Гинзбург В.Л., Рухадзе А.А.* Волны в магнитоактивной плазме. М.: Наука, 1970. 208 с.

[5] *Седов Л.И.* Механика сплошной среды. Т. 1. М.: Наука, 1983. 528 с.

[6] *Франк-Каменецкий Д.А.* Лекции по физике плазмы. М.: Атомиздат, 1964. 284 с.

[7] *Ольховский И.И.* Курс теоретической механики для физиков. М.: Наука, 1970. 448 с.