01;03

Электростатическая неустойчивость сильно заряженной струи электропроводной жидкости

© А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 9 апреля 2008 г.)

Проанализировано влияние электрического заряда на поверхности струи на закономерности реализации ее капиллярной неустойчивости и распада на капли. Дано теоретическое истолкование качественно отличному от традиционно рассматриваемого капиллярного механизма реализации неустойчивости и распада на капли заряженной струи электропроводной жидкости — электростатическому механизму, аналогичному механизмам реализации неустойчивости сильно заряженной капли (неустойчивости Рэлея) и плоской однородно заряженной поверхности жидкости (неустойчивости Тонкса–Френкеля).

PACS: 47.15.Uv, 47.15.Rq, 47.20.Dr

Введение

Феномен электростатического полидиспергирования жидкости привлекает внимание исследователей в связи с весьма многочисленными академическими, техническими и технологическими приложениями (см., например, обзоры [1–7] и приведенную там литературу). Закономерности реализации неустойчивости и распада на капли заряженных струй жидкости детально исследованы как экспериментально, так и теоретически, и в линейном [4,7–11], и в нелинейном подходах [4,7,11]. Тем не менее многие вопросы, связанные с обсуждаемым феноменом, остались за рамками проведенных исследований. В частности, сказанное относится к особенностям распада на отдельные капли весьма сильно заряженных струй, которые обошли вниманием теоретики, а экспериментаторы [12,13] лишь отметили факт необычной феноменологии распада струи при больших значениях плотности поверхностного заряда, не предложив никакой физической трактовки наблюдаемому феномену.

Согласно данным экспериментов [12,13], сильно заряженные струи, выбрасываемые с вершины мениска жидкости на вершине капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему, распадаются на капли, предварительно разветвляясь (рис. 1). Ветвление струи происходит путем выбрасывания хаотическим образом с поверхности основной струи под углом к ее оси нескольких существенно более тонких струек, которые и распадаются на мелкие капельки. Физическому истолкованию такой картины распада сильно заряженных струй и посвящена настоящая набота. Но вначале остановимся на общих закономерностях распада струй на капли.

Из общефизических соображений очевидно [14,15], что фиксированный объем жидкости, ограниченный свободной поверхностью с формой, отличной от сферической, подверженной действию сил поверхностного натяжения, в отсутствие внешних силовых полей будет стремиться принять сферическую форму, т.е. форму с минимальной площадью свободной поверхности, обеспечивающую минимальность потенциальной энергии, связанной с капиллярными силами. Сказанное относится и к цилиндрической струе жидкости, которая будет неустойчивой по отношению к разбиению на капли, в чем несложно убедиться из простых рассуждений.

Возьмем участок жидкой бесконечной струи радиуса R, длиной L с коэффициентом проверхностного натяжения σ и посмотрим для какого соотношения между R и L переход под действием сил поверхностного натяжения от цилиндрической струи к совокупности сферических капель будет энергетически выгоден. Для этого сравним потенциальную энергию сил поверхностного натяжения боковой поверхности цилиндра длиной L с потенциальной энергией сил поверхностного натяжения поверхности поверхности N с потенциальной энергией сил поверхностного натяжения поверхности N одинаковых сферических капель, на которые предположительно может распасться рассматриваемый участок струи. Приравняв объем цилиндра объему N сферических капель,

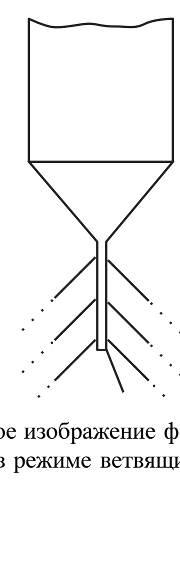

Рис. 1. Схематическое изображение феномена электродиспергирования жидкости в режиме ветвящихся струй.

найдем радиус одной капли

$$r = \sqrt[3]{3R^2L/4N}.$$

Найдем теперь отношение потенциальной энергии сил поверхностного натяжения поверхности N сферических капель к потенциальной энергии сил поверхностного натяжения боковой поверхности участка струи длиной L

$$\frac{N4\pi\sigma(9R^4L^2/16N^2)^{1/3}}{2\pi\sigma RL} \equiv \sqrt[3]{\frac{9RN}{2L}}.$$

Потребуем теперь, чтобы это отношение было меньше единицы, и получим условие самопроизвольного разбиения участка струи на N отдельных капель в виде

$$9RN/2L < 1.$$

Полагая $N = 1$, найдем, что при $L \geq 4.5R$ цилиндрической струе энергетически выгодно разбиваться на отдельные капли с радиусом $r \geq 3R/\sqrt[3]{8}$. Сказанное означает, что цилиндрическая струя неустойчива по отношению к волнам с длиной $\lambda \geq 4.5R$. По отношению к синусоидальным возмущениям поверхности с длиной волн λ, меньшей чем $4.5R$, струя оказывается устойчивой. Следует отметить, что спектр волн с длиной, удовлетворяющей условию $\lambda \geq 4.5R$, бесконечен, но инкременты нарастания неустойчивости волн с различными значениями длины будут различными, и реальный распад струи на капли определится волной с максимальной величиной инкремента неустойчивости. В частности, строгий анализ [8–11] показывает, что незаряженная струя дробится на капли с несколько большими радиусами, чем было получено выше в качественных рассуждениях, а именно: $r \approx 3R/\sqrt[3]{4}$.

Именно указанный механизм разбиения струи на капли лежит в основе традиционно рассматриваемого толкования обсуждаемого феномена [4,7–11,14,15]. Если на струю поместить электрический заряд, то в общую потенциальную энергию системы энергия электрического поля войдет со знаком, зависящим от длины волны. В частности, для длинных осесимметричных волн знак потенциальной энергии электрического поля противоположен знаку потенциальной энергии сил поверхностного натяжения, тогда как для коротких осесимметричных волн и для неосесимметричных волн любой длины знак потенциальной энергии электрического поля совпадает со знаком потенциальной энергии сил поверхностного натяжения [4,8–11]. Для длинных волн полная потенциальная энергия системы уменьшается по абсолютной величине, что означает увеличение устойчивости заряженной струи по сравнению с незаряженной, о чем и сообщалось в первых исследованиях этой проблемы [9,10,16]. Для коротких волн, наоборот, полная потенциальная энергия системы увеличивается, т. е. заряд дестабилизирует струю.

Но возникают вопросы: что произойдет со струей при дальнейшем увеличении ее заряда, приходящегося на единицу длины струи? Будет ли давление электрического поля подавлять реализацию капиллярной неустойчивость струи до полного ее исчезновения или, начиная с некоторого значения заряда на единице длины струи, электрическое поле станет усиливать капиллярную неустойчивость и способствовать разбиению струи на капли? Будет ли заряженная струя устойчивой по отношению к коротковолновым синусоидальным возмущениям поверхности? Будет ли она вести себя как заряженная капля [6,8] или заряженная плоская поверхность жидкости [17], устойчивые по отношению к виртуальным возбуждениям волн малой амплитуды при малых напряженностях поля, но претерпевающие электростатическую неустойчивость при больших напряженностях поля? Хорошо известно [8,17–19], что при достаточно больших напряженностях электрического поля поверхность сферической капли, равно как и плоская поверхность жидкости, претерпевают неустойчивость по отношению к отрицательному давлению электрического поля; на них образуются эмитирующие выступы, называемые „конусами Тейлора“. С вершин конусов Тейлора выбрасываются тонкие сильно заряженные струйки жидкости, распадающиеся на отдельные капельки, уносящие избыточный заряд с поверхности жидкости. Возникает естественный вопрос: будет ли такой же механизм избавления от избыточного заряда характерен и для струи при достаточно больших напряженностях электрического поля у ее поверхности?

1. Постановка задачи

Пусть имеется бесконечная, движущаяся вдоль оси симметрии с постоянной скоростью $\mathbf{U}_0$ цилиндрическая струя радиуса R вязкой несжимаемой жидкости массовой плотностью ρ, кинематической вязкостью ν и коэффициентом поверхностного натяжения σ, поддерживаемая при постоянном электрическом потенциале Φ_*. Будем считать, что жидкость является идеально проводящей, и электрический заряд распределен по цилиндрической, в отсутствие возмущений, поверхности струи с постоянной поверхностной плотностью заряда χ. Поскольку рассматривается бесконечная струя, то для упрощения задачи целесообразно перейти в инерциальную систему координат, движущуюся вдоль оси симметрии вместе со струей со скоростью $\mathbf{U}_0$. Очевидно, что в такой системе отсчета поле скоростей течения жидкости в струе $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ полностью определяется возможным (имеющим, например, тепловую природу) капиллярным волновым движением на ее поверхности, которое в безразмерных переменных является величиной такого же порядка малости, что и амплитуда волн. Зададимся целью исследовать условия реализации неустойчивости капиллярных волн на поверхности струи.

Расчеты проведет в цилиндрической системе координат r, φ, z, орт $\mathbf{n}_z$ которой ориентирован вдоль оси симметрии невозмущенной струи. Уравнение поверхности струи, возмущенной капиллярным, общем случае неосесимметричным, волновым движением бесконечно малой амплитуды (например, генерируемым тепловым движением молекул жидкости и имеющим амплитуду $\sim\sqrt{\kappa T/\sigma}$, где κ — постоянная Больцмана, T — абсолютная температура), запишем в виде

$$r(\varphi, z, t) = R + \xi(\varphi, z, t), \qquad |\xi| \ll R.$$

Математическая формулировка задачи о расчете параметров капиллярных полн на поверхности струи состоит из уравнений гидродинамики и электростатики (в предположении, что скорость движения жидкости много меньше релятивистской)

$$\frac{d\mathbf{U}}{dt} = -\frac{21}{\rho}\boldsymbol{\nabla}P + \nu\Delta\mathbf{U}, \quad \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{U} = 0, \quad \Delta\Phi = 0;$$

условий ограниченности

$$r \to 0: \qquad |\mathbf{U}| < \infty,$$

$$r \to \infty: \qquad |\boldsymbol{\nabla}\Phi| \to 0;$$

гидродинамических граничных условий на свободной поверхности струи $r = R + \xi$:
кинематического

$$-\frac{\partial\xi}{\partial t} + \mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nabla}\big[r - \big(R + \xi(\varphi, z, t)\big)\big] = 0$$

и динамического для касательных

$$\boldsymbol{\tau}\cdot(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} + \mathbf{n}\cdot(\boldsymbol{\tau}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} = 0$$

и нормальной

$$-P(\mathbf{r}, t) + 2\nu\mathbf{n}\cdot(\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} - P_\chi + P_\sigma = 0$$

компонент тензора напряжений, а также условия эквипотенциальности поверхности струи

$$\Phi = \Phi_*.$$

$P(\mathbf{r}, t)$ — гидродинамическое давление,

$$P_\chi = (-\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2/8\pi$$

— давление электрического поля,

$$P_\sigma = \sigma\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n}$$

— давление сил поверхностного натяжения, $\mathbf{n}$ и $\boldsymbol{\nabla}$ — орты нормали и касательной к возмущенной капиллярным волновым движением свободной поверхности струи; $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — электростатический потенциал в окрестности струи; $\Phi_*(t)$ — электростатический потенциал поверхности струи.

2. Анализ дисперсионного уравнения

Решение сформулированной задачи вплоть до вывода и анализа дисперсионного уравнения подробно описано в [20]. Само дисперсионное уравнение имеет громоздкий вид, и приводить его полностью в данном рассмотрении нецелесообразно, поскольку для нижеследующего анализа достаточно знать его асимптотическое представление в пределе малой вязкости, имеющее в разразмерных переменных, в которых $R = \sigma = \rho = 1$, вид

$$S^2 + 2S\nu F(k, m) = f(m, w, k)D(k, m) + \mathrm{O}(\nu^2); \qquad (1)$$

$$F(k, m) \equiv \big(k^2 + m^2 - D(k, m)\big);$$

$$D(k, m) \equiv m + kI_{m+1}(k)/I_m(k);$$

$$f(m, w, k) \equiv 1 - m^2 - k^2 - wH(k, m);$$

$$H(k, m) \equiv 1 + m - kK_{m+1}(k)/K_m(k);$$

$$w \equiv 4\pi\chi^2 \equiv \mu^2/\pi; \quad \mu \equiv 2\pi\chi;$$

S, k, m — комплексная частота, волновое число и азимутальное число волны; w — безразмерный параметр, характеризующий устойчивость поверхности струи по отношению к отрицательному давлению электрического поля; μ — электрический заряд, приходящейся на единицу длины струи; $I_m(k)$ и $K_m(k)$ — модифицированные функции Бесселя первого и второго рода порядка m. Решения дисперсионного уравнения (1) легко выписываются

$$S_{1,2} = -\nu F(k, m) \pm \sqrt{\nu^2F^2(k, m) + f(m, w, k)D(k, m)}. \qquad (2)$$

В пределе малой вязкости ($\nu \ll 1$), когда собственно и справедливо уравнение (1), решения (2), согласно формальным требованиям теории возмущений, следует переписать в виде

$$S_{1,2} = -\nu F(k, m) \pm \sqrt{f(m, w, k)D(k, m)} + \mathrm{O}(\nu^2); \quad (2a)$$

однако решения записанные в виде (2a), не вполне корректны, когда слагаемые в подкоренном выражении в (2) имеют один порядок малости:

$$|f(m, w, k)| \sim \nu^2F^2(k, m)/D(k, m).$$

Это обстоятельство актуально в настоящем рассмотрении, поскольку критические условия реализации неустойчивости волны m по отношению к суперпозиции давлений капиллярных сил и электрического поля независимо от вязкости жидкости определяются требованием обращения в нуль функции $f(m, w, k)$, так как $D(k, m)$ для любых m и k положительно. Иными словами, в проводимом анализе важны именно малые значения функции $f(m, w, k)$, а потому ниже для характеристики инкрементов неустойчивости будем использовать соотношение (2).

При $f(m, w, k) < 0$ и

$$|f(m, w, k)| > \nu^2 F^2(k, m)/D(k, m) \tag{3}$$

решения (2) представляют собой пару комплексно сопряженных решений, мнимая часть которых определяет частоты цилиндрических волн на поверхности струи, бегущих в противоположных направлениях, а вещественная $-\nu F(k, m)$ — декременты затухания этих волн. Численный анализ функции $F(k, m)$ показывает, что она положительна при любых значениях аргументов и что величины декрементов затухания $\sim F(k, m)$ быстро растут с увеличением волнового числа k и степени асимметричности волны (с ростом азимутального числа m).

При $f(m, w, k) < 0$ и выполнении условия противоположного (3) оба решения (2) вещественные отрицательные имеют различные величины и соответствуют апериодическому затуханию виртуальной деформации поверхности струи с различными скоростями. При $f(m, w, k) > 0$ решения (2) также вещественные, причем одно положительно, а другое отрицательно. Вещественное отрицательное решение дисперсионного уравнения дает декремент апериодического затухания виртуальной деформации, а вещественное положительное решение определяет инкремент неустойчивости цилиндрической волны, имеющий вид

$$\gamma(k, m) = -\nu F(k, m) + \sqrt{\nu^2 F^2(k, m) + f(m, w, k) D(k, m)}. \tag{4}$$

Знак множителя $f(m, w, k)$ в существенной степени определяется функцией $H(k, m)$, график которой для пяти первых значений параметра m приведен на рис. 2. Принимая во внимание то обстоятельство, что произведение $wH(k, m)$ определяет вклад электрического поля в величину множителя $f(m, w, k)$, несложно видеть, что стабилизирующую роль $(H(k, m) > 0)$ заряд на струе играет только для осесимметричной волны $(m = 0)$ при $k \leq 0.595$. Для значений $k > 0.595$ и $m = 0$, а также при любых k и $m > 0$ заряд на струе играет дестабилизирующую роль, так как $H(k, m) < 0$.

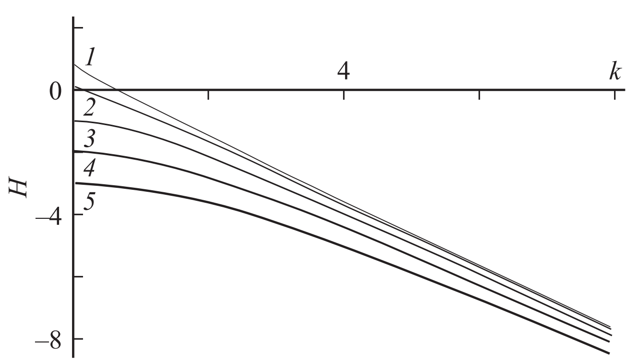

Рис. 2. Зависимость $H = H(k, m)$ для первых пяти мод, расположившихся в порядке возрастания номеров: *1* — $m = 0$; *2* — 1; *3* — 2; *4* — 3; *5* — 4.

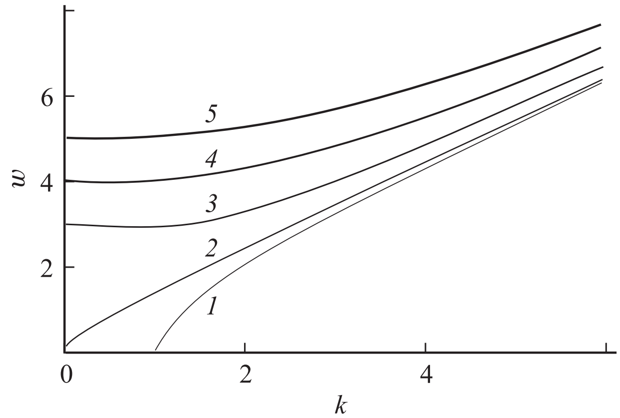

Рис. 3. Зависимости $w = w(k)$, определяющие правые и нижние границы области неустойчивости первых пяти азимутальных мод, полученные по (5) для пяти значений азимутального параметра: *1* — $m = 0$; *2* — 1; *3* — 2; *4* — 3; *5* — 4.

Условие $f(m, w, k) \geq 0$ позволяет определить диапазоны значений волновых чисел, в которых волны с заданными значениями m и w на цилиндрической поверхности струи неустойчивы. Так, из этого условия видно, что для незаряженной струи $(w = 0)$ осесимметричные волны $(m = 0)$ неустойчивы в диапазоне $k \leq 1$. С появлением на струе электрического заряда правая граница диапазона неустойчивости осесимметричных волн смещается в область больших значений волновых чисел (в область более коротких волн). Это обстоятельство проиллюстрировано рис. 3, на котором приведены зависимости $w = w(k)$, определяющие положения правых границ диапазонов неустойчивости волн для первых пяти значений азимутального параметра m: от нуля до четырех, рассчитанные по соотношению

$$f(m, w, k) = 1 - m^2 - k^2 - wH(k, m) = 0. \tag{5}$$

Неустойчивым состояниям волн с заданным значением азимутального числа m соответствуют множества точек $\{k, w\}$, расположенных выше (и левее для $m = 0$) соответствующей кривой. Внутри диапазонов неустойчивости физическая картина реализации самой неустойчивости определяется волнами с максимальными значениями инкремента.

Волновое число волны с максимальным значением инкремента $k = k_{\max}$ можно найти из условия [8]

$$\left(d\gamma(k, m)/dk\right) = 0. \tag{6}$$

Отыскав из (6) $k_{\max}$ и подставив его в (5), можно найти значение параметра $w = w_{max}$, т.е. то значение поверхностной плотности электрического заряда, при котором инкремент неустойчивости волны с $k = k_{\max}$ максимален.

На рис. 4, *a* приведены найденные подобным образом зависимости $w_{\max} = w_{\max}(k_{\max})$. Для всех мод, кроме

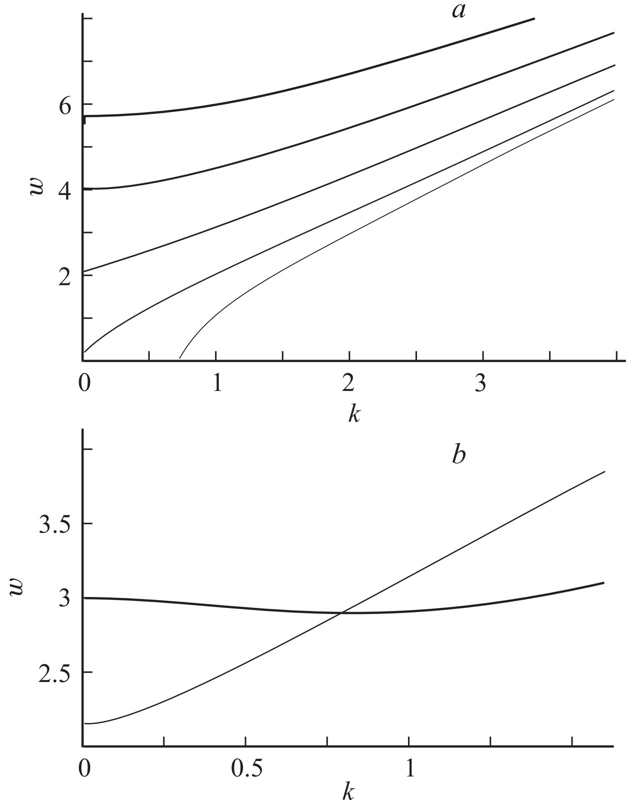

Рис. 4. a — зависимости $w_{\max} = w_{\max}(k_{\max})$, построенные по (5), (6) для первых пяти азимутальных мод: самая тонкая кривая соответствует $m = 0$, самая жирная — $m = 4$. b — зависимость $w = w(k)$ для $m = 2$, полученная по (5), определяющая правую и нижнюю границы области неустойчивости (жирная кривая), и зависимость $w_{\max} = w_{\max}(k_{\max})$ для $m = 2$, построенная по (5), (6) (тонкая кривая).

моды с $m = 2$, кривые зависимости $w_{\max} = w_{\max}(k_{\max})$ на плоскости $\{k, w\}$ лежат выше зависимостей $w = w(k)$, рассчитанных по (5) и приведенных на рис. 3. Для моды с $m = 2$ кривые $w_{\max} = w_{\max}(k_{\max})$ и $w = w(k)$, приведенные на рис. 4, b, пересекаются в точке, являющейся решением системы уравнений (5), (6). Неустойчивым состоянием заряженной поверхности жидкости соответствуют точки кривой $w_{\max} = w_{\max}(k_{\max})$, лежащие выше точки пересечения с кривой $w = w(k)$, определенной соотношением (5).

Подставив $k_{\max}$ и $w_{\max}$ в (4), можно найти величину самого инкремента, соответствующего волне, наиболее быстро растущей со временем. Описанная процедура отыскания экстремальных значений $k_{\max}$ и $w_{\max}$ подобно процедуре поиска критических условий реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля — неустойчивости капиллярно-гравитационных волн на плоской заряженной свободной поверхности электропроводной жидкости [17]. Волновое число наиболее неустойчивой волны, а также величину инкремента ее неустойчивости можно найти и из графиков зависимости величин инкрементов от волнового числа. На рис. 5 приведены зависимости величин инкрементов неустойчивости $\gamma(k, m)$ первых трех мод $m = 0; 1; 2$ от волнового числа k при различных значениях параметра w, построенные по (4) при $w \geq 0$.

Анализ соотношений (5), (6) (рис. 4, a и 5) показывает, что осесимметричная мода ($m = 0$) для волн с волновыми числами $k < 1$ неустойчива и в отсутствие электрического заряда на струе, а максимальным инкрементом обладает волна с $k_{\max} \approx 0.7$ [8,14,15]. Моды

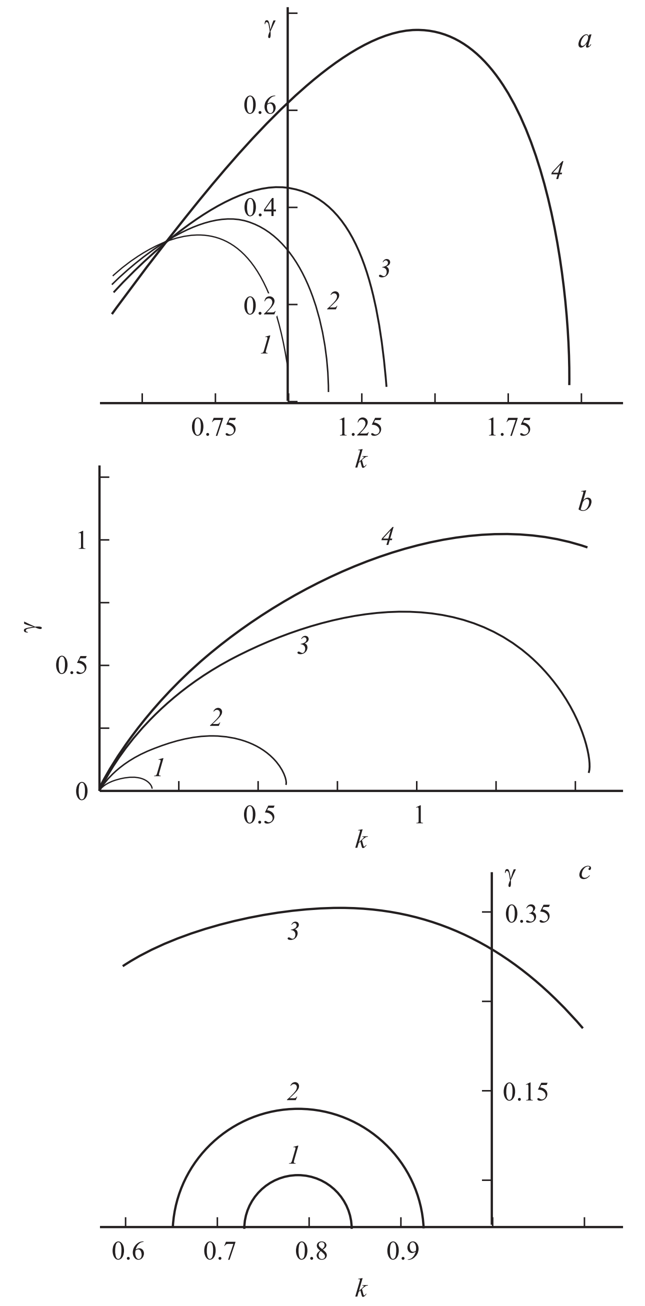

Рис. 5. Зависимости величины инкремента моды от волнового числа k, рассчитанные по (4) при $\nu = 0.002$ для различных значений параметра w. a: *1* — $w = 0$, *2* — 0.5, *3* — 1, *4* — 2 ($m = 0$); b: *1* — $w = 0.5$, *2* — 1, *3* — 2, *4* — 2.5 ($m = 1$); c: *1* — $w = 2.905$, *2* — 2.91, *3* — 2.95 ($m = 2$).

с $m \neq 0$ возбуждаются только при наличии на струе электрического заряда [11,21]. Изгибная мода ($m = 1$) возбуждается при сколь угодно малом, но отличном от нуля, заряде (при сколь угодно малом w). Волновое число моды, определяющей развитие изгибной неустойчивости, можно найти из (6) по заданному значению w (согласно рис. 3 и 4, *a*, малым w соответствуют малые k или большие длины волн). Для моды с $m = 2$ критические значения параметров имеют вид $k_{\max} \approx 0.789$, $w_{\max} \approx 2.904$, как это можно видеть из рис. 4, *b* и 5, *c*. Для мод $m = 3$ и 4 максимальными инкрементами при минимальных для реализации неустойчивости значениях параметра w обладают волны с $k = 0$.

2.1. Неустойчивость осесимметричной моды с $m = 0$

Из рис. 5, *a* видно, что инкременты неустойчивости γ длинных осесимметричных волн с волновыми числами из диапазона $k < 1$ отличны от нуля уже для незаряженной струи (при $w = 0$). Появление на струе электрического заряда приводит к расширению диапазона неустойчивых волн в область больших значений волновых чисел. Для значений волновых чисел $k > 0.595$ инкременты неустойчивости быстро растут с увеличением поверхностной плотности заряда на струе (с увеличением w), так же как и $k_{\max}$ — волновое число волны, обладающей максимальной величиной инкремента неустойчивости. Из рис. 5, *a* также видно, что при $k < 0.595$ (левее точки пересечения кривых), т. е. для длинных капиллярных волн, заряд на струе играет стабилизирующую роль: с ростом w величина инкремента снижается. Увеличение с ростом поверхностной плотности заряда χ (с ростом параметра w) величин инкрементов неустойчивых волн на поверхности струи в общем случае полностью согласуется с дестабилизующей ролью электрического заряда. Так, например, для заряженных капель увеличение собственного заряда приводит к увеличению их равновесных деформаций во внешних силовых полях: в поле аэродинамических [21,22], гравитационных [22,23] и инерционных [24–26] сил. Появление электрического заряда на поверхности претерпевающей капиллярную осесимметричную (варикозную) неустойчивость струи увеличит как величину текущих деформаций, так и значение сил, приводящих к разбиению струи на капли.

Приведенные рассуждения для струи маловязкой жидкости можно дополнить нагрядным энергетическим анализом для идеальной жидкости, позволяющим выделить детали, важные для понимания роли электрического заряда в реализации неустойчивости струи. Согласно сказанному во Введении, незаряженная цилиндрическая струя неустойчива по отношению к синусоидальным осесимметричным деформациям ее поверхности с длиной волн $\lambda \geq 4.5R$. Переход от цилиндрической струи невязкой жидкости к цепочке капель, на которые струя распадается под действием капиллярных сил, происходит с инкрементом $\gamma(R, k, m)$.

Для определения величины $\gamma(R, k, m)$ выпишем выражение для прироста потенциальной энергии капиллярных сил, вызванного появлением волновой деформации исходной цилиндрической поверхности струи

$$\Delta U_\sigma(R, k, m, a) \equiv U_\sigma(R, k, m, a) - U_\sigma(R),$$

равного разности между потенциальной энергией $U_\sigma(R, k, m, a)$ струи, деформированной волной с волновым числом k, азимутальным числом m, амплитудой a, и потенциальной энергией $U_\sigma(R)$ недеформированной цилиндрической струи [8–10,14,15]. Согласно [8–10,14,15], величина $\Delta U_\sigma(R, k, m, a)$ пропорциональна a^2, т. е. можно записать

$$\Delta U_\sigma(R, k, m, a) \equiv \beta(R, k, m)a^2,$$

инкремент определится выражением

$$\gamma(R, k, m) = \sqrt{\frac{1}{2a}\,\frac{\partial\left(\Delta U_\sigma(R, k, m, a)\right)}{\partial a}} \equiv \sqrt{\beta(R, k, m)}.$$

Реализующуюся неустойчивость естественно назвать *капиллярной*. Реальное разбиение струи на капли определиться осесимметричной ($m = 0$) волной волновым числом, для которого величина инкремента будет максимальной, т. е. $[\partial\gamma(R, k, 0)/\partial k] = 0$ (см. рис. 4, *a* и 5, *a*).

Если теперь на струю поместить электрический заряд с поверхностной плотностью χ на недеформированной волновым движением цилиндрической свободной поверхности, то у струи появится еще один вид потенциальной энергии — электростатическая $\Delta U_\chi(R, k, m, a) \equiv_\chi (R, k, m, a) - U_\chi(R)$. Знак $\Delta U_x(R, k, m, s)$ зависит от волнового числа, а величина пропорциональна квадрату амплитуды волны, т. е. $\Delta U_\chi(R, k, m, a) \equiv \delta(R, k, m)a^2$. При $m = 0$ и $k < 0.595$ знак $\Delta U_\chi(R, k, m, a)$ противоположен знаку потенциальной энергии капиллярных сил $U_\sigma(R, k, m, a)$, а величина инкремента неустойчивости заряженной струи

$$\gamma(k, 0) \sim \sqrt{\beta(R, k, 0) - \delta(R, k, 0)}$$

снижается, т. е. в области длинных волн электрический заряд играет стабилизирующую роль. Здесь следует напомнить, что распад струи обеспечивается волной, обладающей при заданных условиях максимальным инкрементом неустойчивости. Согласно рис. 5, *a*, при $m = 0$ область волновых чисел $k < 0.595$ расположена левее волнового числа $k_{\max} \approx 0.7$, соответствующего наиболее неустойчивой волне при $\chi = 0$ (при $w = 0$). С ростом χ величина $k_{\max}$ для волн с максимальной величиной инкремента смещается в область бо́льших значений. Сказанное означает, что наблюдать экспериментально стабилизирующее влияние электрического заряда на струю в области волновых чисел $k < 0.595$ весьма затруднительно, поскольку волны с данными значениями волновых чисел не определяют капиллярного распада струй.

При $m = 0$ и $k > 0.595$ знаки $\Delta U_\chi(R, k, m, a)$ и $\Delta U_\sigma(R, k, m, a)$ совпадают, а величина инкремента неустойчивости увеличивается с ростом поверхностной плотности электрического заряда χ. При больших значениях χ (при больших $w \equiv 4\pi\chi^2$), когда (см. (1), (5))

$$\chi > \sqrt{|(1 - k^2)/4\pi H(k, m0)|}, \qquad (7)$$

величина электростатической потенциальной энергии становится больше потенциальной энергии капиллярных сил (зависимость $H(k, m)$ от волнового числа k при различных m иллюстрирует рис. 2). В этой области реализующуюся для осесимметричной волны $(m = 0)$ неустойчивость следует именовать *электростатически-капиллярной.*

Если для осесимметричной волны $(m = 0)$ поверхностная плотность электрического заряда χ отлична от нуля, но удовлетворяет условию, противоположному (7), то реализующуюся неустойчивость струи уместно именовать *капиллярно-электростатической*, поскольку капиллярные силы преобладают над электрическими.

Роль капиллярных и электростатических сил, действующих на свободную поверхность струи в областях реализации капиллярной, капиллярно-электростатической и электростатически-капиллярной неустойчивостей при $m = 0$ качественно не изменяется при переходе от одного режима к другому. Эти силы всегда осесимметричны и приводят к росту амплитуды виртуальной волны с максимальной при заданных условиях величиной инкремента. В таких условиях струя дробится на капли размером, уменьшающимся с ростом поверхностной плотности заряда на струе χ (с ростом параметра w), поскольку, согласно рис. 5, *a*, с увеличением χ длина волны, обладающей максимальной величиной инкремента $\gamma = \gamma_{\max}$, уменьшается. Это согласуется с данными экспериментов [1,4,12,13].

2.2. Неустойчивости неосесимметричных мод

На рис. 5, *b* приведены зависимости величины γ — инкремента неустойчивости моды с $m = 1$ — от волнового числа k, построенные по (4) при различных $w \geq 0$. Несложно видеть, что величина инкремента неустойчивости γ и волнового числа k волны, соответствующей его максимальному значению, с ростом w возрастает относительно нулевых значений. Возбуждение моды с $m = 1$ приводит к изгибу и закручиванию оси струи, которая в линейном приближении по амплитуде волны ε описывается винтовой линией с шагом k^{-1} [11,20]:

$$r(z, \varphi, t) = \varepsilon \cos(kz + m\varphi - \omega t), \quad m = 1,$$

а также к появлению зависимости поля скоростей течения жидкости в струе от азимутального угла φ [27,28].

Неосесимметричные волны с $m = 2$ и произвольными волновыми числами на поверхности струи при $w < 2.904$ устойчивы. При $w = 2.904$ претерпевает неустойчивость волна с волновым числом $k = 0.789$. Зависимости величины γ с $m = 2$ от волнового числа k при различных значениях параметра w, построенные по (4) при $w > 2.9$, проиллюстрированы на рис. 5, *c*. Реализация неустойчивости моды с $m = 2$ приводят к эллиптической деформации поперечного сечения струи и ее скручиванию относительно оси z. Ориентация осей эллипса в поперечном сечении струи зависит от времени и продольной координаты [27,28]. Сама струя при этом имеет вид эллиптического цилиндра, скрученного вокруг оси.

Критические условия реализации электростатической неустойчивости мод с $m = 3$ и 4, согласно рис. 4, *a*, имеют вид: $w = 4$, $k = 0$ и $w \approx 5.7$, $k = 0$ соответственно. Анализ зависимости величин инкрементов неустойчивости мод с $m = 3$ и 4 от волнового числа k показывает, что волнам с $k = 0$ соответствуют отличные от нуля инкременты.

3. Общие закономерности реализации электростатической неустойчивости заряженной поверхности жидкости. Электростатическая неустойчивость боковой поверхности струи

Как отмечалось выше, при достаточно большой напряженности электростатического поля $\mathbf{E}_0$ у граничащей с вакуумом плоской свободной поверхности электропроводной жидкости при выполнении соотношения [17]

$$(E_0^2/8\pi\sqrt{\rho g \sigma}) = 1$$

претерпевает неустойчивость волна с волновым числом $k = \sqrt{\rho g/\sigma} \equiv 1/\alpha$, где $\alpha = \sqrt{\sigma/\rho g}$ — капиллярная постоянная жидкости, и амплитуда волны начинает расти со временем по экспоненциальному закону. Такая неустойчивость называется неустойчивостью Тонкса–Френкеля [17,19]. При ее реализации на поверхности жидкости возникают эмиссионные выступы — конусы Тейлора [30], с вершин которых выбрасываются заряженные струйки, распадающиеся на отдельные капли. Квадрат плотности электрического заряда χ на свободной поверхности на пороге реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля определяется соотношением

$$\chi^2 = \sigma/2\pi\alpha. \qquad (8)$$

Сферическая капля радиуса R несжимаемой электропроводной жидкости, несущая заряд Q, в вакууме претерпевает электростатическую неустойчивость при выполнении соотношения [8]

$$Q^2/16\pi R^3\sigma = 1.$$

При этом становится неустойчивой основная мода капиллярных осцилляций капли с $n = 2$, соответствующая деформации сферической капли к форме вытянутого сфероида. Возбуждение осцилляций с $n = 0$, соответствующих радиальным центрально симметричным осцилляциям сферической капли, несжимаемой жидкости невозможно. Также невозможно в системе координат, связанной с центром масс капли, возбуждение моды с $n = 1$, соответствующей смещению капли как целого [8]. При реализации неустойчивости моды с $n = 2$ капля вытягивается в сфероид; поверхностная плотность электрического заряда на ее вершинах при этом увеличивается, что приводит к реализации неустойчивости более высоких мод капли, чем основная [18]. В результате суперпозиции амплитуд всех неустойчивых мод на вершинах капли образуются эмитирующие выступы, с вершин которых начинается сброс избыточного заряда [29]. Квадрат поверхностной плотности заряда на капле на пороге реализации электростатической неустойчивости удовлетворяет условию

$$\chi^2 = 2(\sigma/2\pi R). \tag{9}$$

Сравнение (8) и (9) показывает, что для реализации электростатической неустойчивости капли квадрат плотности электрического заряда на ее поверхности в два раза больше, чем для реализации электростатической неустойчивости плоской поверхности жидкости. Причиной такого положения дел является действие капиллярных сил, сжимающих каплю и оказывающих на ее невозмущенную поверхность давление $2\sigma/R$, тогда как на плоской невозмущенной волновым движением поверхности жидкости такое давление отсутствует. Из соображений симметрии можно предположить, что для реализации электростатической неустойчивости боковой поверхности цилиндрической струи радиуса R квадрат поверхностной плотности электрического заряда на ней должен лежать в диапазоне

$$\sigma/2\pi R \le \chi^2 \le 2(\sigma/2\pi R). \tag{10}$$

Давление сил поверхностного натяжения на невозмущенную цидиндрическую поверхность в два раза меньше давления поверхностного натяжения на сферическую поверхность, σ/R, и находится в середине диапазона давлений $[0; 2\sigma/R]$. Поэтому можно ожидать, что квадрат поверхностной плотности электрического заряда на свободной поверхности невозмущенной струи на пороге реализации ее электростатической неустойчивости по величине будет находиться в середине диапазона $[\sigma/2\pi R; \sigma/\pi R]$:

$$\chi^2 \approx 1.5(\sigma/2\pi R). \tag{11}$$

Условие (11) согласуется с критическим условием реализации неустойчивости неосесимметричной моды струи с $m = 2$ при $k \approx 0.789$

$$w \equiv 4\pi\chi^2 R/\sigma = 2.904,$$

откуда следует соотношение для квадрата поверхностной плотности электрического заряда

$$\chi^2 \approx 1.45(\sigma/2\pi R).$$

Как только выполнится условие $\chi^2 > 1.45(\sigma/2\pi R)$, для моды с $m = 2$ амплитуда волны с $k \approx 0.789$ на свободной поверхности струи начнет увеличиваться и, согласно сказанному выше, поперечное сечение струи станет деформироваться к эллипсу. Ориентация осей эллипса при фиксированном z будет зависеть от времени t, а при фиксированном t — от координаты z, определяющей положение поперечного сечения струи вдоль оси. При эллиптической деформации сечения струи поверхностная плотность электрического заряда в окрестности вершин эллипса будет увеличиваться по сравнению с ее значением на цилиндрической струе. Когда χ^2 будет равна 4, претерпит неустойчивость мода с $m = 3$, когда χ^2 достигнет величины ≈ 5.7, претерпит неустойчивость мода с $m = 4$ и т. д.

По аналогии с заряженной каплей [6,18,29] можно ожидать, что эта последовательность возбуждения все более высоких мод будет реализоваться, пока на боковой поверхности струи на ребрах скрученного эллиптического цилиндра не сформируются эмиссионные выступы, с вершин которых будут выброшены тонкие струйки, распадающиеся на отдельные заряженные капельки. Тем не менее представляется, что описанная картина несколько идеалистична, а реальный физический механизм реализации электростатической неустойчивости боковой поверхности струи связан с формированием сложного рельефа на поверхности струи в результате нелинейного взаимодействия волн, определяющих начальную деформацию струи, как это описано, например, в [11,27,28].

Если сформулированную выше задачу дополнить начальными условиями, характеризующими, например, начальную виртуальную деформацию струи и поле скоростей в начальный момент времени, то можно в регулярной асимптотической процедуре решить задачу о временно́й эволюции формы струи и поля скоростей течения жидкости в ней и исследовать нелинейное взаимодействие волн. Это сделано в [11,27,28,31] для идеальной жидкости, где в качестве малого параметра ε было взято отношение начальной амплитуды волны к радиусу струи.

Для настоящего рассмотрения важен лишь один из результатов проведенных анализов, а именно аналитическое выражение формы поверхности струи. Для двухмодовой начальной деформации струи, определяющейся суперпозицией двух волн с волновыми числами $k_1 = k$ и $k_q \equiv qk$ (здесь q — численный множитель) с азимутальными числами m_1 и m_q, аналитическое выражение формы поверхности струи, полученное в аналитических асимптотических расчетах второго порядка малости по ε, имеет в безразмерных переменных, в которых

$R = \sigma = \rho = 1$, вид [28]

$$r(z,\varphi,t) = 1 + \varepsilon\big[h_1\cos(m_1\varphi)\cos(\vartheta_1) + h_q\cos(m_q\varphi)\cos(\vartheta_q)\big] + 0.25\varepsilon^2\Big\{\big[-0.5(h_1^2+h_q^2) + h_1^2\eta_1^{(2)}\cos(2m_1\varphi) + h_q^2\eta_q^{(2)}\cos(2m_q\varphi)\big] + h_1^2\big[\Upsilon_{11}^{(1)}\cos(2m_1\varphi) + \Upsilon_{11}^{(3)}\big]\cos(2\vartheta) + h_q^2\big[\Upsilon_{qq}^{(1)}\cos(2m_q\varphi) + \Upsilon_{qq}^{(3)}\big]\cos(2\vartheta_q) + h_1h_q\big[(\Upsilon_{1q}^{(1)} + \Upsilon_{q1}^{(1)})\cos[(m_1+m_q)\varphi] + (\Upsilon_{1q}^{(3)} + \Upsilon_{q1}^{(3)})\cos[(m_1-m_q)\varphi]\big]\cos(\vartheta+\vartheta_q) + h_1h_q\big[(\Upsilon_{1q}^{(2)} + \overline{\Upsilon_{q1}^{(2)}})\cos[(m_1+m_q)\varphi] + (\Upsilon_{1q}^{(4)} + \overline{\Upsilon_{q1}^{(4)}})\cos[(m_1-m_q)\varphi]\big]\cos(\vartheta-\vartheta_q)\Big\},$$

$$\vartheta_j \equiv jkz - \omega_{mj}t. \qquad (12)$$

Коэффициенты $\eta_j^{(n)}$ и $\Upsilon_{ij}^{(n)}$, явный вид которых несуществен для проводимого рассмотрения, можно найти в [11,28]; h_j — парциальный вклад одной волны в суммарную начальную деформацию формы поверхности струи: $h_1 + h_q = 1$. Из (12) видно, что рельеф поверхности струи определяется суперпозицией значительного количества волн различной амплитуды, обладающих различными фазовыми скоростями. Учет слагаемых более высоких порядков малости, чем второй, приведет к еще большему усложнению формы поверхности струи [31].

На рис. 6 приведен внешний вид формы струи идеальной несжимаемой заряженной электропроводной жидкости, рассчитанной по (12) в фиксированной момент времени ($t = 0.5T$, где T — период волны), когда начальная деформация определена двумя волнами различной длины при $m_1 = m_q = 2$. Из рис. 6 видно, что поверхность струи покрыта выступами. Напряженность электрического поля собственного заряда на вершинах таких выступов, равно как и давление электрического поля,

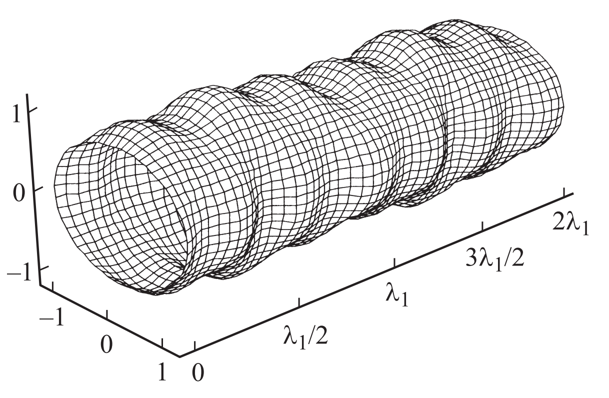

Рис. 6. Внешний вид поверхности струи, рассчитанный по (12) при $k_1 = 1.25$, $k_2 = 3.75$, $m = 1 = m_2 = 2$, $\chi = 0.25$, $\varepsilon = 0.2$.

может существенно превышать таковые на недеформированной поверхности цилиндрической струи [18,20,32], и при достаточно большой поверхностной плотности заряда χ естественно ожидать выброса из их вершин дочерних струек [33].

Здесь следует отметить, что в многочисленных приложениях феномена электродиспергирования [1–7] рассматриваются струи, выбрасываемые неустойчивой по отношению к давлению электрического поля поверхностью жидкости [32]: плоской поверхностью при реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля, сферической при реализации неустойчивости сильно заряженной капли или поверхностью мениска на торце капилляра, по которому жидкость подается в разрядную систему. В этих условиях спектр волн, формирующих начальную деформацию струи и определяющих ее неустойчивость и распад, неконтролируем и весьма широк. К расширению спектра волн, участвующих в формировании рельефа поверхности струи, приводит и их нелинейное взаимодействие [11,27,28,31]. Так, если в спектре, формирующем начальную деформацию, присутствует волна с волновом числом k_* и азимутальным числом m, то уже в расчетах второго порядка малости кроме нее появится волна с волновым числом $2k_*$ и азимутальным числом $2m$. В расчетах n-го порядка малости появятся волны с волновыми числами от $2k_*$ до nk_* и азимутальными числами от $2m$ до nm. Еще более широким будет спектр волн, принимающих участие в формировании рельефа поверхности струи, когда начальная деформация струи определяется суперпозицией нескольких волн. Для двух волн с k_1, m_1 и k_2, m_2 это обстоятельство иллюстрируется соотношением (12). Видно, что кроме волн с удвоенными волновыми и азимутальными числами в расчетах второго порядка появляются в различных комбинациях волны с волновыми и азимутальными числами, равными суммам и разностям k_1 и k_2, m_1 и m_2. Иными словами, реальный спектр волн весьма широк и обеспечивает большое количество неоднородностей формы поверхности струи, каждая из которых при достаточно большой плотности электрического заряда может породить конус Тейлора и выбросить дочернюю струйку существенно меньшего радиуса по сравнению с радиусом родительской струи.

То обстоятельство, что, согласно данным экспериментов [12,13], дочерние струйки не перпендикулярны основной струе, а ориентированы под углом к ней, означает, что по струе протекает электрический ток, и существует отличная от нуля касательная к поверхности струи компонента вектора напряженности электрического поля.

Заключение

В представленном исследовании выяснилось, что незаряженная цилиндрическая струя жидкости распадается на отдельные капли под дейстуием сил поверхностного натяжения, приводящих систему к состоянию с наименьшей потенциальной энергией за счет возбуждения осесимметричной волны с $k = k_{\max} \approx 0.7$. Появление на электропроводной струе электрического заряда делает возможным возбуждение неосесимметричных волн и, кроме того, приводит к увеличению инкремента неустойчивости осесимметричной волны (инкремента варикозной неустойчивости) и волнового числа наиболее неустойчивой моды. Следствием сказанного является то, что при реализации варикозной неустойчивости на заряженной струе размер капелек, на которые распадается струя, уменьшается с ростом поверхностной плотности заряда. При достаточно большой поверхностной плотности заряда на струе может стать неустойчивой мода с $m = 2$, и тогда поверхность струи претерпит электростатическую неустойчивость, аналогичную неустойчивости Тонкса–Френкеля для плоской поверхности жидкости или неустойчивости сильно заряженной сферической капли: на ее поверхности появится система выступов, с вершин которых будут выброшены дочерние струйки, распадающиеся на капельки, уносящие с поверхности родительской струи избыточный электрический заряд.

Работа выполнена в рамках тематического плана НИР вуза 2008 г. и при поддержке грантов РФФИ № 05-08-01147-а и 06-01-00066-а.

Список литературы

[1] *Коженков В.И., Фукс Н.А.* // Усп. химии. 1976. Т. 45. № 12. С. 2274–2284.
[2] *Габович М.Д.* // УФН. 1983. Т. 140. № 1. С. 137–151.
[3] *Ентов В.М., Ярин А.Л.* // ВИНИТИ. Итоги науки и техники. Сер. „Механика жидкости и газа“. 1984. Т. 17. С. 112–197.
[4] *Bailey A.G.* // Atomization and Spray Technology. 1986. Vol. 2. P. 95–134.
[5] *Fenn J.B., Mann M., Meng C.K.* et al. // Science. 1989. Vol. 246. N 4926. P. 64–71.
[6] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // Изв. РАН. МЖГ. 1994. № 3. С. 3–22.
[7] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Воронина Н.В., Егорова Е.В.* // ЭОМ. 2006. № 6. С. 23–34.
[8] *Strutt J.W. (Lord Rayleigh)* // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
[9] *Basset A.B.* // Amer. J. Math. 1894. Vol. 16. P. 93–110.
[10] *Taylor G.* // Proc. Roy. Soc. London. 1969. Vol. A313. P. 453–470.
[11] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В.* Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2007. 340 с.
[12] *Cloupeau M., Prunet Foch B.* // J. Electrostatics. 1990. Vol. 25. P. 164–184.
[13] *Jaworek A., Krupa A.* // J. Aerosol Sci. 1999. Vol. 30. N 7. P. 873–893.
[14] *Strutt J.W. (Lord Rayleigh)* // Proc. of the London Math. Soc. 1878. Vol. 10. P. 4–13.
[15] *Стретт Дж.В. (Лорд Рэлей).* Теория звука. Т. 2. М.: Гостехиздат, 1955. 475 с.
[16] *Schneider J.M., Lindblad N.R., Hendrics C.D., Crowley J.M.* // J. Appl. Phys. 1967. Vol. 38. N 5. P. 2599–2605.
[17] *Френкель Я.И.* // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
[18] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 7. С. 1272–1278.
[19] *Tonks L.A.* // Phys. Rev. 1935. Vol. 48. P. 562–568.
[20] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В., Рыбакова М.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 5. С. 5–12.
[21] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 7. С. 41–45.
[22] *Григорьев А.И.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 18. С. 72–77.
[23] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 10. С. 32–40.
[24] *Ширяева С.О.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 11. С. 36–42.
[25] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Мокшеев П.В.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 4. С. 32–40.
[26] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Мокшеев П.В.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 3. С. 11–20.
[27] *Ширяева С.О., Григорьев А.И., Левчук Т.В.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 8. С. 6–14.
[28] *Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 9. С. 31–41.
[29] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
[30] *Григорьев А.И., Ширяева С.О., Белоножко Д.Ф., Климов А.В.* // ЭОМ. 2004. № 4. С. 34–40.
[31] *Ширяева С.О., Воронина Н.В., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 2. С. 46–55.
[32] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 10. С. 1–7.
[33] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 2. С. 31–40.