

01;03

Алгоритм определения аэродинамических характеристик свободно летящего объекта по дискретным данным баллистического эксперимента. II

© С.В. Бобашев,¹ Н.П. Менде,¹ П.А. Попов,¹ В.А. Сахаров,¹
В.А. Бердников,² В.А. Викторов,² С.И. Осеева,² Г.Д. Садчиков²

¹ Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: nick.mende@mail.ioffe.ru

² Российский федеральный ядерный центр — Всероссийский
научно-исследовательский институт экспериментальной физики,
607190 Саров, Нижегородская обл., Россия
e-mail: berdnikov@dep16.vniief.ru

(Поступило в Редакцию 8 июля 2008 г.)

В первой части статьи представлен алгоритм численного решения прямой задачи движения твердого тела в атмосфере, который является основой решения задачи идентификации аэродинамических характеристик объекта по его траекторным данным. Описан алгоритм идентификации аэродинамических характеристик. В данной части статьи обсуждаются методы оценивания значимости искомых параметров, адекватности математической модели, выбранной для описания движения, приемы метрологической аттестации экспериментального оборудования и результаты тестирования алгоритма.

PACS: 47.85.Gj, 45.40.Gj

Оценка значимости параметров полиномиальных представлений аэродинамических коэффициентов

Процедуру подбора подходящей математической модели, описывающей движение объекта, начнем с простейшего ее представления с последующим усложнением до достижения адекватности экспериментальным данным путем минимизации отклонений измеренных значений координат от рассчитанных по модели методом наименьших квадратов. Простейшая математическая модель включает в себя коэффициент постоянной тангенциальной составляющей аэродинамической силы, линейные по углам атаки и скольжения нормальные составляющие силы и линейные составляющие аэродинамического момента, не зависящие от числа Маха. В качестве первого приближения коэффициентов тангенциальной составляющей аэродинамической силы и производных ее нормальных составляющих, как показал продолжительный опыт обработки реальных и модельных траекторий, достаточно взять любые величины из их реальных значений для летающих объектов.

Производную коэффициента аэродинамического момента следует оценить, определив (например, с помощью графика) период колебаний объекта, и по нему вычислить начальное приближение постоянной производной момента.

В первую очередь подберем более подходящие моментальные характеристики, поскольку они определяют собственно колебательное движение и составляющие аэродинамической силы. Подбор функций, описывающих угловое движение, следует начинать с движения по

крену, поскольку изменяющийся крен оказывает существенное влияние на форму колебаний по тангажу и рысканью по чисто кинематическим соображениям (при наличии скорости по крену плоскости поперечных колебаний изменяют свою ориентацию по отношению к земной системе), в то время как колебания относительно поперечных осей слабо влияют на движение по крену.

Во вторую очередь подбирается коэффициент тангенциальной силы, постоянная составляющая которой определяется сильной зависимостью координаты от времени из-за торможения объекта. И наконец, предстоит улучшить первое приближение производных нормальных составляющих аэродинамической силы.

Указанные действия, порядок которых является, с точки зрения авторов, наиболее эффективным, повторяются до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность искомых приближений для простейшей математической модели. Алгоритм и программа допускают изменение последовательности действия по желанию оператора в зависимости от конкретной ситуации.

На втором этапе следует включить в рассмотрение коэффициенты демпфирования в уравнения углового движения и повторить подбор всех параметров, включенных в математическую модель. Демпфирующие составляющие аэродинамической силы могут быть незначимыми (см. ниже), поэтому их идентификацию правильной проводить после того, как будут оценены нелинейные составляющие аэродинамической силы и момента.

На каждом этапе усложнения математической модели предстоит дать ответы на два вопроса:

— все ли оценки параметров, включенных в математическую модель, оказались значимыми (т.е. значимо отличающимися от нуля);

— является ли принятая модель адекватной с точки зрения качества описания результатов измерений?

Адекватность математической модели предстоит оценивать путем сопоставления дисперсии измерений с дисперсией аппроксимации, рассчитываемой с использованием невязок — разностей между экспериментальными данными и значениями координат, вычисленными по принятой математической модели. При этом математическая модель может содержать незначимые параметры, искажающие оценку адекватности. Поэтому сначала необходимо ответить на первый вопрос, а уж затем проверять адекватность.

Для проверки гипотезы о значимости найденных параметров необходимо оценить доверительные интервалы для каждого из них и сопоставить их величины со значениями самих параметров: если окажется, что доверительный интервал включает нулевое значение параметра, параметр следует признать незначимым при заданном уровне доверительной вероятности.

Для оценки доверительных интервалов параметров использовалось то обстоятельство, что процедура оценивания Гаусса—Ньютона [1] представляет собой последовательность линейных регрессионных задач [2,3]. Отсюда следует, что приемы оценивания дисперсии параметров линейной регрессии могут дать приемлемые оценки доверительных интервалов для идентифицируемых параметров, как в ходе итерационного процесса, так и на его заключительных этапах, когда поправки к параметрам становятся пренебрежимо малыми, и линейное приближение целевой функции справедливо в рассматриваемой малой окрестности найденного решения. Правда, в отличие от линейной регрессии в обычном понимании, в данном случае ищутся не сами параметры регрессии, а поправки к параметрам, которые отождествляются с погрешностью самого параметра.

Приведенное соображение не является строгим обоснованием правомерности дальнейших действий, однако их практическая значимость многократно проверена путем сопоставления оценок, найденных методом регрессионного анализа с оценками, полученными статистической обработкой результатов оценивания параметров при многократном „набрасывании“ на реальные или модельные траекторные данные нормально распределенных погрешностей измерений с заданной дисперсией и нулевым средним.

Итак, сохраняя терминологию, применяемую при оценивании дисперсии и значимости коэффициентов линейной регрессии [2,3], будем использовать для отыскания статистических характеристик оценок параметров математической модели движения дисперсионную матрицу \mathbf{D} , построенную по матрице частных производных \mathbf{P} вида (12) из [1]

$$\mathbf{D} = (\mathbf{P}^T \mathbf{P})^{-1}. \quad (1)$$

Напомним, при составлении матрицы \mathbf{P} , содержащей частные производные функций отклика q_i , $i = 1, 2, 3$ по идентифицируемым параметрам, одновременно используются либо три уравнения движения центра масс, либо

три уравнения углового движения. При этом в число оцениваемых величин кроме параметров представления соответствующей составляющей силы или момента входят шесть начальных условий трех уравнений. Число условных уравнений метода наименьших квадратов, по которым вычисляются невязки, оказывается равным утроенному числу точек плана эксперимента (постов регистрации координат).

Дисперсии оцениваемых параметров C_j идентифицируемой компоненты аэродинамической силы или момента (равные дисперсии поправок к ним ΔC_j , см. [1]) находятся с использованием диагональных элементов D_{jj} матрицы (1) и оценок дисперсии функций отклика q_i по следующей формуле:

$$s_{C_j}^2 = s_{\Delta C_j}^2 = D_{jj} s_{q_i}^2 = D_{jj} \frac{(\bar{q} - \bar{q}(\bar{C}, \bar{t}))^T (\bar{q} - \bar{q}(\bar{C}, \bar{t}))}{3N - J - 6}, \quad (2)$$

где s_k^2 суть оценки дисперсии величин, отмеченных нижними индексами в (2), причем дисперсии координат q_i оцениваются по остаточной сумме квадратов отклонений измеренных координат, представленных вектором \bar{q} , от рассчитанных по математической модели движения $\bar{q}(\bar{C}, \bar{t})$ (в числителе дроби правой части (2) стоит остаточная сумма квадратов невязок координат, см. [1], в знаменателе — число степеней свободы), N — число точек плана эксперимента, а J — количество оцениваемых параметров рассматриваемой компоненты аэродинамической силы или момента, цифра 6 есть общее число начальных условий трех уравнений либо углового движения, либо движения центра масс.

Попутно рассмотрим оценку дисперсии аэродинамического коэффициента C_i , представив его формально в обобщенном векторном виде (см. формулы (18)–(21) в [1]):

$$C_i = [\bar{\varphi}(\alpha, (\text{or } \beta), M) \omega_q + \bar{f}(\alpha, (\text{or } \beta), M) (\alpha, (\text{or } \beta))]^T \bar{C}, \quad (3)$$

где $\bar{\varphi}(\alpha, (\text{or } \beta), M)$ выражает зависимость демпфирующей составляющей от соответствующих углов и числа Маха, а $\bar{f}(\alpha, (\text{or } \beta), M)$ представляет зависимость производных статически составляющих от тех же переменных. Тогда при известной дисперсионной матрице (1) из свойств линейного преобразования следует

$$s_{C_i}^2 = [\bar{\varphi}(\alpha, (\text{or } \beta), M) + \bar{f}(\alpha, (\text{or } \beta), M)]^T \times \mathbf{D} [\bar{\varphi}(\alpha, (\text{or } \beta), M) + \bar{f}(\alpha, (\text{or } \beta), M)] s_q^2, \quad (4)$$

где $s_{C_i}^2$ есть дисперсия функции, описывающей аэродинамический коэффициент C_i , а s_q^2 — дисперсия измерений координаты q (функции отклика).

Правомерность применения аппарата линейного оценивания в данном случае может быть проверена прямым вычислением дисперсии и ковариаций по элементам выборки, полученной статистическим моделированием, что и делалось на заключительном этапе построения модели движения.

Предполагая, что не только результаты прямых измерений функций отклика, но и компоненты вектора оцениваемых параметров распределены нормально, проведем оценку доверительных интервалов параметров полиномиальных представлений аэродинамических коэффициентов C_j с помощью статистического критерия Стьюдента [4]. Величина

$$t = \frac{\hat{C}_j - \bar{C}_j}{S_{C_j}},$$

где \hat{C}_j — неизвестное истинное значение параметра, \bar{C}_j — полученная его оценка, а S_{C_j} — оценка среднеквадратичного отклонения параметра, подчиняется в данном случае распределению Стьюдента с $3N - J - 6$ степенями свободы. Для заданной доверительной вероятности $p = P\{|t| < t_{\text{crit}}\}$ с помощью распределения Стьюдента находим критическое значение $t_{\text{crit}}(p)$. Теперь с вероятностью p можно записать

$$D_{jj}|\hat{C}_j - \bar{C}_j| < S_{C_j} t_{\text{crit}} = t_{\text{crit}} \sqrt{D_{jj}} s_q, \quad (5)$$

где D_{jj} — диагональный элемент матрицы \mathbf{D} . Выражение (5) определяет полуширину доверительного интервала для истинного значения параметра \hat{C}_j . Если доверительный интервал содержит нулевое значение параметра, т. е. выполняется неравенство

$$t_{\text{crit}} \sqrt{D_{jj}} s_q > |\bar{C}_j|, \quad (6)$$

то принимается нуль-гипотеза $H_0: \bar{C}_j = 0$, и параметр C_j признается незначимым.

Условие (6) проверяется для всех искомых параметров на каждом шаге в процессе усложнения математической модели движения с целью улучшения описания моделью экспериментальных данных. Коэффициент, оказавшийся незначимым, исключается из рассмотрения, после чего пересчитываются оценки остальных параметров и их дисперсии.

Как видно из (2), (5) и (6), величина доверительного интервала при заданном уровне значимости определяется планом эксперимента (числом постов регистрации координат и их расположением вдоль участка регистрации), от которого зависят элементы матрицы \mathbf{D} , и величиной остаточной дисперсии аппроксимации s_q^2 . Остаточную дисперсию можно уменьшать, выбирая более сложную модель вплоть до уравнивания числа искомых параметров с утроенным числом точек плана эксперимента (в этом предельном случае, правда, не удастся получить оценки дисперсии параметров — знаменатель (2) обратится в нуль). В связи с этим встает вопрос об ограничениях на пути усложнения модели, который приобретает особую остроту в нашем случае, поскольку мы имеем дело с динамической моделью, описываемой дифференциальными уравнениями. Усложнять модель следует до достижения адекватности.

В связи с приведенными соображениями можно рекомендовать следующую последовательность действий.

1. На основании оценок приборных ошибок на отдельных этапах юстировки оптических систем баллистической установки и привязки систем координат постов регистрации к единой системе вычисляются гипотетические дисперсии измерений координат. При этом время полета считается измеренным точно, а дисперсия — быстро меняющейся со временем продольной координаты центра масс (в направлении стрельбы) должна быть скорректирована с учетом скорости объекта (см. ниже) и с использованием приборной погрешности регистрации моментов съемки следующим образом:

$$\sigma_{x\Sigma}^2 = \sigma_x^2 + V_{\text{aver}}^2 \sigma_t^2. \quad (7)$$

Здесь σ_x^2 есть оценка дисперсии измерения координаты x на основании приборных ошибок юстировки и привязки, σ_t^2 — оценка дисперсии измерения времени на основании приборной ошибки, V_{aver} — средняя скорость объекта в опыте, $\sigma_{x\Sigma}^2$ — суммарная гипотетическая дисперсия координаты x .

2. Путем обработки траекторных данных шаров и острых конусов (их аэродинамические характеристики хорошо известны, а при стрельбе в вакуум просто не нужны, в обоих случаях математическая модель движения известна и погрешность аппроксимации отсутствует) оцениваются реальные погрешности измерений линейных и угловых координат в стрельбах, имеющих целью аттестацию измерительных систем баллистической установки. В соответствии с принятым в данной работе алгоритмом оценивания параметров дифференциальных уравнений движения моменты регистрации координат считаются известными точно. При обработке траекторных данных по предложенному алгоритму погрешности регистрации времени автоматически войдут в оценки погрешностей (дисперсий) всех линейных и угловых координат объекта.

3. Сопоставление результатов пунктов 1 и 2 позволит составить суждение о качестве юстировки и привязки систем регистрации установки к единой системе координат, и при необходимости искать пути для устранения рассогласования результатов.

В результате выполнения процедур, перечисленных выше в пп. 1–3, будут получены оценки реальной дисперсии измерений координат с числом степеней свободы, определяемым числом постов регистрации координат, уменьшенным на число параметров уравнений описывающих изменение каждой из измеряемых координат. При стрельбе в вакуум таких параметров всего два на каждую из функций отклика — это начальные условия каждого из дифференциальных уравнений движения.

Третий из перечисленных выше пунктов предполагает сравнение гипотетических дисперсий измерений с реальными, полученными в результате тестовых стрельб. Проверка гипотез о равенстве упомянутых дисперсий может быть проведена с помощью критерия χ^2 [4]. Нуль-гипотеза $H_0: s_q^2 = \sigma_q^2$ проверяется с помощью критерия,

вычисляемого по формуле

$$\chi_q^2 = (N - J)s_q^2/\sigma_q^2, \quad (8)$$

при альтернативной гипотезе $H_1: s_q^2 > \sigma_q^2$. Здесь σ_q^2 — гипотетическая дисперсия координаты q , а s_q^2 — оценка той же дисперсии по данным тестовых стрельб, N — число точек плана эксперимента (постов регистрации), J — число оцениваемых параметров при обработке данных тестовых стрельб. Значение критерия, вычисленного по формуле (8), сопоставляется с табличными данными распределения χ^2 . Если нет оснований отвергнуть нулевую гипотезу, то в качестве оценки дисперсии координаты q можно принять остаточную дисперсию s_q^2 с числом степеней свободы $N - J$. Если нуль-гипотеза отвергается, следует проанализировать отклонения, образующие остаточную сумму квадратов: если они носят случайный характер, остается принять те же значения s_q^2 , которые являются оценками реальных дисперсий. Если будут обнаружены систематические ошибки, придется проверить юстировку систем регистрации координат и их привязку к единой системе координат.

В результате описанной метрологической аттестации измерительной системы баллистической установки путем обработки траекторных данных по заранее известной математической модели движения будут получены реальные оценки дисперсий измерения координат с известным числом степеней свободы. Располагая этими данными, можно приступить к изучению новых объектов с неизвестными характеристиками.

Эту же процедуру с использованием критерия χ^2 следует применить для оценки адекватности выбранной математической модели движения полученным траекторным данным путем сопоставления оценки дисперсий аппроксимации экспериментальных данных с принятыми дисперсиями измерений координат на используемой баллистической установке.

Следует иметь в виду, что на практике может встретиться ситуация, когда адекватность математической модели не достигнута (оценки дисперсии аппроксимации траекторных данных превосходят оценки дисперсий измерений), а очередной новый параметр, вводимый в математическую модель, оказывается незначимым (при этом могут заметно возрасти доверительные интервалы ранее введенных значимых параметров). В подобных случаях полезно попытаться иначе усложнить математическую модель. На примере нашего подхода, использующего полиномиальные представления аэродинамических коэффициентов, высказанная рекомендация сводится к тому, что следует пропустить очередную степень аргумента и ввести в рассмотрение более высокую. Такой прием неоднократно приводил к положительному результату.

Еще раз вернемся к принципиальной стороне дела. Все изложенные выше приемы в лучшем случае позволят сделать вывод о том, что нет оснований отвергнуть выбранную математическую модель, описывающую дви-

жение. Следует отчетливо понимать, что выбранная модель не является единственно приемлемой даже для имеющихся экспериментальных данных. Более того, доверительные интервалы аэродинамических характеристик, найденные для разных моделей, „одинаково“ адекватных траекторным данным, могут не перекрываться полностью. Отсюда следует важный вывод: найденные доверительные интервалы включают в себя *истинные* значения аэродинамических коэффициентов лишь *при условии*, что выбранная математическая модель адекватна не только траекторным данным, но и адекватно отражает вид зависимости аэродинамических коэффициентов от условий движения объекта. Констатировать адекватность в этом последнем отношении невозможно на основе анализа невязок — отклонений измерений от аппроксимирующей траектории. Для окончательного заключения здесь необходимо привлечение внешних по отношению к эксперименту сведений.

Категоричность последнего утверждения не исключает успешного оценивания нелинейных аэродинамических характеристик, а лишь предостерегает от необоснованных заключений.

Изложенная в данном разделе последовательность аттестации измерительной системы баллистической установки и последующего построения математической модели движения исследуемого объекта встречается на практике трудности, которые не всегда удается успешно преодолеть, пользуясь приведенными выше соображениями. Так, например, оказывается, что оценки дисперсии поперечных координат центра масс летящего объекта (y_0 и z_0 в земной системе), найденные по траекторным данным „эталонного“ конуса, чуть ли не на порядок больше соответствующих величин, полученных из анализа траекторных данных шара. Причины такого существенного различия следует, естественно, искать в отличиях реальных объектов и процессов от их идеализированного представления.

В первую очередь следует принять во внимание несовершенство очень распространенного способа съемки объекта теньевым методом (на фотопленке регистрируется проекция объекта, освещаемого расходящимся или параллельным пучком света). При этом заметно проявляется влияние рефракции света в областях сильных градиентов плотности, что приводит к искажению проекции объекта. В отличие от шара, где искажения его проекции на всех снимках, полученных вдоль траектории, практически одинаковы (скорость шара изменяется мало на коротких трассах), для удлиненных колеблющихся тел эти искажения зависят от угловой ориентации объекта.

Источником погрешностей может быть динамическая нечеткость изображения (размытый контур), вызванная конечным временем экспозиции.

Еще одним источником погрешностей, приводящим к увеличению оценок дисперсий измерений с использованием тел сложной формы, могут быть ошибки изготовления моделей. Отличия формы и распределения массы по объему модели приведут к тому, что при

совместной обработке траекторных данных нескольких экспериментов будет построена математическая модель удовлетворительная в среднем для обрабатываемых траекторий. При этом, естественно, возрастут отклонения измеренных координат от рассчитанных по математической модели.

Наконец, причиной увеличения погрешностей в ходе эксплуатации оборудования может быть его разъюстировка под влиянием ударных нагрузок при выстреле и других вибраций. Расстройка оборудования может быть обнаружена в контрольных опытах с шарами, которые полезно периодически повторять.

Тестирование алгоритма идентификации аэродинамических характеристик по траекторным данным летящего объекта

Прежде всего внимание было уделено решению прямой задачи движения, т.е. расчету траекторий при заданных аэродинамических и инерционных характеристиках объекта. Сравнивались траектории движения, полученные интегрированием дифференциальных уравнений различными методами. Использовались две программы исполнителей, а также программа [5], любезно предоставленная доктором А. Кломфассом (Институт Эрнста Маха, Фрайбург, ФРГ). Результаты моделирования движений на персональных компьютерах с использованием трех упомянутых программ совпадали друг с другом с машинной точностью.

Работа программы для решения прямой задачи была проверена в широком диапазоне параметров и начальных условий движения, включая стабилизацию статически неустойчивого тела вращения. Полученные данные соответствовали описаниям моделируемых движений, полученным в линейном приближении в работе [6].

Тестирование алгоритма решения обратной задачи включает три этапа. На первом этапе формировался массив дискретных модельных траекторных данных путем решения прямой задачи при заданных аэродинамических и инерционных характеристиках модели. Затем на втором этапе в модельные траектории вносились погрешности, распределенные по нормальному закону с нулевым средним и задаваемым среднеквадратичным отклонением. Заключительный этап включал собственно процедуру идентификации.

Продемонстрируем тестирование алгоритма решения обратной задачи несколькими примерами.

Осесимметричная модель при наличии вращения относительно продольной оси

При решении данной задачи расчет траектории производился для следующих параметров модели: мас-

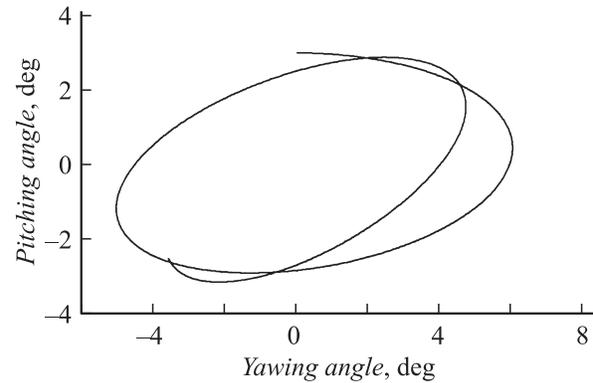


Рис. 1. Описание углового движения осесимметричного объекта при наличии вращения относительно его продольной оси на плоскости угол рысканья—угол тангажа.

са 0,63 kg, длина 0,22 m, диаметр миделевого сечения 0,06 m, главные центральные моменты инерции $J_x = 2,5 \cdot 10^{-4}$, $J_y = J_z = 2,5 \cdot 10^{-3}$ kg/m². В этом примере параметры газовой среды атмосферные при нормальных условиях. Постоянный коэффициент тангенциальной силы $C_t = 0,2$, не зависящие от числа Маха производные аэродинамических коэффициентов по углам (в радианах) и безразмерным угловым скоростям: $C_{n_y}^\alpha = C_{n_z}^\beta = 1,2$, $C_z^{\omega_y} = 0$, $C_{m_z}^\alpha = C_{m_y}^\beta = -0,06$, $C_{m_y}^{\omega_z} = -0,1$, прочие производные равны нулю.

Начальные условия движения составляли: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 1000$ m/s, $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$, $\vartheta_0 = 3,0^\circ$, $\psi_0 = \gamma_0 = 0$; $\dot{\vartheta}_0 = 0$; $\omega_{x_1} = 100$ s⁻¹, $\dot{\gamma}_0 = \omega_{x_1}$, $\omega_{y_1} = 10$ s⁻¹, $\dot{\psi}_0 = \omega_{y_1}$, $\omega_{z_1} = 0$.

Дискретные траекторные данные рассчитывались в 43 точках траектории длиной около 120 m. Такое число постов регистрации координат и длина траектории соответствуют реальной баллистической установке РФЯЦ—ВНИИЭФ [7].

При перечисленных выше условиях угловое движение в плоскости угол рысканья—угол тангажа изображается кривой, показанной на рис. 1 без внесенных случайных погрешностей измерений.

Модельная траектория искажалась нормально распределенными случайными погрешностями с нулевым средним и среднеквадратичными отклонениями 0,5 mm по линейным координатам и 0,2° — по угловым.

У осесимметричной модели коэффициенты составляющих аэродинамической силы и момента относительно поперечных связанных осей одинаковы. В программе предусмотрена возможность подбора одинаковых значений этих аэродинамических коэффициентов.

Результаты идентификации аэродинамических коэффициентов по траекторным данным этого модельного пуска следующие (табл. 1).

Среднеквадратичные отклонения аппроксимирующих зависимостей от „зашумленных“ траекторных данных составили 1,02 mm по линейным координатам и 0,24° по углам.

Таблица 1.

Аэродинамическая сила		Аэродинамический момент	
коэффициент	доверительный полуинтервал, %	коэффициент	доверительный полуинтервал, %
$C_t^0 = 0.200$	0.2	$C_{m_z}^\alpha = -0.059$	1.8
$C_{n_y}^\alpha = 1.187$	1.6	$C_{m_z}^{\omega_z} = -0.115$	57.0
$C_{n_z}^\beta = 1.187$	2.2	$C_{m_y}^\beta = -0.0587$	2.2
Максимальное число Маха = 2.9		$C_{m_y}^{\omega_y} = -0.115$	45.7
Минимальное число Маха = 2.7			

Таблица 2.

Аэродинамическая сила		Аэродинамический момент	
коэффициент	доверительный полуинтервал, %	коэффициент	доверительный полуинтервал, %
$C_t^0 = 0.1999$	0.1	$C_{m_z}^\alpha = -0.256$	8.6
$C_{n_y}^\alpha = 1.412$	1.6	$C_{m_z}^{\alpha^3} = 5.092$	66.2
$C_{n_z}^\beta = 1.229$	0.8	$C_{m_z}^{\omega_z} = -0.231$	32.8
Максимальное число Маха = 2.9		$C_{m_y}^\beta = -0.162$	16.6
Минимальное число Маха = 2.7		$C_{m_y}^{\beta^3} = 6.289$	50.7
		$C_{m_y}^{\omega_y} = -0.076$	106.6

Из табл. 1 видно, что при выбранных параметрах модели точность измерения угловых координат оставляет желать лучшего, чтобы демпфирующие составляющие аэродинамического момента могли бы быть найдены с меньшими погрешностями.

Приведенные в данной и всех последующих таблицах погрешности суть доверительные полуинтервалы коэффициентов с доверительной вероятностью 0.95.

Модель с двумя плоскостями симметрии и нелинейными составляющими момента по углам

При формировании модельной траектории использованы следующие данные модели: масса 0.63 kg, длина 0.22 m, диаметр миделевого сечения 0.06 m, главные центральные моменты инерции $J_x = 2.5 \cdot 10^{-4}$, $J_y = 3.5 \cdot 10^{-3}$, $J_z = 2.5 \cdot 10^{-3}$ kg · m². Постоянная тангенциальная составляющая аэродинамической силы — $C_t = 0.2$, не зависящие от числа Маха производные аэродинамических коэффициентов по углам (углы в радианах) и безразмерным угловым скоростям: $C_{n_y}^\alpha = 1.4$, $C_{n_z}^\beta = 1.2$, $C_{n_y}^{\omega_z} = C_{n_z}^{\omega_y} = 0$, $C_{m_z}^\alpha = -0.26$, $C_{m_y}^\beta = -0.16$, $C_{m_z}^{\alpha^3} = C_{m_y}^{\beta^3} = 6.0$, $C_{m_z}^{\omega_z} = -0.2$, $C_{m_y}^{\omega_y} = -0.1$, прочие производные равны нулю. Начальные условия движения составляли: $x_0 = y_0 = z_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 1000$ m/s, $\dot{y}_0 = \dot{z}_0 = 0$, $\gamma_0 = 0$; $\dot{\vartheta}_0 = \dot{\psi}_0 = \dot{\gamma}_0 = 0$; $\omega_{x_1} = \omega_{y_1} = \omega_{z_1} = 0$.

Цель данного тестирования состояла в том, чтобы продемонстрировать эффективность совместной обра-

ботки нескольких пусков с разным размахом колебаний для идентификации нелинейного члена аэродинамического момента и коэффициента демпфирования.

Первым был обработан одиночный пуск с начальными условиями $\vartheta_0 = \psi_0 = 7.0^\circ$.

При перечисленных выше условиях угловое движение в плоскости угол рысканья—угол тангажа изображается кривой, показанной на рис. 2 без внесенных случайных погрешностей измерений.

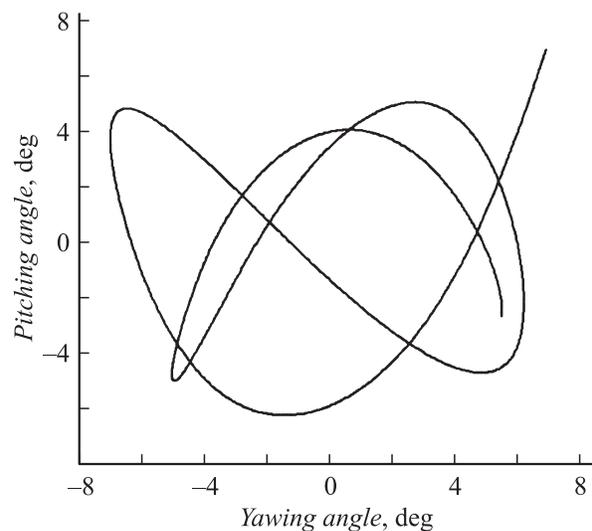


Рис. 2. Описание углового движения объекта с двумя плоскостями симметрии и нелинейными составляющими момента по углам на плоскости угол рысканья—угол тангажа.

Таблица 3.

Аэродинамическая сила		Аэродинамический момент	
коэффициент	доверительный полуинтервал, %	коэффициент	доверительный полуинтервал, %
$C_t^0 = 0.2001$	0.05	$C_{m_z}^\alpha = -0.260$	3.5
$C_{n_y}^\alpha = 1.420$	1.5	$C_{m_z}^{\alpha^3} = 5.628$	30.2
$C_{n_z}^\beta = 1.221$	0.7	$C_{m_z}^{\omega_z} = -0.203$	26.8
		$C_{m_y}^\beta = -0.155$	5.5
		$C_{m_y}^{\beta^3} = 5.514$	22.5
		$C_{m_y}^{\omega_y} = -0.103$	60.1
Максимальное число Маха = 2.9			
Минимальное число Маха = 2.7			

Таблица 4.

Аэродинамическая сила		Аэродинамический момент	
коэффициент	доверительный полуинтервал, %	коэффициент	доверительный полуинтервал, %
$C_t^0 = 0.2001$	0.04	$C_{m_z}^\alpha = -0.259$	2.5
$C_{n_y}^\alpha = 1.435$	1.2	$C_{m_z}^{\alpha^3} = 5.481$	26.1
$C_{n_z}^\beta = 1.204$	0.67	$C_{m_z}^{\omega_z} = -0.184$	23.4
		$C_{m_y}^\beta = -0.155$	3.9
		$C_{m_y}^{\beta^3} = 5.507$	18.7
		$C_{m_y}^{\omega_y} = -0.134$	36.9
Максимальное число Маха = 2.9			
Минимальное число Маха = 2.7			

Модельные траектории искажались нормально распределенными случайными погрешностями с нулевым средним и среднеквадратичными отклонениями 0.5 mm по линейным координатам и 0.5° — по угловым.

Результаты идентификации аэродинамических коэффициентов по траекторным данным одного пуска следующие (табл. 2).

Среднеквадратичные отклонения аппроксимирующих зависимостей от результатов „измерений“ по линейным координатам составили 0.6 mm, по угловым — 0.5° .

Из таблицы видно, что при заданной погрешности угловых координат нелинейные составляющие момента определяются с большой погрешностью, а один из демпфирующих коэффициентов незначим.

Изменим амплитуду колебаний, приняв $\vartheta_0 = \psi_0 = 3^\circ$, сохранив прочие условия, и обработаем новый модельный опыт совместно с предыдущим. Результаты идентификации аэродинамических коэффициентов приведены в табл. 3.

Среднеквадратичные отклонения аппроксимирующих зависимостей от результатов „измерений“ по линейным координатам составили 0.63 mm, по угловым — 0.52° . Как видно, доверительные полуинтервалы коэффициентов существенно уменьшились.

Включим в обработку еще два модельных опыта с амплитудами угловых колебаний 1 и 5° . Результаты идентификации приведены в табл. 4.

Среднеквадратичные отклонения аппроксимирующих зависимостей от результатов измерений по линейным координатам составили 0.64 mm, по угловым — 0.54° .

Как видно, включение в обработку нескольких опытов с разными размахами колебаний позволяет существенно улучшить результаты идентификации коэффициентов.

Результаты обработки реальных траекторных данных

Ниже приводятся результаты совместной обработки траекторных данных трех опытов, проведенных с однотипной моделью на баллистической установке ВНИИЭФ [7].

Геометрические и инерционные характеристики реальных моделей в трех пусках несколько отличались друг от друга, однако в каждом из опытов были использованы их реальные значения. Здесь приведем средние значения, дающие общее представление об исследуемом объекте.

Объект характеризуется следующими данными: масса 0.63 kg, длина 0.215 m, диаметр миделевого сечения 0.06 m, главные центральные моменты инерции $J_x = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, $J_y = J_z = 2.4 \cdot 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Параметры газовой среды атмосферные при нормальных условиях.

Как можно видеть, параметры объекта близки к тем, которые были использованы при построении модельных траекторий в рассмотренных выше примерах.

Начальные условия движения определялись по данным траекторных измерений в каждом из пусков (эта процедура выполняется программой автоматически за

Таблица 5.

Аэродинамическая сила		Аэродинамический момент	
коэффициент	доверительный полуинтервал, %	коэффициент	доверительный полуинтервал, %
$C_t^0 = 0.136$	0.4	$C_{m_z}^\alpha = -0.0776$	5.7
$C_t^M = -0.042$	16.9	$C_{m_y}^\beta = -0.0776$	4.4
$C_{n_y}^\alpha = 2.001$	4.0	Максимальное число Маха = 5.1	
$C_{n_z}^\beta = 2.001$	2.7	Минимальное число Маха = 4.7	
		C_t^0 соответствует числу Маха 4.9	

исключением определения периодов колебаний по тангажу и рысканью, где требуется участие оператора с использованием выводимых на экран дисплея зависимостей угловых координат от времени). Угловая скорость крена в одном из опытов была равна нулю, в двух других около 10 s^{-1} .

Приведем результаты идентификации аэродинамических коэффициентов реальных объектов с учетом их осевой симметрии (табл. 5).

Среднеквадратичные отклонения по линейным координатам оказались порядка 5.8 mm , по угловым — около 1.8° . Из приведенного выше примера оценивания демпфирующих составляющих аэродинамического момента (табл. 1) следует, что при такой погрешности (и близких параметрах модели и условий ее движения) найти коэффициенты демпфирования не удастся. Проверка показала, что доверительные полуинтервалы этих коэффициентов действительно превышают 100%. Однако обрабатываемые реальные опыты позволили продемонстрировать возможность определения зависимости коэффициента тангенциальной составляющей аэродинамической силы от числа Маха (коэффициент C_t^M оказался значимым, число Маха в обрабатываемых опытах изменяется на 0.4).

Заключение

Одним из достоинств алгоритма, построенного на основе работы [8], является возможность совместной обработки группы опытов, проведенных с однотипной моделью, что важно с точки зрения выявления нелинейностей аэродинамических характеристик.

Кроме того, совместная обработка опытов с однотипной моделью при разных начальных скоростях полета объекта позволяет даже на короткой трассе выявить зависимость аэродинамических коэффициентов от числа Маха.

Совместная обработка группы опытов с однотипной моделью весьма полезна с точки зрения повышения точности получаемых результатов за счет увеличения числа степеней свободы, т. е. разности между суммарным числом постов регистрации координат в нескольких опытах и числом идентифицируемых параметров, которое

увеличивается только за счет добавления начальных условий движения, индивидуальных в каждом опыте.

В работе использованы приемы статистического оценивания значимости идентифицируемых параметров, применявшиеся ранее при решении обратной задачи динамики в [9].

Подчеркнута важность метрологической аттестации измерительных систем баллистической установки с целью определения реальных погрешностей проводимых измерений.

Разработанный алгоритм идентификации аэродинамических характеристик объекта по дискретным траекторным данным его пространственного движения позволяет успешно решать обратную задачу баллистики — находить силовые и моментные аэродинамические характеристики объекта. Тестирование программного продукта продемонстрировало его высокую эффективность в широком диапазоне условий движения объекта.

Авторы признательны доктору А. Кломфассу (Институт Эрнста Маха, ФРГ), любезно предоставившему программу, которая была использована для тестирования программ, составленных по новому алгоритму, а также В.О. Афанасьеву за помощь в освоении методов статистического оценивания и А.И. Разумовской за подготовку текста статьи к печати.

Список литературы

- [1] Бобашев С.В., Менде Н.П., Попов П.А., Сахаров В.А., Бердников В.А., Викторов В.А., Осеева С.И., Садчиков Г.Д. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 4. С. 59–65.
- [2] Ермаков С.М., Жиглявский А.А. Математическая теория оптимального эксперимента. Уч. пос. М.: Наука, 1987. 320 с.
- [3] Хартман К., Лецкий Э., Шеффер В. и др. Планирование эксперимента в исследовании технологических процессов / Под ред. Э.К. Лецкого. М.: Мир, 1977. 552 с. (Hartmann K., Lezki E., Schäfer W. Versuchsplanung and auswertung in der Stoffwirtschaft. Leipzig: VEB Deutscher Verlag für Grundstoffindustrie, 1974).
- [4] Гмурман В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высш. шк., 1977. 479 с.

- [5] *Klomfass A., Blank S.* HERMES — Ein numerisches Verfahren zur Berechnung von Flugbahnen mit sechs Freiheitsgraden. Grundlagen and Benutzungshinweise. Fraunhofer Institute Kurzzeitdynamik, Ernst–Mach–Institut. Friburg. Juni 2000.
- [6] *Murphy C.* // Вопросы ракетной техники. 1958. Т. 44. Вып. 2. С. 3–15. (*Murphy C.* JAS Preprint N 677 (January 1957)).
- [7] *Бухтояров В.Н., Неймаш Л.М., Осеева С.И., Смирнов И.Ю., Усов В.Д., Файков Ю.И., Фатеев Ю.А.* // Сб. докл. науч. конф. Волжского регионального центра РАН. „Современные методы проектирования и отработки ракетно-артиллерийского вооружения“. Саров, 2000. С. 189–194.
- [8] *Charman G.T., Kirk D.B.* // AIAA J. 1970. N 4. P. 753–758.
- [9] *Mende Н.П.* Обратная задача нелинейной баллистики. I. Плоское движение. Препринт ФТИ РАН № 1326. Л., 1989. 44 с. (*Mende N.P.* // GAS Dynamics / Ed. by Yu.I. Koptev. Nova Science Publishers, Inc. (printed in the USA), 1992. P. 325–356).