

01;03

## О параметрической раскачке волн на заряженной поверхности полярных жидкостей при периодическом разрушении двойного электрического слоя

© А.И. Григорьев, С.О. Ширяева, С.В. Черникова

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,  
150000 Ярославль, Россия  
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 20 декабря 2007 г. В окончательной редакции 7 июля 2008 г.)

В аналитических расчетах показано, что периодическое во времени разрушение двойного электрического слоя, существующего у свободной поверхности вязкой полярной жидкости, вызывающее периодическое изменение величины коэффициента поверхностного натяжения жидкости, может быть причиной параметрической раскачки капиллярно-гравитационного волнового движения конечной амплитуды.

PACS: 47.20.Dr

Исследование параметрической раскачки волн на заряженной поверхности полярной электропроводной жидкости периодическим силовым или тепловым [1,2] воздействием, разрушающим упорядоченную структуру приповерхностного слоя жидкости (двойного электрического слоя [3–5]), представляет интерес в связи с многочисленными приложениями в геофизике, технической физике и химической технологии [6–8]. Известно, что разрушение двойного электрического слоя у свободной поверхности жидкости приводит к изменению (увеличению) ее коэффициента поверхностного натяжения, поскольку при этом изменяется (увеличивается) плотность поверхностной энергии жидкости. Феномен изменения коэффициента поверхностного натяжения жидкости при кратковременных силовых воздействиях на ее поверхность известен как эффект релаксации поверхностного натяжения, или эффект динамического поверхностного натяжения [3–5,9–14]. Суть явления сводится к следующему.

В полярных жидкостях молекулы вблизи свободной поверхности испытывают некое ориентирующее влияние поверхности, проявляющееся в том, что для молекулы, находящейся на поверхности, энергетически выгодна такая пространственная ориентация, когда один из ее полюсов (допустим, отрицательный) направлен наружу из объема. Естественно, что тепловое движение молекул жидкости разрушает упорядоченность в расположении молекул, но общая тенденция к упорядочению сохраняется. Это приводит к тому, что в пределах мономолекулярного поверхностного слоя жидкости положительные заряды диполей молекул в основном ориентированы внутрь жидкости и притягивают к поверхности отрицательные ионы, существующие в жидкости благодаря диссоциации молекул или наличию примесей. В итоге в объеме жидкости, вблизи ее поверхности, в слое толщиной порядка десятка нанометров формируется объемный отрицательный электрический заряд. Все отмеченные эффекты, приводящие к возникновению

двойного электрического слоя, вызывают изменение (уменьшение, в силу принципа Ле Шателье) поверхностной энергии, что ведет к уменьшению коэффициента поверхностного натяжения. Если теперь воздействовать на поверхность некой силой, разрушающей двойной электрический слой, то поверхностная энергия, а с ней и величина коэффициента поверхностного натяжения, достигнут своих максимумов. Затем на временном интервале порядка характерного времени восстановления ее двойного электрического слоя  $\tau$  поверхностная энергия, а следовательно, и величина коэффициента поверхностного натяжения будут релаксировать к равновесным значениям по мере того, как будет восстанавливаться двойной электрический слой. Этот феномен и называется эффектом динамического поверхностного натяжения.

Характерное время восстановления двойного электрического слоя  $\tau$  для разных жидкостей различно и, как правило, лежит в пределах от десятых долей до единиц миллисекунд. Однако, согласно экспериментальным данным [15], для растворов поверхностно активных веществ с малоподвижными молекулами, которые медленно выходят из объема на поверхность,  $\tau$  может измеряться часами. Это обстоятельство существенно расширяет список физических явлений, в которых может проявляться обсуждаемый ниже эффект. Относительное изменение величины коэффициента поверхностного натяжения достигает десятков процентов. Учет эффекта динамического поверхностного натяжения при расчете капиллярного волнового движения на свободной поверхности жидкости приводит к существенному усложнению спектра волн [9–14].

Из сказанного выше следует, что если на поверхность жидкости воздействовать периодическим (с периодом  $t_* \geq \tau$ ) силовым воздействием, разрушающим двойной электрический слой, то величина коэффициента поверхностного натяжения жидкости будет периодически изменяться со временем с частотой  $\omega \equiv 2\pi/t_*$ . Для нижеследующего качественного модельного анализа пери-

одическую зависимость величины коэффициента поверхностного натяжения от времени, в описанной ситуации имеющую релаксационный (пилообразный) вид, будем считать простой гармонической

$$\begin{aligned} \gamma(t) &= \gamma_+ + \gamma_* \cos \omega t; \quad \gamma_+ \equiv (\gamma_\infty + \gamma_0)/2; \\ \gamma_* &\equiv (\gamma_\infty - \gamma_0)/2, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\gamma_\infty$  — коэффициент поверхностного натяжения на бесконечно большой частоте (т.е. при разрушенном двойном электрическом слое);  $\gamma_0$  — коэффициент поверхностного натяжения равновесной поверхности жидкости. Один период гармонической функции моделирует процесс восстановления структуры двойного электрического слоя после его разрушения, что соответствует изменению величины коэффициента поверхностного натяжения от максимального значения  $\gamma_\infty$  до равновесного  $\gamma_0$ .

## 1. Формулировка задачи

Пусть вязкая несжимаемая жидкость с коэффициентом кинематической вязкости  $\nu$  и плотностью  $\rho$  заполняет в поле силы тяжести полубесконечное пространство  $z \leq 0$ , а  $\mathbf{n}_z \parallel -\mathbf{g}$  (т.е. направление орта  $\mathbf{n}_z$  декартовой прямолинейной системы координат противоположно по направлению действия силы тяжести). Примем, что по невозмущенной волновым движением свободной поверхности жидкости, описываемой уравнением  $z = 0$ , подверженной периодическому силовому или тепловому воздействию, разрушающему двойной электрический слой, однородно распределен электрический заряд с поверхностной плотностью  $\sigma$ . Коэффициент поверхностного натяжения  $\gamma(t)$  свободной поверхности жидкости при этом изменяется по закону (1). Уравнение свободной поверхности жидкости, возмущенной капиллярным волновым движением весьма малой амплитуды (например, теплового происхождения с амплитудой  $\sim \sqrt{kT/\gamma}$ , где  $k$  — постоянная Больцмана,  $T$  — абсолютная температура), запишем в виде:  $z = \xi(x, t)$ .

Будем исследовать устойчивость капиллярного волнового движения (которое для простоты будем принимать не зависящим от координаты  $y$ ) на свободной поверхности жидкости при сформулированных выше условиях, полагая, что поле скоростей течения жидкости

$$\mathbf{U}(x, z, t) = U_x(x, z, t)\mathbf{n}_x + U_z(x, z, t)\mathbf{n}_z$$

и  $p(x, z, t)$  — поправка к равновесному давлению внутри жидкости, вызванные возмущением  $\xi(x, t)$ , имеют тот же порядок малости, что и  $\xi(x, t)$  (при записи в безразмерных переменных, в которых  $\rho = g = \gamma_+ = 1$ ).

Математическая формулировка задачи, выписанная в линейном по малым величинам приближении и в предположении, что гидродинамические скорости много меньше релятивистских скоростей, имеет вид

$$z \leq 0: \quad \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \nabla p - \mathbf{g} - \nu \Delta \mathbf{U} = 0; \quad \operatorname{div} \mathbf{U} = 0;$$

$$\begin{aligned} z > 0: \quad & \Delta \Phi = 0; \\ z = \xi: \quad & \frac{\partial \xi}{\partial t} = U_z; \quad \frac{\partial U_x}{\partial z} + \frac{\partial U_z}{\partial x} = 0; \\ & p - 2\rho\nu \frac{\partial U_z}{\partial z} - \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} + [\gamma_+ + \gamma_* \cos \omega t] \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = 0; \\ & \Phi_s = \text{const}; \\ z \rightarrow -\infty: \quad & U_x \rightarrow 0; \quad U_z \rightarrow 0; \\ z \rightarrow \infty: \quad & \nabla \Phi \rightarrow -4\pi\sigma. \end{aligned}$$

Здесь  $\Phi(x, z, t)$  — электростатический потенциал вне жидкости;  $\Phi_s$  — постоянный электростатический потенциал поверхности жидкости;  $\mathbf{n}_x$  — орт оси абсцисс.

## 2. Процедура решения

Решение гидродинамической части выписанной задачи будем искать, разделяя поле скоростей на потенциальную и вихревую части, как это описано в [16]. Проекты решений всей задачи, удовлетворяющие граничным условиям, можно выписать в виде

$$\begin{aligned} U_x(x, z, t) &= [ikA \exp(kz) - qB \exp(qz)] \exp[i(kx - \omega_0 t)]; \\ U_z(x, z, t) &= [kA \exp(kz) + ikB \exp(qz)] \exp[i(kx - \omega_0 t)]; \\ \Phi(x, z, t) &= C \exp(-kz) \exp[i(kx - \omega_0 t)]; \\ p(x, z, t) &= i\rho\omega_0 A \exp(kz) \exp[i(kx - \omega_0 t)] - \rho gz; \\ q^2 &\equiv k^2 - i\omega_0/\nu; \end{aligned}$$

$k$  — волновое число бегущей волны;  $q^{-1}$  — характерный линейный масштаб затухания вихревой компоненты течения жидкости.

Подставив проекты решений в граничные условия, несложно в линейном приближении по безразмерной вязкости  $\nu$  (при  $\rho = g = \gamma_+ = 1$ ) прийти к дифференциальному уравнению второго порядка, описывающему временную эволюцию капиллярных волн на свободной поверхности маловязкой жидкости в описанной системе (см., например, [17,18])

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial \xi}{\partial t} + [\omega_0^2 + h \cos \omega t] \xi = 0; \quad (2)$$

$$\delta \equiv 4k^2\nu; \quad \omega_0^2 \equiv k(g\rho + \gamma_+k^2 - 4\pi\sigma^2k)/\rho; \quad h \equiv \gamma_*k^3/\rho.$$

При  $\gamma_* = 0$  уравнение (2), являющееся уравнением Матье–Хилла, перейдет в обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами, описывающее временную эволюцию амплитуд волн на однородно заряженной свободной поверхности электропроводной жидкости с коэффициентом поверхностного натяжения  $\gamma_+$

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + \delta \frac{\partial \xi}{\partial t} + \omega_0^2 \xi = 0,$$

имеющее в зависимости от соотношения физических характеристик системы периодически затухающие или экспоненциально нарастающие и экспоненциально убывающие решения.

### 3. Решения уравнения Матье—Хилла

Выражения (2) могут быть как параметрически устойчивыми, так и параметрически неустойчивыми, экспоненциально нарастающими со временем решениями. На плоскости параметров  $(h, \omega_0)$  границы, разделяющие области существования устойчивых и неустойчивых решений, на которых сами решения являются периодическими функциями, определяются функциями Матье:  $Se_n(\omega_0)$  и  $Se_n(\omega_0)$  [19].

Положения первой, второй и третьей зон (рис. 1), внутри которых реализуется параметрический резонанс между внешним силовым воздействием и капиллярно-гравитационными волнами в жидкости, при  $h < \omega_0^2$  определяются соотношениями [20].

Первая зона:

$$1 - \sqrt{\frac{h^2}{4\omega_0^4} - 4\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2} < \left(\frac{2\omega_0}{\omega}\right)^2 < 1 + \sqrt{\frac{h^2}{4\omega_0^4} - 4\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2}, \quad (3)$$

$$h > 4 \frac{\delta}{\omega} \omega_0^2. \quad (4)$$

Вторая зона:

$$4 + \frac{2h^2}{3\omega_0^4} - \sqrt{\frac{h^4}{\omega_0^8} - 64\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2} < \left(\frac{2\omega_0}{\omega}\right)^2 < 4 + \frac{2h^2}{3\omega_0^4} + \sqrt{\frac{h^4}{\omega_0^8} - 64\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2}, \quad (5)$$

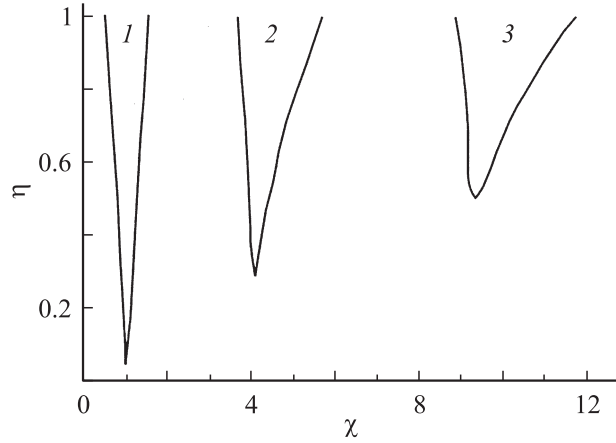
$$h > 2\sqrt{\frac{2\delta}{\omega}} \omega_0^2. \quad (6)$$

Третья зона:

$$9 + \frac{81h^2}{64\omega_0^4} - \sqrt{\frac{3^{12}h^6}{2^{18}\omega_0^{12}} - 3^4 4\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2} < \left(\frac{2\omega_0}{\omega}\right)^2 < 9 + \frac{81h^2}{64\omega_0^4} + \sqrt{\frac{3^{12}h^6}{2^{18}\omega_0^{12}} - 3^4 4\left(\frac{\delta}{\omega}\right)^2}, \quad (7)$$

$$h > \frac{8}{3} \sqrt[3]{\frac{2}{3} \frac{\delta}{\omega}} \omega_0^2. \quad (8)$$

Из выписанных соотношений видно, что в соответствии с общей идеологией уравнений Матье—Хилла легче всего возбуждается резонанс  $\omega_0 \approx \omega/2$ . Для реализации второго резонанса  $\omega_0 \approx \omega$  требуется заметно большая глубина модуляции периодического внешнего воздействия  $h$ . Еще труднее возбудить третий резонанс:  $\omega_0 \approx 3\omega/2$ . Посмотрим, как эти условия реализуются в анализируемой ситуации раскачки капиллярно-гравитационных волн периодически изменяющейся величиной коэффициента поверхностного натяжения полярной жидкости.



**Рис. 1.** Расположение первых трех зон неустойчивости уравнения Матье—Хилла, рассчитанных при  $\delta = 0.01$  и  $\omega = 1$ . По осям отложены:  $\eta \equiv h/\omega_0^2$ ;  $\chi \equiv (2\omega_0/\omega)^2$ . 1–3 — номера зон.

Полагая в приведенных соотношениях частоту внешнего силового воздействия  $\omega$ , поверхностную плотность электрического заряда  $\sigma$  и физико-химические характеристики жидкости известными (в том числе и амплитуду изменения величины коэффициента поверхностного натяжения  $\gamma_*$  при реализации эффекта динамического поверхностного натяжения), из соотношений (3)–(8) получим условия для волновых чисел волн, которые претерпят параметрическую неустойчивость.

#### 3а

Для отыскания длины волн (волновых чисел), возбуждающихся за счет реализации параметрического резонанса волн в первой зоне, проведем серию тождественных преобразований на основе условий (3), (4). Из (4) можно получить

$$h \equiv \frac{\gamma_* k^3}{\rho} > 4 \frac{\delta}{\omega} \omega_0^2 \equiv 4k^2 v \omega \left(\frac{2\omega_0}{\omega}\right)^2.$$

Учтем теперь, что, согласно (3), в первой зоне  $(2\omega_0/\omega)^2 \approx 1$  и получим

$$\frac{\gamma_* k^3}{\rho} > 4k^2 v \omega \quad \text{или} \quad k > 4v\omega\rho/\gamma_*. \quad (9)$$

Полагая для воды  $\gamma_* = 10 \text{ dyn} \cdot \text{cm}^{-1}$ ,  $\omega = 10\,000 \text{ Hz}$  [4],  $v = 0.01 \text{ cm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\rho = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ , получим из (9), что в первой зоне могут быть параметрически возбуждены волны, удовлетворяющие условию  $k > 40 \text{ cm}^{-1}$ , или для длин волн:  $\lambda > 0.15 \text{ cm}$ .

#### 3б

Проведем аналогичные преобразования для второй зоны, условия параметрического возбуждения волн в

которой определяются неравенствами (5), (6). Из условия (6) будем иметь

$$h > 2\sqrt{\frac{2\delta}{\omega}}\omega_0^2 \Rightarrow h^2 > 4\frac{2\delta}{\omega}\omega_0^4 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\gamma_*k^3}{\rho}\right)^2 > 2k^2v\omega^3\left(\frac{2\omega_0}{\omega}\right)^4.$$

Положим теперь, согласно (5), во второй зоне  $(2\omega_0/\omega)^2 \approx 4$  и получим

$$k > \sqrt[4]{32\rho^2v\omega^3/\gamma_*^2}. \quad (10)$$

Для воды соотношение (10) дает  $k > 240 \text{ см}^{-1}$ , или для длин волн:  $\lambda > 0.026 \text{ см}$ .

### 3с

Для третьей зоны из условий (7), (8) аналогичным образом выведем

$$h > \frac{8}{3}\sqrt[3]{\frac{2\delta}{3}\frac{\delta}{\omega}}\omega_0^2 \Rightarrow h^3 > \frac{1024}{81}\frac{\delta}{\omega}\omega_0^6 \Rightarrow$$

$$\left(\frac{\gamma_*k^3}{\rho}\right)^3 > \frac{128}{81}k^2v\omega^5\left(\frac{2\omega_0}{\omega}\right)^6.$$

Примем, согласно (7), в третьей зоне  $(2\omega_0/\omega)^2 \approx 9$ , поэтому искомое неравенство будет следующим:

$$\left(\frac{\gamma_*k^3}{\rho}\right)^3 > 1152k^2v\omega^5\left(\frac{2\omega_0}{\omega}\right)^6 \Rightarrow k < \sqrt[7]{1152\rho^3v\omega^5/\gamma_*^3}. \quad (11)$$

Для воды это приведет к условию  $k > 380 \text{ см}^{-1}$ , или для длин волн:  $\lambda > 0.017 \text{ см}$ .

Таким образом, с увеличением номера зоны длина волны, параметрически в ней возбуждающаяся, сокращается.

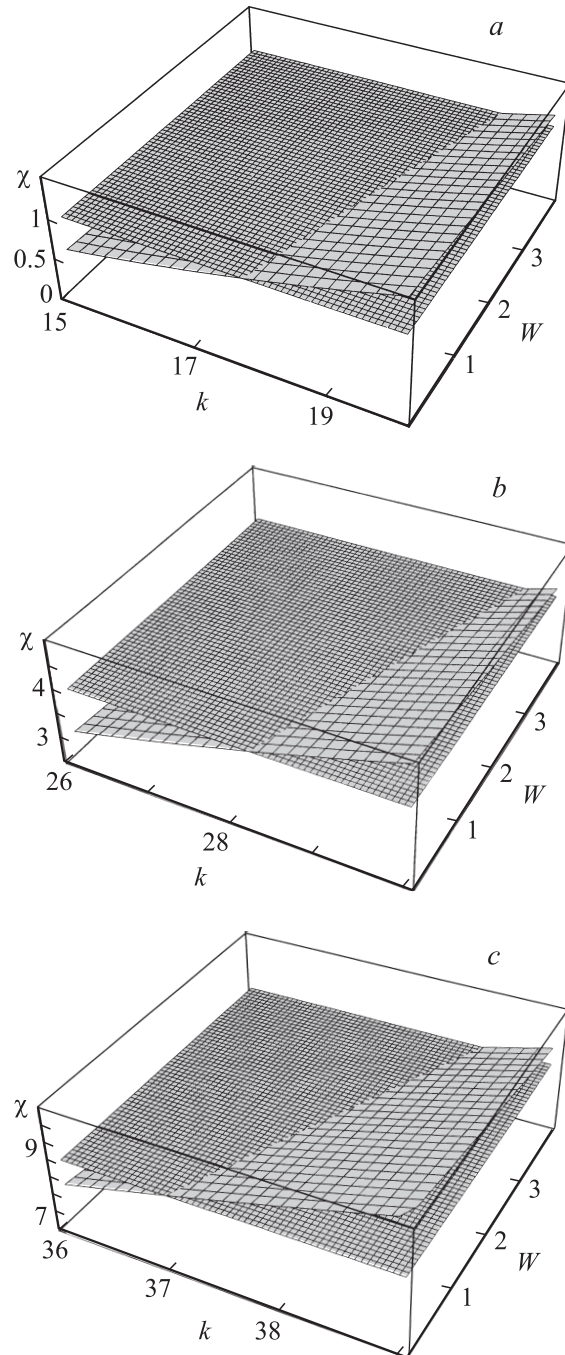
## 4. Анализ полученных результатов

Из сказанного выше может сложиться впечатление, что при заданной частоте внешнего силового воздействия на поверхность полярной жидкости во всех зонах, где реализуется параметрический резонанс, будут претерпевать параметрическую неустойчивость капиллярно-гравитационные волны, различающиеся волновыми числами. На самом деле это не так.

На рис. 2 приведены зависимости

$$\chi(k, W) \equiv [2\omega_0(k, W)/\omega]^2,$$

перечисленные плоскостями: а) —  $\chi = 1$ , б) — 4; с) — 9, рассчитанные для воды при  $\omega = 10^4$  в безразмерных переменных, в которых  $\rho = g = \gamma_+ = 1$  (параметр  $W \equiv 4\pi\sigma^2/\sqrt{\rho g \gamma_+}$  характеризует устойчивость плоской



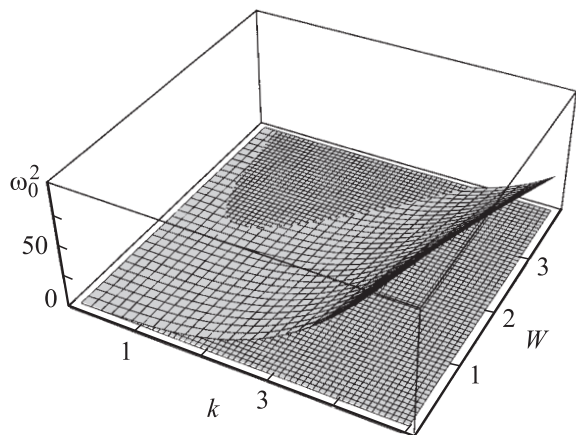
**Рис. 2.** Поверхность  $\chi(k, W)$ , рассчитанная при  $\omega = 10^4 \text{ Hz}$  в безразмерных переменных, в которых  $\rho = g = \gamma_+ = 1$ , пересеченная плоскостью  $\chi(k, W) = m$ : а —  $m = 1$ ; б — 4; с — 9.

однородно заряженной поверхности электропроводной жидкости по отношению к давлению электрического поля и называется параметром Тонкса–Френкеля). Линии пересечения поверхности  $\chi(k, W) \equiv [2\omega_0(k, W)/\omega]^2$  плоскостями  $\chi = 1, 4$  и 9 определяют центральные положения системы неравенств (3), (5), (7), и для того чтобы реализовался резонанс в какой-то из зон,

необходимо, чтобы для этой зоны на соответствующей линии выполнялось неравенство (4), (6) или (8), определяющее необходимую глубину модуляции внешнего сигнала (величину  $h$ ) или, что то же самое, — соответствующее ограничение накладывается на волновое число в системе (9)–(11).

В первой зоне, согласно условию для проявления параметрического резонанса (9), волновое число параметрически возбуждаемой волны должно удовлетворять условию  $k > 40 \text{ см}^{-1}$  (см. п. 3а) или в безразмерном виде —  $k > 8.8$ . Напомним, что в безразмерных переменных, в которых  $\rho = g = \gamma_+ = 1$ , волновое число обезразмеривается умножением на капиллярную постоянную жидкости  $\alpha \equiv \sqrt{\gamma_+/\rho g}$ , которая для воды при  $\gamma_+ = 80 \text{ дин} \cdot \text{см}^{-1}$  будет равна  $\alpha \approx 0.22 \text{ см}$ . Из рис. 2, а видно, что на центральной линии условия (3) (на линии пересечения поверхностей, приведенных на рисунке) безразмерное волновое число должно быть больше 17 (в размерном виде  $k \geq 77 \text{ см}^{-1}$ ). Таким образом, при  $k \geq 17$  неравенства (3) и (4) выполняются, и в первой зоне реализуется резонансная параметрическая раскачка волны с  $k \geq 77 \text{ см}^{-1}$  в зависимости от величины плотности поверхностного заряда  $\sigma$ .

Здесь уместно напомнить, что при выполнении условия  $\omega_0^2 \leq 0$  свободная поверхность жидкости становится неустойчивой в смысле реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля [21–23]. На плоскости параметров  $\{k, W\}$  все волны, удовлетворяющие условию  $\omega_0^2 \leq 0$ , неустойчивы по отношению к отрицательному давлению электрического поля. На рис. 3 приведена поверхность  $\chi(k, W) \equiv [2\omega_0(k, W)/\omega]^2$ , пересеченная плоскостью  $\chi(k, W) = 0$ , а область реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля ограничена кривой  $\omega_0^2 \leq 0$ . Максимальным инкрементом обладает волна, характеризуемая парой значений  $k$  и  $W$ , являющихся решением системы уравнений  $\omega_0^2 = 0$  и  $[\partial\omega_0^2/\partial k] = 0$ , а именно:  $k = 1$ ,  $W = k + k^{-1}$ . Несложно видеть, что параметрическая раскачка волн имеет место при существенно бóльших волновых числах.



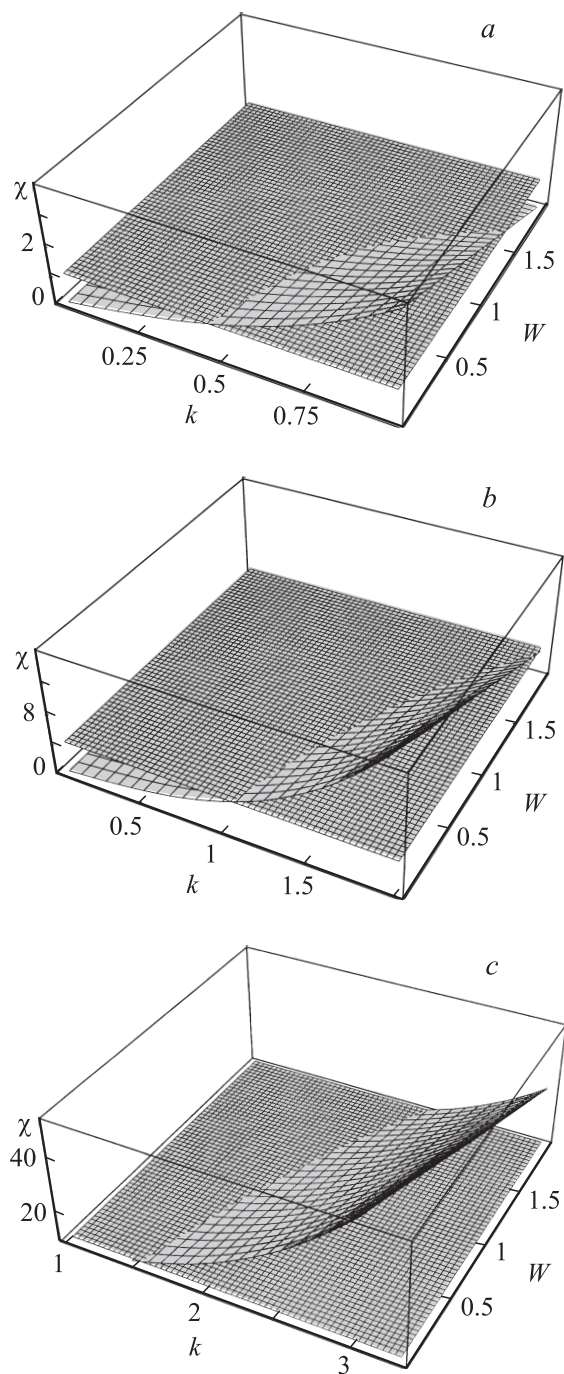
**Рис. 3.** Поверхность  $\omega_0^2(k, W)$ , пересеченная плоскостью  $\omega_0^2(k, W) = 0$ .

Иная картина получается для второй зоны. Из рис. 2, б видно, что при  $\omega = 10^4$  неравенства (5) выполняются при  $k \geq 28$ , в то время как неравенство (6), согласно оценке п. 3б, выполняется при  $k \geq 53$ . Такие значения волновых чисел на центральной линии условия (6) достигаются лишь при  $W \gg 2$ , что соответствует поверхностной плотности электрического заряда на свободной поверхности, много большей минимального критического значения по Тонксу–Френкелю, которое, согласно сказанному выше, достигается для  $k = 1$  и равно  $W = 2$ . Иными словами, при физически разумных значениях параметров условия (5) и (6) одновременно не выполняются. Это значит, что при принятых значениях параметров во второй зоне параметрическая раскачка капиллярных волн не будет иметь места, равно как и в третьей зоне, где условия (7) и (8) имеют вид  $k \geq 37$  (согласно рис. 2, с) и  $k \geq 84$  (согласно оценкам п. 3с).

Тем не менее из условий (9), (11) видно, что критические для выполнения условий (4), (6) и (8) значения волнового числа сильно зависят от частоты внешнего воздействия  $\omega$ , быстро уменьшаясь с ее понижением. Примем для нижеследующих оценок  $\omega = 100$  и получим, что в первой зоне уравнения Матье неустойчивость будут претерпевать волны с волновыми числами, удовлетворяющими неравенствам  $k \geq 0.36$  (условие попадания в первую зону (3)) и  $k \geq 0.88$  (ограничение снизу на амплитуду воздействия (9)). Во второй зоне уравнения Матье неустойчивость будут претерпевать волны с  $k \geq 1.05$  и 1.67, аналогично получающимися из (5) и из (10) соответственно. В третьей зоне уравнения Матье неустойчивость будут претерпевать волны с волновыми числами  $k \geq 1.5$  и 3.1, получающимися из (7) и из (11) соответственно.

Из рис. 4, а можно видеть, что в первой зоне значения  $k \geq 0.88$  будут достигаться на центральной линии условия (3) при  $W > 1.4$ . Следовательно, параметрическая раскачка капиллярно-гравитационных волн с волновыми числами  $k \geq 0.88$  будет иметь место при  $1.4 < W < 2$ . При значениях  $W \geq 2$ , согласно сказанному выше, поверхность жидкости будет неустойчивой из-за реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля.

Из рис. 4, б аналогично несложно видеть, что во второй зоне значения  $k \leq 1.67$  будут достигаться на центральной линии условия (5) при  $W > 1.7$ , и следовательно, когда значения параметра Тонкса–Френкеля будут лежать в диапазоне  $1.7 < W < 2$ , во второй зоне также будет иметь место параметрическая раскачка волнового движения с волновыми числами  $k \geq 1.67$ . Из рис. 4, с видно, что в третьей зоне волны с  $k \geq 3.1$  на центральной линии соотношения (7) могут быть параметрически возбуждены лишь при  $W > 2$ , т.е. в условиях развитой неустойчивости Тонкса–Френкеля. Следовательно, говорить о параметрической раскачке капиллярного волнового движения в третьей зоне вряд ли приходится.



**Рис. 4.** Поверхность  $\chi(k, W)$ , рассчитанная при  $\omega = 100$  Hz в безразмерных переменных, в которых  $\rho = g = \gamma_+ = 1$ , пересеченная плоскостью  $\chi(k, W) = m$ : *a* —  $m = 1$ ; *b* — 4; *c* — 9.

Следует отметить, что параметрическая раскачка волнового движения реализуется за счет энергии внешнего источника, и максимальная амплитуда волн определится его мощностью, но можно говорить о волновом движении конечной амплитуды (по сравнению с исходным спектром волнового движения тепловой природы с амплитудами  $\sim \sqrt{kT/\gamma}$ ).

## 5. Экспериментальная проверка

Проверка предсказываемого феномена параметрической раскачки капиллярного волнового движения при периодическом разрушении внешним силовым воздействием двойного электрического слоя у свободной поверхности полярной жидкости наиболее простым способом может быть проведена на основе явления электродиспергирования жидкости [24]. Феномен электродиспергирования жидкости реализуется, когда к капилляру, по которому в разрядную систему подается жидкость, подлежащая диспергированию, и к противоэлектроду прикладывается достаточно большая разность потенциалов, и из вершины жидкого мениска на торце капилляра выбрасывается струйка жидкости, распадаящаяся на отдельные капли под действием капиллярных и электростатических сил [24,25]. Если теперь у поверхности струи дополнительно создать касательное к струе переменное во времени электрическое поле, то по струе будет протекать электрический ток, который будет с заданной периодичностью разрушать двойной электрический слой у поверхности жидкой струи. В таких условиях можно ожидать параметрической раскачки на поверхности струи капиллярных волн с заданными длинами, которые и определяют закономерности распада струи на капли, т.е. радиусы и заряды капель. По всей видимости, обсуждаемый феномен имеет место в экспериментах по электродиспергированию жидкости (см., например, краткий обзор [26]), когда к разрядному промежутку прикладываются одновременно постоянное и переменное во времени электрические поля.

## Заключение

Периодическое разрушение двойного электрического слоя у свободной поверхности полярной жидкости внешним силовым или тепловым воздействием может привести к параметрической раскачке капиллярно-гравитационного волнового движения.

Работа выполнена в рамках тематического плана НИР вуза 2008 г. при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00066-а.

## Список литературы

- [1] Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 21. С. 89–95.
- [2] Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 11. С. 15–23.
- [3] Фрумкин А.Н. // Сб. работ по химии Хим. ин-та им. Л.Я. Карпова. М.: Науч. химическое изд-во, 1924. № 2. С. 106–122.
- [4] Коцурова Н.И., Русанов А.И. // КЖ. 1981. Т. 43. № 1. С. 36–42.
- [5] Духин С.С., Ярошук А.Э. // КЖ. 1982. Т. 44. № 5. С. 884–895.

- [6] Власов В.П., Жданов С.К., Трубников Б.А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1991. № 3. С. 10–16.
- [7] Лушников П.М. // Изв. РАН. ФАО. 1998. Т. 34. № 3. С. 413–421.
- [8] Григорьев А.И., Климов А.В., Черникова С.В., Присяжнюк А.В. Параметрические и нелинейные волны на заряженной поверхности жидкости. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2007. 170 с.
- [9] Быковский Ю.А., Манькин Э.А., Полуэктов П.П. и др. // ЖТФ. 1976. Т. 46. Вып. 11. С. 2211–2213.
- [10] Нахутин И.Е., Полуэктов П.П., Рубежный Ю.Г. // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 2. С. 415–417.
- [11] Ширяева С.О., Григорьев О.А. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 14. С. 83–88.
- [12] Григорьев О.А., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 1995. Т. 21. Вып. 12. С. 36–41.
- [13] Ширяева С.О., Григорьев О.А., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1996. Т. 66. Вып. 10. С. 31–46.
- [14] Ширяева С.О., Григорьев О.А. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 6. С. 31–36.
- [15] Bonfillon A. // J. Coll. Int. Sci. 1994. Vol. 164. N 2. P. 497–504.
- [16] Левич В.О. Физико-химическая гидродинамика. М.: Физматгиз, 1959. 699 с.
- [17] Григорьев А.И. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1989. № 1. С. 50–56.
- [18] Лазарянец А.Э., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1990. Т. 60. Вып. 9. С. 33–39.
- [19] Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 832 с.
- [20] Боголюбов Н.Н., Митропольский Ю.А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М.: Наука, 1974. 503 с.
- [21] Tonks L.A. // Phys. Rev. 1935. Vol. 48. P. 562–568.
- [22] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [23] Григорьев А.И., Григорьев О.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1992. Т. 62. Вып. 9. С. 12–21.
- [24] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. Спонтанный капиллярный распад заряженных струй. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2007. 340 с.
- [25] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 2. С. 31–40.
- [26] Григорьев А.И. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 22–27.