Краткие сообщения

01;04;10

Инварианты движения заряда в поле циркулярно поляризованной волны

© В.Н. Комаров

Саратовский государственный университет,
410601 Саратов, Россия
e-mail: komarov vn@mail.ru

(Поступило в Редакцию 25 июля 2006 г. В окончательной редакции 14 мая 2005 г.)

Решением уравнений Гамильтона получены шесть интегралов движения релятивистского заряда в поле поперечной циркулярно поляризованной электромагнитной волны, распространяющейся с фазовой скоростью $u > c$. На их основе в неподвижной системе координат анализируется траектория заряда в засимости от фазы волны. Координаты и фаза связаны эллиптическими функциями.

PACS: 45.10.Ij, 52.20.Dq, 52.27.Ny, 52.65.Cc

Известно движение заряда в поле циркулярно поляризованной волны, распространяющейся в фазовой скоростью $u = c$ в системе отсчета, в которой заряд в среднем покоится [1]. Оно может быть также описано инвариантами движения, которые проще сообращения по решению релятивистских уравнений движения заряда в разнообразных полях приведены в [2]. В бесстолкновительной плазме фазовая скорость волны $u > c$, и представляет интерес анализ траектории заряда для этого случая.

Предположим, что циркулярно поляризованная волна задана векторным потенциалом

$$\mathbf{A}(\xi) = -\frac{cE}{\omega}\,(\mathbf{i}\sin\xi - g\,\mathbf{j}\cos\xi),$$
$$\xi = \omega t - kz, \quad g^2 = 1. \tag{1}$$

— функция Гамильтона релитивистского заряда в электромагнитном поле имеет вид

$$H = \sqrt{m^2c^4 + c^2\left(\mathbf{P} - \frac{e}{c}\,\mathbf{A}(\xi)\right)^2}, \quad \mathbf{P} = \mathbf{p} + \frac{e}{c}\,\mathbf{A}, \tag{2}$$

откуда получим систему канонических уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2p_x}{\varepsilon}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{c^2p_y}{\varepsilon}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{c^2p_z}{\varepsilon},$$
$$\frac{dp_x}{dt} = eE\left(1 - \frac{v_z}{u}\right)\cos\xi,$$
$$\frac{dp_y}{dt} = eE\left(1 - \frac{v_z}{u}\right)g\sin\xi,$$
$$\frac{dp_z}{dt} = \frac{eE}{u}\,(v_x\cos\xi + v_y g\sin\xi). \tag{3}$$

Здесь $\varepsilon = \sqrt{m^2c^4 + c^2\mathbf{p}^2}$ — релятивистская энергия, Четвертое и пятое уравнения приводят к интегралам

$$p_x - \frac{eE}{\omega}\,\sin\xi = \Psi_1, \quad p_y + g\,\frac{eE}{\omega}\,\cos\xi = \Psi_2. \tag{4}$$

Из четвертого и пятого уравнения выразим тригонометрические функции и подставим в шестое. Интегрирование полученного соотношения дает

$$\varepsilon - up_z = \Psi_3. \tag{5}$$

Приведенные интегралы хорошо известны [3,4].
Из интеграла Ψ_3 найдем

$$p_z = \frac{cX - u\Psi_3}{u^2 - c^2}, \quad X = \sqrt{\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)(m^2c^2 + p^2)},$$
$$p^2 = p_x^2 + p_y^2. \tag{6}$$

Знак „+“ перед корнем выбирается в соответствии с конечным пределом при $u \to c$. Поперечный импульс p выразим через найденные интегралы, тогда

$$X(\xi) = \sqrt{\begin{aligned}&\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)\Big[m^2c^2 + \Psi_1^2 + \Psi_2^2 + \\ &\qquad + \left(\tfrac{eE}{\omega}\right)^2 + 2\,\tfrac{eE}{\omega}(\Psi_1\sin\xi - \Psi_2 g\cos\xi)\Big]\end{aligned}}. \tag{7}$$

Из проекций импульсов (4) и (6) сообразуем релятивистскую энергию

$$\varepsilon = \frac{ucX - \Psi_3c^2}{u^2 - c^2}. \tag{8}$$

В первые три уравнения системы (3) подставим импульсы (4) и (6) и энергию (8), тогда получим

$$\frac{dx}{dt} = \frac{c^2(u^2 - c^2)}{ucX - \Psi_3c^2}\left(\frac{eE}{\omega}\,\sin\xi + \Psi_1\right),$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{c^2(u^2 - c^2)}{ucX - \Psi_3c^2}\left(\Psi_2 - \frac{eE}{\omega}\,g\cos\xi\right),$$
$$\frac{dz}{dt} = c^2\,\frac{cX - u\Psi_3}{ucX - \Psi_3c^2}. \tag{9}$$

Перейдем к дифференцированию по фазе с использованием скорости $\frac{dz}{dt}$ из (9)

$$\frac{dx}{dt} = kc\,\frac{(u^2 - c^2)X}{ucX - \Psi_3 c^2}\,\frac{dx}{d\xi}. \tag{10}$$

После преобразований получим

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{c\left(\frac{eE}{\omega}\sin\xi + \Psi_1\right)}{kX(\xi)}, \quad \frac{dy}{d\xi} = \frac{c\left(\Psi_2 - \frac{eE}{\omega}g\cos\xi\right)}{kX(\xi)},$$

$$\frac{dz}{d\xi} = \frac{c(cX - u\Psi_3)}{kX(\xi)(u^2 - c^2)}. \tag{11}$$

Интегрирование этих уравнений приводит к зависимости координат от фазы через эллиптические интегралы.

Уравнение Гамильтона–Якобим также позволяет найти зависимость координат от фазы и имеет вид

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H = 0. \tag{12}$$

Для гамильтониана (2) после преобразований оно записывается в виде

$$\left(\frac{\partial S}{\partial t}\right)^2 = m^2c^4 + c^2\left[\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z}\right)^2\right]$$

$$- 2ce\left[\frac{\partial S}{\partial x}A_x + \frac{\partial S}{\partial y}A_y\right] + e^2(A_x^2 + A_y^2). \tag{13}$$

Если векторный потенциал зависит от фазы, то полный интеграл сравнения ищется в виде

$$S = F(\xi) + bx + dx + az.$$

Продольная координата z в фазу входит с фиксированным весовым множителем k, так что часть зависимости от продольной координаты входит в фазу, другая часть входит в линейную зависимость с произвольным множетелем a. Функция $F(\xi)$ подлежит определению.

Подстановка полного интеграла в уравнение дает

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2 \omega^2\left(1 - \frac{c^2k^2}{\omega^2}\right) + 2akc^2\,\frac{\partial F}{\partial \xi} = m^2c^4$$

$$+ c^2(b^2 + d^2 + a^2) - 2cebA_x - 2cedA_y + e^2(A_x^2 + A_y^2). \tag{14}$$

Решив квадратное уравнение, получим

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{u^2}{2\omega^2(u^2 - c^2)}\,[-2akc^2 \pm Q], \tag{15}$$

$$Q = \sqrt{\begin{matrix} 4a^2k^2c^4 + 4\omega^2\,\frac{u^2 - c^2}{u^2}\left(m^2c^4 + c^2(b^2 + d^2 + a^2) - \right. \\ \left. - 2cebA_x - 2cedA_y + e^2(A_x^2 + A_y^2)\right) \end{matrix}}.$$

После интегрирования имеем

$$F = \frac{u^2}{2\omega^2(u^2 - c^2)}\left[-2akc^2\xi - \int Qd\xi\right]. \tag{16}$$

Гамильтониан (2) принимает положительные значения, поэтому $\frac{\partial S}{\partial t}$ должна быть отрицательной, и при решении квадратного уравнения перед корнем выбирается знак минус. Не требуется перехода к новым переменным, как это сделано в [5]. Зная полный интеграл уравнения, можно найти импульсы и координаты. Энергию находим, дифференцируя действие по времени

$$\varepsilon = \frac{u^2}{2\omega(u^2 - c^2)}\,[2akc^2 + Q]. \tag{17}$$

Импульсы найдем, дифференцируя действие по кооординатам

$$\frac{\partial S}{\partial x} = b = p_x + \frac{e}{c}A_x, \quad \frac{\partial S}{\partial y} = d = p_y + \frac{e}{c}A_y,$$

$$\frac{\partial S}{\partial z} = \frac{ku^2}{2\omega^2(u^2 - c^2)}\,[2akc^2 + Q] + a = p_z. \tag{18}$$

Дифференцируя действие по параметрам, получим зависимость координат от фазы

$$x = x_0 + \frac{u^2}{2\omega^2(u^2 - c^2)}\,\frac{\partial}{\partial b}\int Qd\xi,$$

$$y = y_0 + \frac{u^2}{2\omega^2(u^2 - c^2)}\,\frac{\partial}{\partial d}\int Qd\xi,$$

$$z = z_0 + \frac{u^2}{2\omega^2(u^2 - c^2)}\left[2kc^2\xi + \frac{\partial}{\partial a}\int Qd\xi\right]. \tag{19}$$

Начальные значения координат являются интегралами движения, константы a, $b = \Psi_1$, $d = \Psi_2$ имеют смысл начальных значений импульсов. Преобразуем выражение для X из (19)

$$\frac{u^2}{2\omega^2(u^2 - c^2)}\,\frac{\partial}{\partial b}\int Qd\xi = \frac{c}{k}\int\frac{\Psi_1 + \frac{eE}{\omega}\sin\xi}{X(\xi)}\,d\xi, \tag{20}$$

что совпадает с правой частью первого уравнения (11), преобразование для z производится с учетом $\partial a = -\partial\Psi_3/u$.

Уравнения (11) позволяют получить звисимость координат от фазы, но интересна их зависимость от времени. Поэтому надо найти связь фазы и времени. Из определения фазы

$$t = \frac{1}{\omega}\left(\frac{u^2\xi}{u^2 - c^2} - \frac{cu\Psi_3}{u^2 - c^2}\int\frac{d\xi}{X(\xi)}\right), \tag{21}$$

здесь использована зависимость $z(\xi)$ из (11).

В общем случае время от фазы зависит через эллиптический интеграл первого рода, а начальные поперечные импульсы Ψ_1 и Ψ_2 определяют значение модуля этого интеграла. Интегрирование в (11) и (21) упрощается: если $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$, тогда X от фазы не зависит. Параметры Ψ_1 и Ψ_2 определяют начальные значения поперечных импульсов, это означает переход в подвижную систему координат в плоскости, перпендикулярной волновому вектору $\mathbf{k}$. Если поперечные скорости релятивистские, то необходимо провести преобразования Лоренца. Они приведут к изменению поляризации и частоты волны, изменив направление и волновой вектор. Переход в такую подвижную ситему не дает упрощений. В [6] указывается на целесообразность перехода в подвижную систему координат, если начальная скорость параллельна волновому вектору. Наиболее полно релятивистские преобразования плоской волны описаны в [2].

Положив $g = 0$, получим линейно поляризованную волну. Сохраняется импульс $p_y = \Psi_2$. Тогда из (6)

$$X_1(\xi) = \sqrt{\Psi_3^2 + (u^2 - c^2)\left[m^2c^2 + \Psi_2^2 + \left(\Psi_1 + \frac{eE}{\omega}\sin\xi\right)^2\right]}. \tag{22}$$

Даже при нулевых начальных импульсах Ψ_1 и Ψ_2 нельзя убрать зависимость X_1 от фазы. Время и фаза не могут быть связаны линейно для такой поляризации волны. Для нулевых поперечных начальных импульсов $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$ из уравнений движения (11) получим радиус проекции траектории на плоскость, перпендикулярную волновому вектору

$$R = \frac{c}{k}\,\frac{eE}{\omega}\,\frac{1}{\sqrt{\Psi_{30}^2 + (u^2 - c^2)\left[m^2c^2 + \left(\frac{eE}{\omega}\right)^2\right]}},$$

$$\Psi_{30} = \sqrt{m^2c^4 + c^2p_z^2 + c^2\left(\frac{eE}{\omega}\right)^2} - up_z. \tag{23}$$

Радиус окружности тем меньше, чем больше фазовая скорость отличается от скорости света в вакууме. Если $p_z \ll mc$, то

$$R = \frac{c}{\omega}\,\frac{eE}{\omega}\,\frac{1}{\sqrt{m^2c^2 + \left(\frac{eE}{\omega}\right)^2}}.$$

При движении по искривленной траектории заряд испытывает ускорения, и происходит потеря энергии на излучение. Для одиночного заряда в вакууме в системе отсчета, в которой заряд в данный момент неподвижен, сила реакции излучения

$$f = \frac{2e^2}{3c^3}\left(\frac{d^2\mathbf{v}}{dt'^2}\right).$$

Она мала по сравнению с внешней электромагнитной силой, если длина волны намного больше размера заряда $\lambda \gg e^2/mc^2$ и напряженность магнитного поля $H \ll m^2c^3/he$ (h — постоянная Планка.)

В ультрарелятивистском случае может преобладать сила реакции излучения [1]. Мощность излучения заряда, движущегося в поле плоской электромагнитной волны с фазовой скоростью $u = c$, с помощью точных волновых функций Дирака подсчитана в [5]. В сильном поле волны имеется нелинейная зависимость электрической индукции от напряженности электрического поля волны $D(E)$. Ее можно разложить в ряд по напряженности электрического поля. Слагаемые с кубической нелинейностью дают вклад на основной и утроенной частоте, и нелинейная система уравнений допускает точное решение в виде плоской волны, при этом дисперсионное уравнение содержит значения напряженности поля [7]

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2}\,\varepsilon + 2\eta E^2. \tag{24}$$

Здесь ε — линейная часть диэлектрической проницаемости среды, η — коэффициент, определяющий фокусирующую способность среды.

Возникновение нелинейности в газе свободных электронов рассмотрено в [8]. В дисперсионное соотношение, определяющее фазовую скорость поперечной электромагнитной волны, входит ленгмюровская частота. При большой амплитуде поля она зависит от фазовой скорости и амплитуды волны, массового числа иона и его заряда [9]. Все эти параметры будут определять фазовую скорость волны. Совместный анализ уравнений Максвелла и релятивистской гидродинамики электронной компоненты плазмы, находящейся в сильном электромагнитном поле волны, проведен в [10]. Амплитуда волны не должна быть столь большой, чтобы заметно не изменять свойства среды.

Представляет интерес сила, действующая на заряд. По векторному потенциалу (1) найдем поля

$$\mathbf{E} = E(\mathbf{i}\cos\xi + \mathbf{j}g\sin\xi),$$

$$\mathbf{B} = \frac{cE}{\omega}\,k(-\mathbf{i}g\sin\xi + \mathbf{j}\cos\xi). \tag{25}$$

Сила Лоренца имеет проекцию вдоль волнового вектора

$$F_z = \frac{e}{c}\,(v_xB_y - v_yB_x). \tag{26}$$

Подставив проекции скоростей из уравнений (9), получим

$$F_z = \frac{e}{c}\,\frac{(u^2 - c^2)c^2}{ucX - \Psi_3c^2}\,\frac{cEk}{\omega}\Big(\frac{eE}{\omega}\sin\xi\cos\xi + \Psi_1\cos\xi$$

$$+ \Psi_2 g\sin\xi - \frac{eE}{\omega}\,g^2\cos\xi\sin\xi\Big), \tag{27}$$

Для циркулярно поляризованной волны $g^2 = 1$ и

$$F_z \sim \Psi_1\cos\xi + \Psi_2 g\sin\xi. \tag{28}$$

При произвольных Ψ_1 и Ψ_2 продольная компонента силы зависит от фазы и может менять знак, что приводит к переменной составляющей в зависимости $z(\xi)$. Если начальные условия — нулевые $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$, то $F_z = 0$, продолный импульс p_z (6) сохраняется, как и в случае $u = c$ [1]. В линейно поляризованной волне $g = 0$, и продольная компонента силы

$$F_z \sim \left(\frac{eE}{\omega}\sin\xi + \Psi_1\right)\cos\xi, \tag{29}$$

в которой имеются первая и вторая гармоника. Если $\Psi_1 = 0$, то наблюдается вторая гармоника и высшие гармоники малой амплитуды, обусловленные зависимостью $X_1(\xi)$ в знаменателе (27), что совпадает с выводами [11]. Без учета релятивизма продольная скорость анализировалась в [12].

На рис. 1 и 2 показана зависимость координат релятивистского заряда от фазы циркулярно поляризованной волны. Вычисления проводились по формулам (11). интегралы подсчитывались методом прямоугольников. Шаг аргумента составлял $\Delta\xi = 0.314$ rad. Фазовая скорость $u = 1.5\,c$. Частота $\omega = 6.28 \cdot 10^{10}$ rad/s. Численное значение $\frac{eE}{\omega} = mc$, $\Psi_3 = mc^2 = 9 \cdot 10^{-7}$ erg, где e и m — заряд и масса электрона. Если $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$, то x и y описываются тригонометрическими функциями (рис. 1). Проекция траектории на плоскость, перпендикулярную волновому вектору, представляет окружность, по оси x смещенную на величину радиуса. Продольная координата z зависит линейно от фазы. Если одновременно Ψ_1 и Ψ_2 в нуль не обращаются, то изменение координат от фазы описывается эллиптическими функциями.

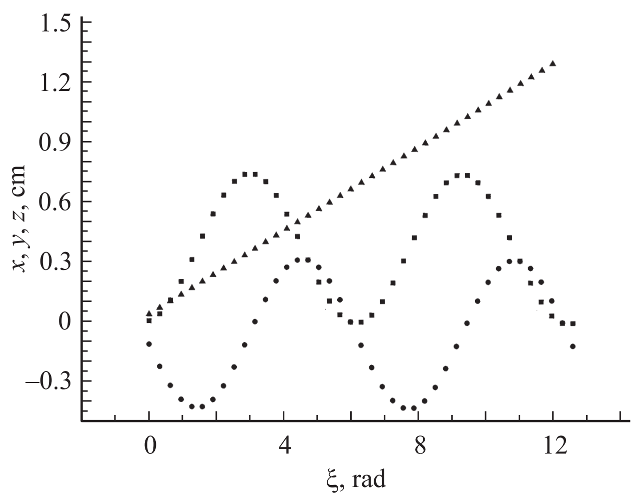

Рис. 1. Зависимость координат от фазы. ■ — координата x, ● — y, ▲ — z.

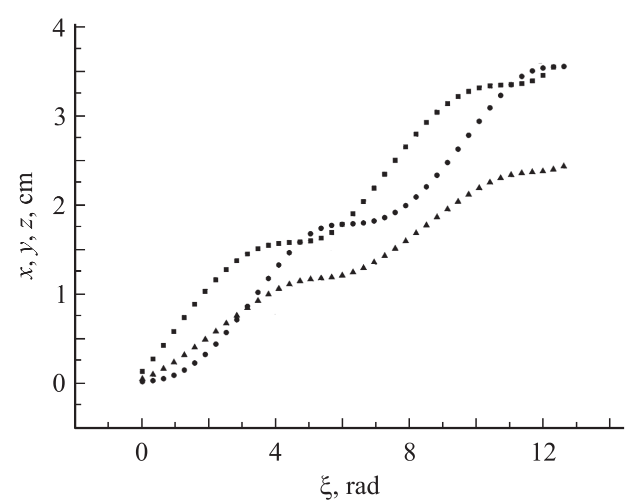

Рис. 2. То же, что для рис. 1.

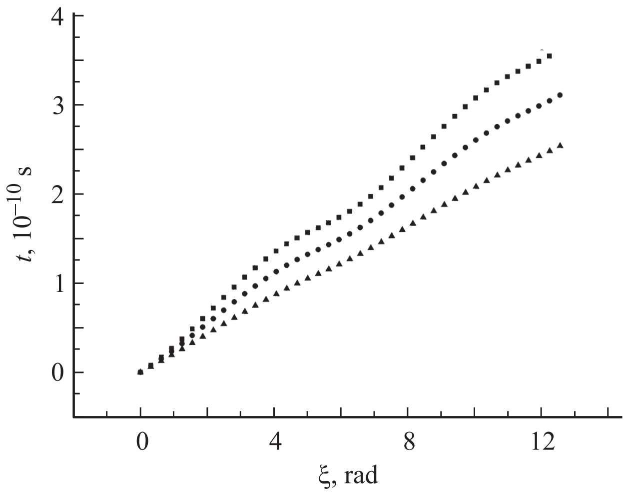

Рис. 3. Зависимость времени от фазы. ■ — $u = 1.1$, ● — 1.2, ▲ — 1.5 s.

На рис. 2 $\Psi_1 = \Psi_2 = mc$. Из (11) видно, что поперечные координаты в общем случае имеют почти линейную зависимость от фазы с наложенными осцилляциями. С увеличением фазовой скорости волны увеличиваются значения $X(\xi)$ (7), линейный рост поперечных координат уменьшается, также уменьшается амплитуда их колебаний.

На рис. 3 показана зависимость времени от фазы при условии $\Psi_1 = \Psi_2 = mc$. Чем больше фазовая скорость волны, тем медленнее изменяется время от фазы. Из (21) и (7) видно, что для $\Psi_1 = \Psi_2 = 0$, зависимость $t(\xi)$ — линейная при всех значениях фазовой скорости волны.

В заданном поле циркулярно поляризованной плоской волны постоянной амплитуды, распространяющейся с фазовой скоростью $u > c$, в пренебрежении реакцией излучения, координаты x, y, z от фазы зависят через эллиптические интегралы. При нулевых начальных поперечных импульсах заряд в поперечной плоскости вращается по окружности, радиус которой зависит от фазовой скорости волны. Время t и фаза ξ связаны линейно, если начальные поперечные импульсы малы.

В циркулярно поляризованной волне в продольной проекции силы нет второй гармоники при любых начальных условиях. В линейно поляризованной волне вторая гармоника присутствует всегда. Зависимость $X(\xi)$ добавляет высшие гармоники в продольную проекцию силы, обусловленные отклонением фазовой скорости волны от скорости света в вакууме. При $u = c$ они не проявляются [1]. Известный интеграл движения Φ_3 здесь получен из решений уравнения Гамильтона–Якоби. Выше предполагалось, что частота волны удовлетворяет условию $h\omega \ll 2mc^2$, т.е. число зарядов сохраняется, и выполняется условие $\lambda = 2\pi/k \gg h/(2\pi mc)$, при котором справедлива классическая электродинамика.

Список литературы

[1] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Теория поля. М.: Наука, 1973. 504 с.
[2] *Новожилов Ю.В., Яппа Ю.А.* Электродинамика. М.: Наука, 1978. 352 с.
[3] *Морозов А.И., Соловьев Л.С.* Вопросы теории плазмы. Т. 2. М.: Атомиздат, 1963. С. 177–261.
[4] *Давыдовский В.Я.* // ЖЭТФ. 1979. Т. 77. Вып. 2. С. 519–525.
[5] *Соколов А.А., Тернов А.И.* Релятивистский электрон. М.: Наука, 1983. 304 с.
[6] *Болотовский Б.М., Серов А.В.* // УФН. 2003. Т. 173. № 6. С. 667–678.
[7] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 624 с.
[8] *Шен И.* Принципы нелинейной оптики / Пер. с англ.; под ред. С.А. Ахматова. М.: Наука, 1989. 560 с.
[9] *Кичигин Г.Н.* // Изв. вузов. Радиофизика. 2005. Т. 48. № 6. С. 502–516.
[10] *Боровский А.В., Галкин А.Л., Коробкин В.В., Ширяев О.Б.* // Тр. ИОФ. 2000. Т. 57. С. 112–140.
[11] *Комаров В.Н.* // ЖТФ. 2001. Т. 71. Вып. 1. С. 122–124.
[12] *Лямов В.Е., Сапогин Л.Г.* ЖТФ. 1967. Т. 37. Вып. 4. С. 624–632.