01;03

Капиллярные осцилляции и устойчивость заряженной капли, вращающейся вокруг оси симметрии

© С.О. Ширяева

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 15 августа 2008 г.)

В линейном приближении по амплитуде осцилляций и по квадрату эксцентриситета сфероидальной деформации вращающейся вокруг оси симметрии заряженной капли электропроводной жидкости исследована ее устойчивость по отношению к давлению электрического поля собственного заряда и давлению сил инерции. Выяснилось, что осесимметричные моды вращающейся заряженной капли устойчивы, неустойчивость могут претерпевать лишь неосесимметричные моды с максимальными для данной моды значениями азимутальных чисел. Сила Кориолиса играет стабилизирующую роль.

PACS: 47.32.-y, 47.55.D-, 47.65.-d

Введение

Исследование физических закономерностей осцилляций и устойчивости вращающихся заряженных капель, начавшееся почти век назад в связи с исследованиями ядра атома в рамках „капельной“ модели [1], представляет интерес и в связи с изучением процессов в грозовых облаках, воронках смерчей и других заряженных жидкокапельных системах естественного и искусственного происхождения [2,3]. В последние годы экспериментальные исследования нелинейных осцилляций вращающихся капель привлекают к себе внимание исследователей в связи с проблемой получения высокочистых веществ и бесконтактного измерения физико-химических характеристик жидких веществ [4–9]. Наиболее распространенный метод теоретического аналитического исследования устойчивости вращающихся капель, основанный на теореме вириала, был предложен С. Чандрасекхаром [10] для незаряженной капли, затем обобщен на случай наличия внешнего электрического поля и электрического заряда на капле в [11,12]. На этом методе базируется большинство теоретических исследований по данному вопросу (см., например, [13]). Кроме того, используются прямые вариационные [14,15] и численные методы [16]. Нижеследующий анализ будет проведен в рамках прямого решения линеаризованных уравнений электрогидродинамики аналогично тому, как это делалось в [17].

Постановка задачи

Пусть имеется капля идеальной несжимаемой, идеально проводящей жидкости в вакууме, вращающаяся с постоянной угловой скоростью Ω, по поверхности которой равномерно распределен заряд Q. Радиус (сферической в отсутствие вращения) капли R, плотность жидкости ρ и коэффициент поверхностного натяжения свободной поверхности σ примем в качестве основных масштабов обезразмеривания, положив $R = \rho = \sigma = 1$. Все остальные физические величины (скорость, давление, угловая скорость вращения, заряд) будут выражены в долях своих характерных масштабов соответственно:

$$[U] = \sqrt{\sigma/\rho R}; \qquad [P] = \sigma/R;$$

$$[\Omega] = \sqrt{\sigma/\rho R^3}; \qquad [Q] = \sqrt{\sigma R^3}.$$

Для удобства дальнейших рассуждений перейдем к неинерциальной системе отсчета, вращающейся с той же угловой скоростью Ω, начало которой совместим с центром масс капли. Все рассмотрение проведем в сферической системе координат (r, ϑ, φ).

Давление центробежных сил приведет к деформации равновесной поверхности капли от сферической формы к форме, которая в линейном по квадрату эксцентриситета e приближении может быть описана сплюснутым вдоль оси вращения сфероидом:

$$r = r_{\text{sph}}(\vartheta) \equiv 1 - e^2 h(\vartheta); \quad h(\vartheta) \equiv \frac{1}{3} P_2(\cos\vartheta);$$

$$e^2 = \Omega^2/4(1 - W); \;\; W \equiv Q^2/16\pi; \;\; e^2 \sim \Omega^2 < 1. \quad (1)$$

Здесь $P_2(\cos\vartheta)$ — полином Лежандра; W — параметр Рэлея, характеризующий отношение электрических и капиллярных сил, действующих на свободную поверхность. Поверхность сферической капли становится неустойчивой при значении $W \geq 1$.

В настоящей работе исследуются осцилляции и устойчивость такой капли в поле центробежных кориолисовых и электрических сил.

Математическая формулировка задачи

Форму осциллирующей капли в произвольный момент времени представим в виде

$$r = r_{\text{sph}}(\vartheta) + \varepsilon\xi(\vartheta, \varphi, t); \;\; |\varepsilon(\vartheta, \varphi, t)| \sim 1; \;\; \varepsilon \ll e^2, \quad (2)$$

где функция $\varepsilon\xi(\vartheta, \varphi, t)$ описывает возмущение равновесной поверхности, ε — безразмерная амплитуда этого возмущения. Распределение поля скоростей $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$, давления $P(\mathbf{r}, t)$ внутри капли и электрического потенциала $\Phi(\mathbf{r}, t)$ вне ее определяется системой уравнений электрогидродинамики идеальной жидкости:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{U} = 0; \qquad \Delta\Phi = 0;$$

$$\partial_t\mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nabla})\mathbf{U} + 2(\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{U}) = -\boldsymbol{\nabla}P + \frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{\Omega}\times\mathbf{r}|^2. \quad (3)$$

Используемый здесь и далее оператор ∂_t означает частную производную по переменной t. Потребуем, чтобы искомые решения удовлетворяли условиям ограниченности в центре капли и на бесконечном удалении от ее поверхности:

$$r\to 0:\quad P, |\mathbf{U}|\to 0; \qquad r\to\infty:\quad |\boldsymbol{\nabla}\Phi|\to 0, \qquad (4)$$

а также гидродинамическими и электростатическим условиями на свободной поверхности (2):

$$r = r_{\text{sph}}(\vartheta) + \varepsilon\xi(\vartheta, \varphi, t);$$

$$\partial_t F(r, \vartheta, \varphi, t) + \mathbf{U}\cdot\boldsymbol{\nabla}F(r, \vartheta, \varphi, t) = 0;$$

$$F(r, \vartheta, \varphi, t) \equiv r - r_{\text{sph}}(\vartheta) - \varepsilon\xi(\vartheta, \varphi, t); \quad P + P_Q = P_\sigma;$$

$$\Phi(r, \vartheta, \varphi, t) = \Phi_S(t); \qquad (5)$$

$P_Q = (\boldsymbol{\nabla}\Phi)^2/8\pi$ и $P_\sigma = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n}$ — давление на поверхность капли электрических и капиллярных сил соответственно; $\mathbf{n}$ — орт нормали к поверхности (2).

Дополним формулировку задачи естественными условиями сохранения объема, суммарного заряда капли и неподвижности ее центра масс при осцилляциях поверхности:

$$\iiint_V dV = \frac{4}{3}\pi; \quad \iint_S (\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi)dS = -4\pi Q; \quad \iiint_V \mathbf{r}\,dV = 0; \qquad (6)$$

$$V \equiv \big\{0 \le r \le r_{\text{sph}}(\vartheta) + \varepsilon\xi(\vartheta, \varphi, t);$$

$$0 \le \vartheta \le \pi; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\big\};$$

$$S \equiv \big\{r = r_{\text{sph}}(\vartheta) + \varepsilon\xi(\vartheta, \varphi, t);$$

$$0 \le \vartheta \le \pi; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\big\}.$$

Система уравнений (3) с граничными условиями (4), (5) и дополнительными условиями (6) представляет собой полную математическую формулировку поставленной задачи.

Равновесное состояние и линеаризация задачи

Во введенной вращающейся системе координат поле скоростей течения жидкости в капле $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t)$ будет определяться колебаниями поверхности капли и, следовательно, иметь тот же порядок величины: $|\mathbf{U}| \sim \varepsilon$.

Представим функцию, описывающую возмущение равновесной поверхности $\xi(\vartheta, \varphi, t)$ в наиболее общем виде — в виде разложения по сферическим функциям $Y_l^m(\vartheta, \varphi)$:

$$\xi(\vartheta, \varphi, t) = \varepsilon\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} M_l^m Y_l^m(\vartheta, \varphi)\exp(st), \qquad (7)$$

а безразмерную амплитуду ε примем в качестве малого параметра задачи. В (7) s — частота осцилляций, а M_l^m — численные коэффициенты, определяющие парциальный вклад отдельных мод:

$$\left|\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} M_l^m Y_l^m(0, 0)\right| \sim 1.$$

Подстановка выражения (7) в дополнительные условия сохранения объема капли и неподвижности ее центра масс (6) позволяет уточнить соотношение между численными множителями M_l^m. Оказывается, что коэффициенты M_0^0 и M_l^m, определяющие вклад нулевой и первой мод, имеют более высокий порядок малости, чем все остальные и не являются независимыми. Они отличны от нуля только, если не равны нулю амплитуды второй и третьей мод соответственно: $M_0^0 \sim e^2 M_2^0$; $M_1^m \sim e^2 M_3^m$.

В нижеследующих рассуждениях, преследуя цель исследования взаимодействия капиллярных осцилляций со сфероидальным искажением равновесной поверхности, порождаемым вращением, будем учитывать слагаемые $\sim \varepsilon$, $e^2\varepsilon$, $\Omega^2\varepsilon$. Все искомые величины представим в виде разложений по малому параметру:

$$\mathbf{U} = \varepsilon\mathbf{u} + O(\varepsilon^2); \quad \Phi = \Phi^{(\text{eq})} + \varepsilon\Phi^{(l)} + O(\varepsilon^2);$$

$$P = p^{(\text{eq})} + \varepsilon p + O(\varepsilon^2); \quad P_Q = p_Q^{(\text{eq})} + \varepsilon p_Q + O(\varepsilon^2);$$

$$P_\sigma = p_\sigma^{(\text{eq})} + \varepsilon p_\sigma + O(\varepsilon^2). \qquad (8)$$

Индекс „eq“ обозначает равновесное значение. Подстановка разложений (8) в систему уравнений (3)–(6) позволяет получить задачи различных по ε порядков малости: нулевого и первого.

Задача нулевого порядка описывает равновесное состояние системы и имеет вид:

$$\partial_r p^{(\text{eq})} = \Omega^2 r\sin^2\vartheta; \quad \partial_\vartheta p^{(\text{eq})} = \Omega^2 r^2\sin\vartheta\cos\vartheta;$$

$$\partial_\varphi p^{(\text{eq})} = 0; \quad \Delta\Phi^{(\text{eq})} = 0;$$

$$r\to\infty: \qquad |\boldsymbol{\nabla}\Phi^{(\text{eq})}| \to 0;$$

$$r = r_{\text{sph}}(\vartheta): \quad p^{(\text{eq})} + p_Q^{(\text{eq})} = p_\sigma^{(\text{eq})}; \quad \Phi^{(\text{eq})}(r, \vartheta) = \Phi_S^{(\text{eq})};$$

$$\iint_S (\mathbf{n}^{(\text{eq})}\cdot\boldsymbol{\nabla}\Phi^{(\text{eq})})dS = -4\pi Q;$$

$$S \equiv \big\{r = r_{\text{sph}}(\vartheta); \quad 0 \le \vartheta \le \pi; \quad 0 \le \varphi \le 2\pi\big\};$$

$$p_Q^{(\text{eq})} = (\boldsymbol{\nabla}\Phi^{(\text{eq})})^2/8\pi; \qquad p_\sigma^{(\text{eq})} = \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{n}^{(\text{eq})}.$$

Здесь $\mathbf{n}^{(\mathrm{eq})}$ — орт нормали к свободной поверхности сплюснутого сфероида (1). В результате решения выписанной системы несложно получить, что распределения давления и электрического потенциала в равновесном состоянии с точностью до слагаемых $\sim e^2$, Ω^2 определяются следующими выражениями:

$$p^{(\mathrm{eq})}(r,\vartheta) = 2(1-W) - \frac{1}{6}\Omega^2(2 - 3r^2\sin^2\vartheta);$$

$$\Phi^{(\mathrm{eq})}(r,\vartheta) = \frac{Q}{r} - e^2\frac{Q}{r^3}h(\vartheta). \tag{9}$$

Гидродинамическая часть задачи первого по амплитуде ε порядка малости имеет вид:

$$\partial_t u_r - 2\Omega u_\varphi \sin\vartheta = -\partial_r p; \tag{10}$$

$$\partial_t u_\vartheta - 2\Omega u_\varphi \cos\vartheta = -\frac{1}{r}\partial_\vartheta p; \tag{11}$$

$$\partial_t u_\varphi + 2\Omega(u_r\sin\vartheta + u_\vartheta\cos\vartheta) = -\frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi p; \tag{12}$$

$$\frac{1}{r^2}\partial_r(r^2u_r) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta u_\vartheta) + \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi u_\varphi = 0; \tag{13}$$

$$r\to 0: \qquad p,u_r,u_\vartheta,u_\varphi \to 0; \tag{14}$$

$$r=1: \qquad -\partial_t\xi + u_r - e^2\big(h(\vartheta)\partial_r u_r - \partial_\vartheta h(\vartheta)u_\vartheta\big) = 0; \tag{15}$$

$$p - e^2h(\vartheta)\partial_r p + \Omega^2\xi\sin^2\vartheta + p_Q =$$
$$-(2+\Delta_{\vartheta,\varphi})\xi + 2e^2h(\vartheta)(4-\Delta_{\vartheta,\varphi})\xi; \tag{16}$$

$$\Delta_{\vartheta,\varphi} \equiv \Delta_\vartheta + \Delta_\varphi \equiv \frac{1}{\sin\vartheta}\partial_\vartheta(\sin\vartheta\partial_\vartheta) + \frac{1}{\sin^2\vartheta}\partial_{\vartheta,\varphi};$$

p_Q — линейная по ξ составляющая давления электрического поля на поверхность капли, которая определяется из решения электрической части задачи. Для удобства решения последней представим искомое возмущение электрического потенциала $\Phi^{(l)}$ в виде разложения по квадрату эксцентриситета e^2:

$$\Phi^{(1)} = \Phi_0^{(1)} + e^2\Phi_1^{(1)}. \tag{17}$$

Для отыскания каждой из компонент этого разложения получим отдельную краевую задачу:

$$\Delta\Phi_j^{(1)} = 0;$$

$$r\to\infty: \qquad |\boldsymbol{\nabla}\Phi_j^{(1)}| \to 0; \quad (j=0,1);$$

$$r=1: \qquad \Phi_0^{(1)} - Q\xi = \Phi_{S,0}^{(1)}(t);$$

$$\Phi_1^{(1)} + Q(\xi - \partial_r\Phi_0^{(1)})h(\vartheta) = \Phi_{S,1}^{(1)}(t);$$

$$\iint_\Xi \partial_r\Phi_0^{(1)} s\,\Xi = 0;$$

$$\iint_\Xi \Big(\partial_r\Phi_1^{(1)} - h(\vartheta)\big(6Q\xi + \partial_r(r^2\partial_r\Phi_0^{(1)})\big) + \partial_\vartheta h(\vartheta)\big(Q\partial_\vartheta\xi + \partial_\vartheta\Phi_0^{(1)}\big)\Big)d\Xi = 0;$$

$$d\Xi = \sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi; \quad \Xi = \{r=1;\ 0\le\vartheta\le\pi;\ 0\le\varphi\le 2\pi\}.$$

Последовательное решение выписанных задач позволяет найти компоненты разложения (17):

$$\Phi_0^{(1)}(\mathbf{r},t) = Q\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} M_l^m r^{-(l+1)}Y_l^m(\vartheta,\varphi);$$

$$\Phi_1^{(1)}(\mathbf{r},t) = -Q\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Big(\frac{l+2}{3}\gamma_l^m M_l^m + (l+4-3\delta_{l,1})\frac{1}{2}\alpha_{l+1}^m M_{l+2}^m + \frac{l}{2}\alpha_{l-1}^m M_{l-2}^m\Big)$$
$$\times r^{-(l+1)}Y_l^m(\vartheta,\varphi)\exp(st); \tag{18}$$

$$\alpha_l^m \equiv \frac{1}{2l+1}\sqrt{\frac{(l^2-m^2)((l+1)^2-m^2)}{(2l-1)(2l+3)}};$$

$$\gamma_l^m \equiv \frac{l(l+1)-3m^2}{(2l-1)(2l+3)}$$

и выразить через них входящую в динамическое граничное условие (16) добавку к давлению электрического поля:

$$p_Q = -\frac{Q}{4\pi}\Big\{\partial_r\Phi_0^{(1)} + 2Q\xi + e^2\big[\partial_r\Phi_1^{(1)} - h(\vartheta)(\partial_{r,r}\Phi_0^{(1)} + \partial_r\Phi_0^{(1)} + 8Q\xi) + \partial_\vartheta h(\vartheta)\partial_\vartheta\Phi_0^{(1)}\big]\Big\}\Big|_{r=1}. \tag{19}$$

Система уравнений (10)–(19) является полной формулировкой задачи в линейном по малому возмущению поверхности приближении.

Решение задачи первого порядка

Начнем рассмотрение с уравнений (10)–(12). Преобразуем их так, чтобы получить выражения для компонент скорости $u_r, u_\vartheta, u_\varphi$ через давление p. Умножим уравнение (10) на $\sin\vartheta$, а уравнение (11) — на $\cos\vartheta$ и сложим оба уравнения:

$$\partial_t(u_r\sin\vartheta + u_\vartheta\cos\vartheta) = 2\Omega u_\varphi - \Big(\sin\vartheta\,\partial_r p + \frac{1}{r}\cos\vartheta\,\partial_\vartheta p\Big). \tag{20}$$

Уравнение (12) продифференцируем по времени t и подставим в него правую часть (20), исключив компоненты u_r и u_ϑ:

$$d_{t,t}u_\varphi + 4\Omega^2u_\varphi = 2\Omega\Big(\sin\vartheta\,\partial_r p + \frac{1}{r}\cos\vartheta\,\partial_\vartheta p\Big) - \frac{1}{r\sin\vartheta}\partial_{t,\varphi}p. \tag{21}$$

Будем полагать зависимость всех искомых величин от времени экспоненциальной, по аналогии с выражением (7): $u_r, u_\vartheta, u_\varphi, p \sim \exp(st)$. При этом дифференцирование по времени сведется к появлению множителя s, и из уравнения (21) можно легко получить выражение для компоненты скорости u_φ через давление p:

$$u_\varphi = -\frac{1}{s(s^2+4\Omega^2)}\left(\frac{s^2}{r\sin\vartheta}\partial_\varphi p - 2\Omega s\left(\sin\vartheta\,\partial_r p + \frac{1}{r}\cos\vartheta\,\partial_\vartheta p\right)\right). \quad (22)$$

Используя (22), из уравнений (10) и (11) получим аналогичные выражения для двух других компонент скорости:

$$u_r = -\frac{1}{s(s^2+4\Omega^2)}\left[(s^2+4\Omega^2\cos^2\vartheta)\partial_r p + 2\Omega s\frac{1}{r}\partial_\varphi p - 4\Omega^2\frac{1}{r}\sin\vartheta\cos\vartheta\,\partial_\vartheta p\right]; \quad (23)$$

$$u_\vartheta = -\frac{1}{s(s^2+4\Omega^2)}\left[(s^2+4\Omega^2\sin^2\vartheta)\frac{1}{r}\partial_\vartheta p + 2\Omega s\,\mathrm{ctg}\,\vartheta\frac{1}{r}\partial_\varphi p - 4\Omega^2\sin\vartheta\cos\vartheta\,\partial_r p\right]. \quad (24)$$

Подставим (22)–(24) в уравнение неразрывности (13) и после упрощающих преобразований запишем уравнение для определения гидродинамического давления в жидкости:

$$s^2\Delta p + 4\Omega^2\left[\frac{1}{r}\partial_r p + \cos^2\vartheta\left(\partial_{r,r}p - \frac{1}{r}\partial_r p\right) + \sin^2\vartheta\,\Delta_\vartheta\frac{1}{r^2}p - \sin\vartheta\cos\vartheta\,\partial_\vartheta\left(\frac{2}{r}\partial_r p - \frac{1}{r^2}p\right)\right] = 0. \quad (25)$$

Будем искать решение этого уравнения в виде разложения по сферическим функциям:

$$p(r,\vartheta,\varphi,t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} p_l^m(r)Y_l^m(\vartheta,\varphi)\exp(st). \quad (26)$$

Подставив (26) в (25) и используя соотношения:

$$\sin^2\vartheta\,\Delta_\vartheta Y_l^m(\vartheta,\varphi) = \left(\frac{2}{3}l(l+1)(\gamma_l^m-1)+m^2\right)Y_l^m(\vartheta,\varphi) + l(l+1)\big(\alpha_{l+1}^m Y_{l+2}^m(\vartheta,\varphi)+\alpha_{l-1}^m Y_{l-2}^m(\vartheta,\varphi)\big);$$

$$\cos^2\vartheta\,Y_l^m(\vartheta,\varphi) = \frac{1}{3}(2\gamma_l^m+1)Y_l^m(\vartheta,\varphi) + \alpha_{l+1}^m Y_{l+2}^m(\vartheta,\varphi) + \alpha_{l-1}^m Y_{l-2}^m(\vartheta,\varphi);$$

$$\sin\vartheta\cos\vartheta\,\partial_\vartheta Y_l^m(\vartheta,\varphi) = -\gamma_l^m Y_l^m(\vartheta,\varphi) - l\alpha_{l+1}^m Y_{l+2}^m(\vartheta,\varphi) - (l+1)\alpha_{l-1}^m Y_{l-2}^m(\vartheta,\varphi), \quad (27)$$

а также, учитывая ортогональность сферических функций, получим систему связанных уравнений для нахождения функций $p_l^m(r)$, описывающих зависимость давления от радиальной координаты:

$$\left(s^2+\frac{4}{3}\Omega^2(2\gamma_l^m+1)\right)\left(\partial_{rr}+\frac{2}{r}\partial_r-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)p_l^m(r) + 4\Omega^2\alpha_{l-1}^m\left(\partial_{r,r}-\frac{2l-3}{r}\partial_r+\frac{l(l-2)}{r^2}\right)p_{l-2}^m(r) + 4\Omega^2\alpha_{l+1}^m\left(\partial_{r,r}+\frac{2l+5}{r}\partial_r+\frac{(l+1)(l+3)}{r^2}\right)p_{l+2}^m(r) = 0. \quad (28)$$

Приближенное решение этого уравнения можно найти в два этапа. Для отыскания приближения нулевого порядка пренебрежем взаимодействием различных мод, отбросив слагаемые, пропорциональные $p_{l\pm2}^m(r)$. В результате получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка, являющееся радиальной частью уравнения Лапласа в сферических координатах. Решение этого уравнения, удовлетворяющее условию ограниченности в центре капли (14), имеет вид: $p_l^m(r) = A_l^m r^l$. Чтобы учесть в (28) взаимодействие мод, преобразуем его, заменив функции $p_{l\pm2}^m(r)$ решениями, найденными в нулевом приближении, а именно: $p_{l\pm2}^m(r) \to A_{l\pm2}^m r^{\pm2}$. Получим систему неоднородных дифференциальных уравнений для отыскания неизвестных функций $p_l^m(r)$, учитывающих взаимодействие мод:

$$\left(s^2+\frac{4}{3}\Omega^2(2\gamma_l^m+1)\right)\left(\partial_{rr}+\frac{2}{r}\partial_r-\frac{l(l+1)}{r^2}\right)p_l^m(r) = -4\Omega^2\alpha_{l-1}^m\left(\partial_{r,r}-\frac{2l-3}{r}\partial_r+\frac{l(l-2)}{r^2}\right)A_{l-2}^m r^{l-2} - 4\Omega^2\alpha_{l+1}^m\left(\partial_{r,r}+\frac{2l+5}{r}\partial_r+\frac{(l+1)(l+3)}{r^2}\right)A_{l+2}^m r^{l+2}.$$

В результате решения второй системы выражение для гидродинамического давления в жидкости с точностью до слагаемых $\sim\Omega^2$ может быть найдено в следующем виде:

$$p(\mathbf{r},t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left(A_l^m r^l - 2\frac{\Omega^2}{s^2}\frac{\alpha_{l+1}^m}{2l+5}A_{l+2}^m r^{l+2}\right) \times Y_l^m(\vartheta,\varphi)\exp(st), \quad (29)$$

где A_l^m — численные коэффициенты, определяемые из граничных условий.

Подставив (29) в (22)–(24), получим выражения для компонент скорости:

$$u_r(\mathbf{r},t) = -\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l} \times\frac{1}{s}\left[\left(l+2im\frac{\Omega}{s}-4\frac{\Omega^2}{s^2}\frac{l(l-1)+m^2}{2l-1}\right)A_l^m r^{l-1} - 2\frac{\Omega^2}{s^2}l(2l+5)\alpha_{l+1}^m A_{l+2}^m r^{l+1}\right]Y_l^m(\vartheta,\varphi)\exp(st);$$

$$u_\vartheta(\mathbf{r},t) = -\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{s}\Bigg[\Bigg(A_l^m r^{l-1}$$

$$-2\frac{\Omega^2}{s^2}(2l+5)\alpha_{l+1}^m A_{l+2}^m r^{l+1}\Bigg)\partial_\vartheta Y_l^m(\vartheta,\varphi)$$

$$+2\Bigg(\Bigg(i\frac{\Omega}{s}m - 2\frac{\Omega^2}{s^2}\frac{l(l-1)+m^2}{2l-1}\Bigg)A_l^m r^{l-1}$$

$$+2\frac{\Omega^2}{s^2}(2l+5)\alpha_{l+1}^m A_{l+2}^m r^{l+1}\Bigg)\operatorname{ctg}(\vartheta)Y_l^m(\vartheta,\varphi)\Bigg]\exp(st);$$

$$u_\varphi(\mathbf{r},t) = -i\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{1}{s}\Bigg[\Bigg(m+2i\frac{\Omega}{s}\frac{l(l-1)+m^2}{2l-1}$$

$$-4\frac{\Omega^2}{s^2}m\Bigg)A_l^m r^{l-1} - 2\Bigg(i\frac{\Omega}{s}+\frac{\Omega^2}{s^2}m\Bigg)(2l+5)\alpha_{l+1}^m A_{l+2}^m r^{l+1}\Bigg]$$

$$\times\ \frac{1}{\sin\vartheta}Y_l^m(\vartheta,\varphi)\exp(st). \tag{30}$$

Выражения (29), (30) являются решением системы уравнений (10)–(14).

Граничные условия на свободной поверхности, дисперсионное уравнение

Из кинематического граничного условия (15), используя решения (30) и (7), получим связь коэффициентов A_l^m с парциальными амплитудами M_l^m:

$$A_l^m = -\frac{s^2}{l^2}\Bigg[\Bigg(l - 2i\frac{\Omega}{s}m + 4\frac{\Omega^2}{s^2}l(l-1)\beta_{l,m}^{(1)}$$

$$+e^2\frac{l(l-1)-3}{3}\gamma_l^m\Bigg)M_l^m + \Bigg(4\frac{\Omega^2}{s^2}l(2l+5)$$

$$+e^2\big(l(l+1)-4\big)\Bigg)\frac{l\alpha_{l+1}^m}{2(l+2)}M_{l+2}^m$$

$$+e^2\frac{l(l-1)\alpha_{l-1}^m}{2}M_{l-2}^m\Bigg], \tag{31}$$

используя которую, можно записать давление через амплитуды M_l^m капиллярных осцилляций поверхности капли (7):

$$p(\mathbf{r},t) = -\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Bigg\{\frac{1}{l^2}\Bigg(ls^2 - 2im\Omega s$$

$$+4\Omega^2 l(l-1)\beta_{l,m}^{(1)} + e^2 s^2\frac{l(l-1)-3}{3}\gamma_l^m\Bigg)r^l Y_l^m(\vartheta,\varphi)$$

$$+\Big(e^2 s^2\beta_l^{(2)} + 4\Omega^2(2l+1)(1-r^2)\Big)\frac{\alpha_{l-1}^m}{2l}r^{l-2}Y_{l-2}^m(\vartheta,\varphi)$$

$$+\ e^2 s^2\frac{(l+1)}{l+2}\frac{\alpha_{l+1}^m}{2}r^{l+2}Y_{l+2}^m(\vartheta,\varphi)\Bigg\}M_l^m\exp(st); \tag{32}$$

$$\beta_{l,m}^{(1)} \equiv \frac{l^2-m^2}{l^2(2l-1)}; \qquad \beta_l^{(2)} \equiv \frac{l(l-3)-2}{l-2}.$$

Подставляя выражения (7), (18), (19), (32) в динамическое граничное условие (16) и учитывая ортогональность сферических функций, получим систему линейных связанных уравнений относительно коэффициентов M_l^m:

$$a_l^m M_l^m + e^2 b_l^m M_{l+2}^m + e^2 c_l^m M_{l-2}^m = 0; \tag{33}$$

$$a_l^m \equiv l^2(s^2+\omega_l^2) - 2iml\Omega s$$

$$-\Omega^2 l^2\Bigg(\frac{2}{3}l(1-\gamma_l^m) - 4(l-1)\beta_{l,m}^{(1)}\Bigg)$$

$$-e^2\Big(s^2(l+3) - 2l^2(l^2+l+4) - 4Wl^2(l-4)\Big)\frac{l}{3}\gamma_l^m;$$

$$\omega_l^2 \equiv l(l-1)(l+2-4W);$$

$$e^2 b_l^m \equiv \frac{l^2}{2}\Bigg(2l\Omega^2 - e^2\Bigg(s^2\frac{(l+4)}{(l+2)}$$

$$-2l(l^2+5l+10) - 4Wl(l-7)\Bigg)\Bigg)\alpha_{l+1}^m;$$

$$e^2 c_l^m \equiv 0.5l^2\Big(2l\Omega^2 - e^2\big(s^2 - 2l(l^2-3l+6)$$

$$-4Wl(l-5)\big)\Big)\alpha_{l-1}^m.$$

Условием нетривиальной разрешимости системы (33) является обращение в нуль определителя бесконечной размерности, составленного из коэффициентов при неизвестных коэффициентах:

$$\begin{vmatrix} a_l^m & e^2 b_l^m & 0 & \ldots \\ e^2 c_{l+2}^m & a_{l+2}^m & e^2 b_l^m & \ldots \\ 0 & e^2 c_{l+4}^m & a_{l+4}^m & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix} = 0.$$

Однако в приближении $\sim e^2$ выписанное уравнение сводится к простому виду: $a_l^m \cdot a_{l+2}^m \cdot a_{l+4}^m \cdot \ldots = 0$ и легко решается: $a_l^m = 0$ $(\forall\, l \ge 2)$. Последнее выражение и определяет в линейном по e^2 и Ω^2 приближении дисперсионное уравнение задачи, связывающее частоту колебаний s с видом колебательной моды (числами l и m):

$$s^2 - 2i\frac{m}{l}\Omega s + \omega_l^2 + e^2\big(\eta_l - 4W(5l-3)\big)\frac{\gamma_0^m}{3}$$

$$-\Omega^2\Bigg(\chi_l^m + \frac{m^2}{l^2}\Bigg) = 0; \tag{34}$$

$$\eta_l \equiv 3(l^3+2l^2+3l-2); \qquad \chi_l^m \equiv \chi_{l,m}^{(1)} - \chi_{l,m}^{(2)};$$

$$\chi_{l,m}^{(1)} \equiv \frac{2}{3}l(1-\gamma_l^m); \qquad \chi_{l,m}^{(2)} \equiv \frac{4l^2(l-1) - m^2(2l-3)}{l^2(2l-1)}.$$

Уравнение (34) является квадратным по s, и его решения имеют вид:

$$s_{1,2} \equiv s_{l,m}^{(\pm)} \approx i\omega_l \left[1 + \frac{e^2}{2\omega_l^2}\big(\eta_l - 4W(5l-3)\big)\frac{\gamma_l^m}{3} - \frac{\Omega^2}{2\omega_l^2}\chi_l^m \pm \frac{m\Omega}{l\omega_l}\right]. \qquad (35)$$

Отметим, что величина ω_l определяет частоты капиллярных колебаний заряженной капли в отсутствии вращения.

Используя в (30), (32) выражение (35) для частоты s и соотношение (31) между константами A_l^m и M_l^m, можно записать решения для давления и поля скоростей во вращающейся заряженной осциллирующей капле в окончательном виде:

$$p(\mathbf{r},t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\Bigg\{\bigg[\frac{1}{l}\omega_l^2 + e^2\big(l^2+3l^2+8 - 4W(l^2-2l+3)\big) - \Omega^2\frac{2}{3}(1-\gamma_l^m)\bigg]r^l Y_l^m(\vartheta,\varphi)$$
$$+ \Big[e^2\omega_l^2\beta_l^{(2)} - 4\Omega^2(2l+1)(1-r^2)\Big]\frac{\alpha_{l-1}^m}{2l}r^{l-2}Y_{l-2}^m(\vartheta,\varphi)$$
$$+ e^2\omega_l^2\frac{l+1}{l+2}\frac{\alpha_{l+1}^m}{2}r^{l+2}Y_{l+2}^m(\vartheta,\varphi)\Bigg\}M_l^m\exp(s^{(\pm)}t);$$

$$u_r(\mathbf{r},t) = \pm i\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\omega_l\Bigg\{\bigg[1+\frac{e^2}{2\omega_l^2}(\beta_l^{(3)}-4W\beta_l^{(4)}) \times \frac{\gamma_l^m}{3} - \frac{\Omega^2}{2\omega_l^2}\chi_l^m \pm \frac{m\Omega}{l\omega}\bigg]r^{l-1}Y_l^m(\vartheta,\varphi) + \bigg(e^2\beta_l^{(2)}$$
$$- 4\frac{\Omega^2}{\omega_l^2}(2l+1)(1-r^2)\bigg)\frac{(l-2)\alpha_{l-1}^m}{2l}r^{l-3}Y_{l-2}^m(\vartheta,\varphi)$$
$$+ e^2(l+1)\frac{\alpha_{l+1}^m}{2}r^{l+1}Y_{l+2}^m(\vartheta,\varphi)\Bigg\}M_l^m\exp(s^{(\pm)}t);$$

$$u_\vartheta(\mathbf{r},t) = \pm i\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{\omega_l}{l}\Bigg\{\Bigg[\bigg(1+\frac{e^2}{2\omega_l^2}(\beta_l^{(3)}-4W\beta_l^{(4)}) \times \frac{\gamma_l^m}{3} - \frac{\Omega^2}{2\omega_l^2}\chi_l^m \pm \frac{m\Omega}{l\omega}\bigg)\partial_\vartheta Y_l^m(\vartheta,\varphi) - \bigg(4\frac{\Omega^2}{\omega_l^2}(l-1)\beta_{l,m}^{(1)}$$
$$\pm 2\frac{m\Omega}{l\omega}\bigg)\big(\partial_\vartheta Y_l^m(\vartheta,\varphi) - \mathrm{ctg}(\vartheta)lY_l^m(\vartheta,\varphi)\big)\Bigg]r^{l-1}$$
$$+ \bigg[e^2\beta_l^{(2)}\partial_\vartheta Y_{l-2}^m(\vartheta,\varphi) - 4\frac{\Omega^2}{\omega_l^2}(2l+1) \times \Big((1-r^2)\partial_\vartheta Y_{l-2}^m(\vartheta,\varphi) + 2r^2\,\mathrm{ctg}(\vartheta)Y_{l-2}^m(\vartheta,\varphi)\Big)\bigg]$$
$$\times \frac{\alpha_{l-1}^m}{2}r^{l-3} + e^2\frac{l(l+1)}{2(l+2)}\alpha_{l+1}^m r^{l+1}\partial_\vartheta Y_{l+2}^m(\vartheta,\varphi)\Bigg\}$$
$$\times M_l^m\exp(s^{(\pm)}t);$$

$$u_\varphi(\mathbf{r},t) = \mp\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\frac{m\omega_l}{l}\Bigg\{\bigg[1+\frac{e^2}{2\omega_l^2}(\beta_l^{(3)} - 4W\beta_l^{(4)})\frac{\gamma_l^m}{3} - \frac{\Omega^2}{2\omega_l^2}(\chi_l^m - 8\beta_{l,m}^{(1)}) \pm \frac{m\Omega}{l\omega_l}$$
$$\times\bigg(1+2\frac{l^2}{m^2}(l-1)\beta_{l,m}^{(1)}\bigg)\bigg]r^{l-1}\frac{1}{\sin\vartheta}Y_l^m(\vartheta,\varphi)$$
$$+ \bigg[e^2\beta_l^{(2)} \mp 4\frac{\Omega}{\omega_l}\frac{2l+1}{m}r^2 - 4\frac{\Omega^2}{\omega_l^2}(2l+1)(1-r^2)\bigg]$$
$$\times\frac{\alpha_{l-1}^m}{2}r^{l-3}\frac{1}{\sin\vartheta}Y_{l-2}^m(\vartheta,\varphi) + e^2\frac{l(l+1)}{l+2}\frac{\alpha_{l+1}^m}{2}r^{l+1}$$
$$\times\frac{1}{\sin\vartheta}Y_{l+2}^m(\vartheta,\varphi)\Bigg\}M_l^m\exp(s^{(\pm)}t); \qquad (36)$$

$$\beta_l^{(3)} \equiv 2l^4+3l^3-6l^2+7l+6;\quad \beta_l^{(4)} \equiv 2l^3-4l^2+3.$$

Следует отметить, что общие решения для искомых функций $\xi(\vartheta,\varphi,t)$, $p(\mathbf{r},t)$, $u_r(\mathbf{r},t)$, $u_\vartheta(\mathbf{r},t)$, $u_\varphi(\mathbf{r},t)$ должны быть записаны в виде суперпозиции частных решений, соответствующих каждому корню дисперсионного уравнения. Например, для функции $\xi(\vartheta,\varphi,t)$, описывающей деформацию равновесной поверхности, будем иметь:

$$\xi(\vartheta,\varphi,t) = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\big(M_{l,m}^{(+)}\exp(s_{l,m}^{(+)}t) + M_{l,m}^{(-)}\exp(s_{l,m}^{(-)}t)\big)Y_l^m(\vartheta,\varphi).$$

Причем константы $M_{l,m}^{(\pm)}$ могут быть определены только при задании начальных условий.

Рассмотрим для иллюстрации ситуацию, когда в начальный момент времени заданы следующие условия:

$$t=0:\qquad \xi(\vartheta,\varphi,0) = Y_n^k(\vartheta,\varphi);\quad \partial_t\xi(\vartheta,\varphi,0) = 0.$$

Подставив в эти условия записанное выше общее решение $\xi(\vartheta,\varphi,t)$ и учитывая ортогональность сферических функций, получим систему уравнений, определяющих неизвестные константы $M_{l,m}^{(\pm)}$:

$$M_{n,k}^{(+)} + M_{n,k}^{(-)} = 1;\qquad M_{n,k}^{(+)}s_{n,k}^{(+)} + M_{n,k}^{(-)}s_{n,k}^{(-)} = 0;$$
$$M_{l,m}^{(\pm)} = 0,\qquad (\forall l\neq n,\quad \forall m\neq k).$$

Решение этой системы, а также выражение (35) для частот $s_{n,k}^{(\pm)}$ позволяют записать функцию, описывающую эволюцию начального возмущения со временем в виде:

$$\xi(\vartheta,\varphi,t) = \bigg(\cos(G_n^k\omega_n t)\cos\Big(\frac{k}{n}\Omega t\Big) + \frac{k\Omega}{n\omega_n}\sin(G_n^k\omega_n t)\sin\Big(\frac{k}{n}\Omega t\Big)\bigg)Y_n^k(\vartheta,\varphi);$$

$$G_n^k \equiv 1 + \frac{e^2}{2\omega_n^2}\big(\eta_n - 4W(5n-3)\big)\frac{\gamma_n^k}{3} - \frac{\Omega^2}{2\omega_n^2}\chi_n^k. \qquad (37)$$

Аналогичным образом строятся решения для всех искомых параметров: поля скоростей, давления и электрического потенциала.

Итак, в использованном линейном по малым параметрам приближении форма вращающейся осциллирующей капли определяется выражениями (1), (2), (7), распределение давления и поля скоростей внутри жидкости — (8), (9), (36), а электростатического потенциала вокруг капли — выражениями (8), (9), (17), (18). Дисперсионное уравнение задачи имеет вид (34) с решениями (35).

Анализ результатов

Из дисперсионного уравнения следует, что проверхность осциллирующей капли устойчива, когда частота s является чисто мнимой величиной. Такая ситуация реализуется, если дискриминант уравнения (34) отрицателен. При положительном дискриминанте уравнение (34) имеет два комплексных корня с положительной и отрицательной вещественной частью. Комплексная частота s с положительной вещественной частью ответственна за неустойчивость поверхности, так как она приводит к экспоненциальному нарастанию амплитуды начальной деформации со временем и к распаду поверхности капли. Таким образом, критическим для начала неустойчивости является условие обращения в нуль дискриминанта уравнения (34). Это условие позволяет определить связь между критическими значениями заряда капли (параметра Рэлея W) и угловой скорости ее вращения. Поверхность капли неустойчива, если выполняется соотношение

$$4(1-W)(\omega_l^2 - \Omega^2\chi_l^m) + \Omega^2\big(\eta_l - 4W(5l-3)\big)\frac{\gamma_l^m}{3} \le 0. \qquad (38)$$

Причем из дисперсионного уравнения (34) видно, что закономерности реализации неустойчивости осесимметричных и неосесимметричных мод осцилляций различается качественно: для осенесимметричных мод $(m > 0)$ неустойчивость имеет колебательный вид, а для осесимметричных — апериодический.

На рис. 1 представлены рассчитанные по выражению (38) критические для реализации неустойчивости поверхности вращающейся заряженной капли кривые для некоторых мод колебаний поверхности: $l = 2; 3; 10$. Области неустойчивости лежат в координатной плоскости (W, Ω^2) выше изображенных кривых. Из представленных графиков видно, что вращение капли снижает критическую для реализации неустойчивости величину заряда асимметричных мод осцилляций с высокими значениями азимутальных чисел: $m \sim l$, что согласуется с данными экспериментальных наблюдений [18]. Колебания с низкими азимутальными числами $m \ll l$ сохраняют устойчивость во всем диапазоне допустимых значений параметров: $W \le 1$, $\Omega^2 < 1$. Так, для $l = 2$

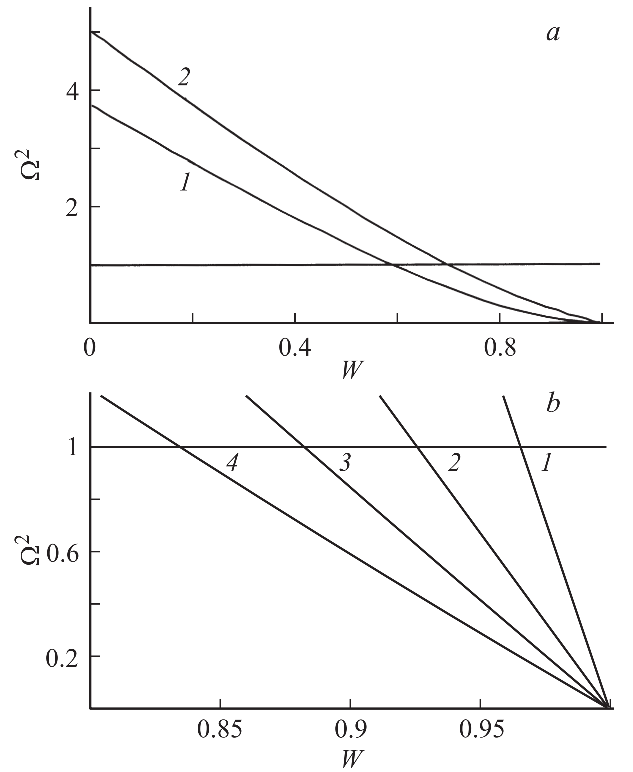

Рис. 1. Зависимость критических для развития неустойчивости поверхности вращающейся капли значений параметра Рэлея W и квадрата угловой скорости Ω^2 для различных мод осцилляций: a — кривая *1* соответствует $l = 2$, $m = 2$; *2* — $l = 3$, $m = 3$; b — $l = 10$; кривая *1* — $m = 7$; *2* — 8; *3* — 9; *4* — 10.

(см. рис. 1, a) при достаточно больших значениях заряда $(W \ge 0.6)$, неустойчивость может претерпеть только асимметричная мода с азимутальным числом $m = 2$, а осцилляции с $m \le 1$ устойчивы при любых допустимых значениях заряда и скорости вращения. Впрочем, этот результат не является неожиданным, поскольку ранее в теоретических исследованиях устойчивости сильно заряженной капли, имеющей форму сплюснутого вдоль оси симметрии сфероида [19–21], было показано, что осесимметричная мода с $m = 0$ устойчива, а с ростом величины заряда неустойчивость реализуется через деформацию сплюснуто-сфероидальной капли к форме трехосного эллипсоида.

Для $l = 3$ (см. рис. 1, a) неустойчивой может стать только неосесимметричная с $m = 3$ при величине заряда капли, удовлетворяющей условию: $W \ge 0.7$. Для $l = 10$ (см. рис. 1, b) возможна неустойчивость лишь неосесимметричных мод с $m \ge 7$ и значениях параметра W, близкими к единице, а осцилляции с $m \le 6$ устойчивы при любых допустимых значениях заряда и скорости вращения. На графиках тонкими горизонтальными линиями нанесено предельно допустимое в проведенном асимптотическом анализе значение квадрата скорости вращения $\Omega^2 = 1$. Отметим, что в принятых безразмерных переменных характерный масштаб измерения угловой скорости вращения для капли воды миллиметрового радиуса составляет ≈ 270 rad/s, что соответствует ≈ 40 оборотам в секунду.

На рис. 2 приведены зависимости частот осцилляций, рассчитанных по (35) от величины параметра W для различных значений квадрата углвой скорости вращения. Длина каждой линии определяется критическим для данной скорости вращения значением параметра W, выше которого капля претерпевает неустойчивость: более короткие кривые соответствуют большим скоростям вращения $\Omega^2 = 0; 0.1; 0.5; 0.9$. Кривые верхней полуплоскости соответствуют первому корню дисперсионного уравнения (имеющему в (35) знак „плюс“), в нижней — второму корную (со знаком „минус“). Влияние угловой скорости вращения на частоту нижних мод капиллярных осцилляций капли неоднозначно (см., например, рис. 2, a): для первого корня оно различно при разных значениях W: при $W \sim 0$ рост Ω приводит к увеличению частоты, при $W \sim 1$ наоборот. Для высоких мод осцилляций (рис. 2, b) увеличение угловой скорости вращения приводит к снижению частот колебаний во всем диапазоне изменения заряда капли.

На рис. 3 изображены аналогичные зависимости частот осцилляций от скорости вращения для различных значений параметра W: более короткие линии соответствуют большим значениям $W = 0; 0.5; 0.9; 0.99$. Влияние угловой скорости вращения капли на частоту колебаний наиболее существенно при больших значениях параметра W и приводит к ее снижению.

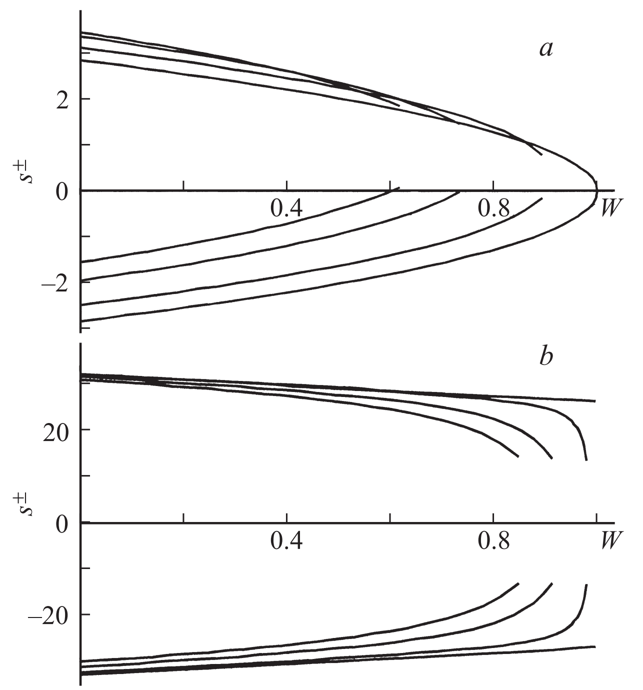

Рис. 2. Зависимости частот осцилляций от параметра W для различных значений квадрата скорости вращения: более короткие линии соответствуют бóльшим скоростям вращения $\Omega^2 = 0; 0.1; 0.5; 0.9$. Кривые, лежащие в верхней полуплоскости, соответствуют первому корню дисперсионного уравнения (имеющему знак „+“), в нижнй — второму корню (со знаком „−“): a — $l = 2$, $m = 2$; $б$ — $l = 10$, $m = 10$.

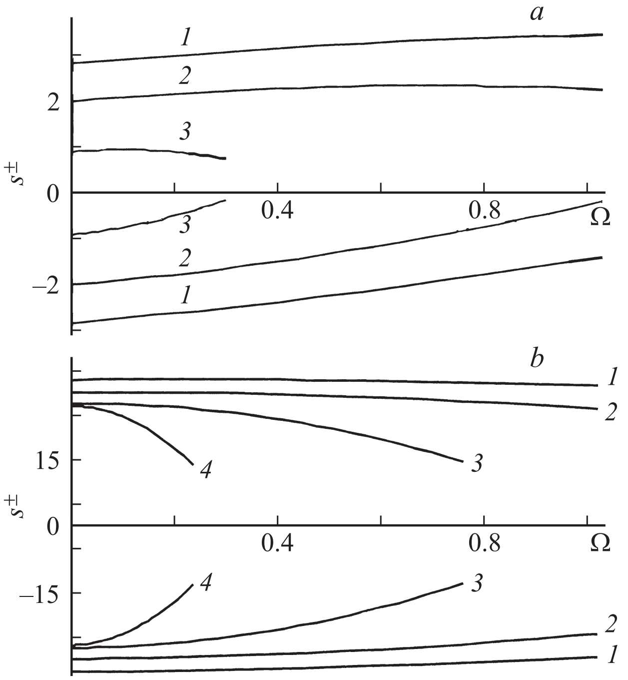

Рис. 3. Зависимости частот осцилляций капли от скорости вращения для различных значений параметра W. Кривые в верхней полуплоскости соответствуют первому корню дисперсионного уравнения (знак „+“), в нижней — второму корню (со знаком „−“). a — $l = 2$, $m = 2$; кривые *1* соответствуют $W = 0$; *2* — 0.5; *3* — 0.9. b — $l = 10$, $m = 10$. Обозначения те же, что и на рис. 3, a. Кривая *4* — $W = 0.99$.

Интересно, что условия реализации неустойчивости одинаковы для обоих корней уравнения (34) и соответствуют обращению в нуль дискриминанта.

Влияние силы Кориолиса

Отдельного рассмотрения в исследовании устойчивости заряженной вращающейся капли заслуживает роль силы Кориолиса, не являющейся потенциальной, учет которой существенно усложняет решение.

Анализ влияния силы Кориолиса начнем с дисперсионного уравнения (34). В случае пренебрежения силой Кориолиса в нем исчезнет слагаемое, линейное по скорости вращения Ω, и изменится коэффициент при Ω^2:

$$s^2 + \omega_l^2 + e^2\big(\eta_l - 4W(5l-3)\big)\frac{\gamma_l^m}{3} - \Omega^2\chi_{l,m}^{(1)} = 0.$$

Решения такого уравнения являются мнимыми в области устойчивости и вещественными в области неустойчивости. Последнее говорит о том, что возникающая неустойчивость поверхности вращающейся капли является апериодической для любых мод, как и в отсутствие вращения капли [22,23]. Это противоречит результатам, полученным в приведенном выше рассмотрении при корректном учете силы Кориолиса. Решения уравнения (34)

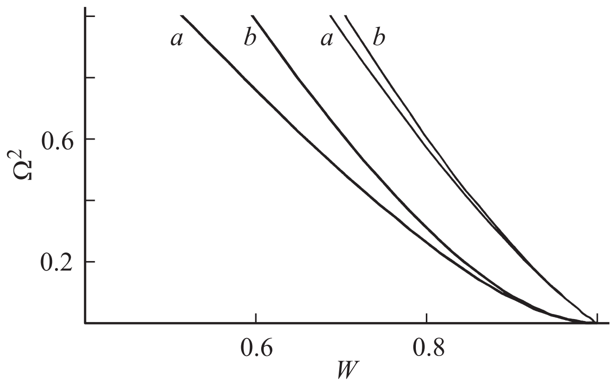

Рис. 4. Сравнение критических кривых, полученных с учетом (a) и без учета (b) силы Кориолиса. Жирные линии соответствуют $l = 2$, $m = 2$, тонкие — $l = 3$, $m = 3$.

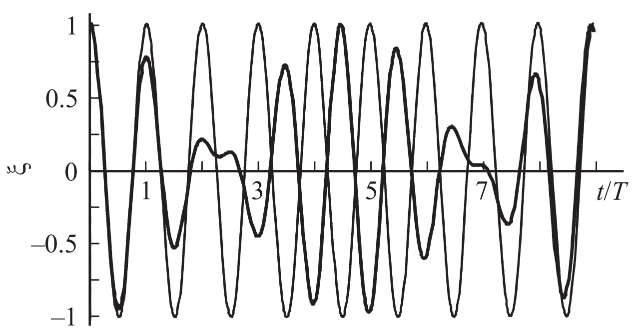

Рис. 5. Зависимости, определяющие эволюцию во времени деформации поверхности осциллирующей капли при $l = 3$; $m = 3$; $W = 0.1$; $\Omega^2 = 0.3$. Жирная линия соответствует зависимости, рассчитанной с учетом силы Кориолиса, тонкая — без учета.

в области неустойчивости комплексные и имеют для асимметричных мод отличную от нуля мнимую часть, наличием которой обусловлено действием силы Кориолиса. Таким образом, реальная неустойчивость поверхности вращающейся капли является колебательной.

Пренебрежение силой Кориолиса повлияет и на вид критической зависимости (38): величина χ_l^m изменится на $\chi_{l,m}^{(1)}$. Для сравнения на рис. 4 приведены кривые, связывающие критические значения параметров Ω^2 и W, для двух различных мод осцилляций поверхности. Индексом a помечены кривые, рассчитанные без учета силы Кориолиса, индексом b — с учетом последней. Из приведенных графиков видно, что сила Кориолиса повышает устойчивость вращающейся капли, а сам эффект более существен для низких мод осцилляций.

В выражении (37), описывающем деформацию поверхности осциллирующей капли, пренебрежение силой Кориолиса приведет к следующим изменениям: во-первых, исчезнет линейное по Ω слагаемое; во-вторых, косинус, содержащий Ω в качестве аргумента обратится в единицу; в-третьих, в величине χ_l^m исчезнет вторая составляющая $\chi_{l,m}^{(2)}$. Эволюция во времени поверхности капли определится чисто гармонической функцией:

$$\xi(\vartheta,\varphi,t) = \cos\left(\left(\left(1+\frac{e^2}{2\omega_n^2}\big(\eta_n - 4W(5n-3)\big)\right)\frac{\gamma_n^k}{3} - \frac{\Omega^2}{2\omega_n^2}\chi_{l,m}^{(1)}\right)\omega_n t\right) Y_n^k(\vartheta,\varphi).$$

На рис. 5 изображены зависимости, определяющие эволюцию во времени деформации поверхности осциллирующей капли, рассчитанные с учетом и без учета силы Кориолиса. Видно, что сила Кориолиса оказывает существенное влияние на данную зависимость, приводя к появлению биений, характерных для сложения двух гармонических колебаний. Увеличение заряда капли приводит к сглаживанию амплитуды биений, а увеличение скорости вращения — к существенному уменьшению периода биений.

Выводы

Вращение капли может стать причиной неустойчивости ее поверхности при зарядах, докритических ($W < 1$) для сферической капли в отсутствие вращения. Увеличение скорости вращения приводит к возбуждению неустойчивости колебательных мод с высокими значениями азимутального числа m. В результате на поверхности слабо сплюснутой сфероидальной капли в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, формируется $m \sim l$ эмиссионных выступов [18], с вершин которых может иметь место сброс заряда.

Влияние силы Кориолиса повышает устойчивость поверхности осциллирующей капли и существенно сказывается на характере временной эволюции ее деформации.

Работа выполнена в рамках тематического плана НИР вуза 2008 г. и при поддержке гранта РФФИ № 06-01-00066-а.

Список литературы

[1] *Беляев С.Т., Зелевинский В.Г.* // УФН. 1985. Т. 147. № 2. С. 210–251.
[2] *Григорьев А.И., Синкевич О.А.* // ЖТФ. 1986. Т. 56. Вып. 10. С. 1985–1987.
[3] *Grigor'ev A.I., Shiryaeva S.O.* // Physica Scripta. 1996. Vol. 54. P. 660–666.
[4] *Trinch E., Wang T.G.* // J. Fluid Mech. 1982. Vol. 122. P. 315–338.
[5] *Jakobi N., Croonquist A.P., Elleman D.D., Wang T.G.* // Proc. 2nd Int. Colloq. on Drop and Bubbles. Pasadena, 1982. JPL Publication. N 82–7. P. 31.
[6] *Hisao Azuma, Shoichi Yoshihara* // J. Fluid Mech. 1999. Vol. 393. P. 309–332.
[7] *Won-Kyu Rhim, Takehiko Ishikawa* // Rev. Sci. Instr. 2001. Vol. 72. N 9. P. 3572–3575.
[8] *Taric Al-Hassan, Mumfors C.J., Jeffreys G.V.* // Chem. Ing. & Techn. 2004. Vol. 14. N 1. P. 65–72.

[9] *Saghal S.S., Rednikov A., Ohsaka K.* // Ann. NY Acad. Sci. 2004. N 1027. P. 447–463.
[10] *Chandrasekhar S.* // Proc. Roy. Soc. London. Series A: Math. Phys. Sci. 1965. Vol. 286. N 1404. P.1–26.
[11] *Sozou C.* // J. Fluid Mech. 1972. Vol. 56. P. 305–312.
[12] *Rosenkilde C.E., Randall R.R.* // Acta Mechanica. 1974. Vol. 20. P. 167–186.
[13] *Радякин Н.К.* // МЖГ. 1979. № 4. С. 78–87.
[14] *Архипов В.А., Бушланов В.П.* и др. // МЖГ. 1982. № 4. С. 13–20.
[15] *Athanassenas M.* // Annali delta Scuola Normale Superiore de Piza. 1998. Vol. 26. N 4. P. 749–762.
[16] *Brown R.A., Scriven L.E.* // Proc. R. Soc. London. 1980. Vol. A371. P. 331–357.
[17] *Kudbitschek J.P., Weidman P.D.* // J. Fluid Mech. 2007. Vol. 572. P. 261–286.
[18] *Melo F., Joanny J.F., Fauve S.* // Phys. Rev. Lett. 1989. Vol. 63. N 18. P. 1958–1962.
[19] *Basaran O.A., Scriven L.E.* // Phys. Fluids A. 1989. Vol. 1. N 5. P. 795–798.
[20] *Григорьев А.И., Ширяева С.О.* // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 7. С. 10–14.
[21] *Щукин С.И., Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1999. Т. 68. Вып. 11. С. 48–51.
[22] *Rayleigh Lord (J.V. Strutt)* // Phil. Mag. 1882. Vol. 14. P. 184–186.
[23] *Григорьев А.И.* // ЖТФ. 1985. Т. 55. Вып. 7. С. 1272–1278.