

01;04

## Нелокальные явления в положительном столбе тлеющего разряда в молекулярных газах

© Е.А. Богданов, А.А. Кудрявцев

Санкт-Петербургский государственный университет,  
198504 Санкт-Петербург, Россия  
e-mail: aku@ak2138.spb.edu

(Поступило в Редакцию 25 апреля 2008 г.)

Исследовано влияние нелокальности функции распределения электронов по энергиям на характеристики положительного столба разряда в молекулярных газах при среднем давлении  $1 \leq pR \leq 10$  смТорр. В этих условиях длина энергетической релаксации электронов мала по сравнению с характерными размерами плазменной области, т.е. по общепринятым критериям для расчета можно использовать локальное приближение. Показано, что для быстрых электронов на периферии разряда, где амбиполярное поле превышает продольное, использование локального приближения может приводить к существенным ошибкам при определении основных параметров положительного столба разряда. Обнаружено, что нелокальность функции распределения электронов приводит к увеличению констант возбуждения от центра к периферии разряда.

PACS: 52.80.-s

Для нахождения функции распределения электронов (ФРЭ) при моделировании газоразрядной плазмы обычно используется локальное приближение. Это означает, что при решении кинетического уравнения в нем отбрасываются члены с пространственными производными и радиальным полем, а ФРЭ факторизуется в виде произведения

$$f_0(w, r) = n_e(r) f_0^0(w, E/p). \quad (1)$$

В этом приближении распределение электронов по кинетической энергии  $w$  в данной точке пространства  $r$  зависит от локальных значений приведенного продольного поля  $E/p$  и других параметров (температуры газа, концентрации возбужденных частиц и т.п.). Соответственно и пространственное распределение констант скоростей процессов возбуждения и ионизации определяется профилем  $n_e(r)$ . Эти процессы определяют основные оптические и электрокинетические свойства плазмы. Поскольку газовые разряды поддерживаются ионизацией электронным ударом, то для их существования необходимо наличие электронов с энергией, превышающей энергию ионизации  $\varepsilon_i$ . Его значение изменяется от 3.9 eV для цезия до 24.6 eV — для гелия. Так как гибель заряженных частиц происходит сравнительно медленно, то доля таких электронов мала — ионизация обусловлена электронами быстрой части РФЭ. Энергия возбуждения электронных состояний обычно порядка  $\varepsilon_i$ , так что за возбуждение и диссоциацию также ответственны электроны хвоста ФРЭ.

Привлекательность и широкое распространение локального приближения во многом связаны со значительным упрощением вычислительной процедуры при решении кинетического уравнения Больцмана, которое в этом случае зависит только от одной переменной — от энергии (скорости).

В тех случаях, когда в кинетическом уравнении нельзя пренебречь членами с пространственными градиентами, соответствующую ФРЭ называют нелокальной (см., например, [1,2]), поскольку она определяется значениями физических характеристик (в первую очередь, напряженностей полей) не в данной точке, а в области, определяемой длиной энергетической релаксации  $\lambda_\varepsilon \gg \lambda$  — длины свободного пробега электрона. В функции от полной энергии

$$\varepsilon = w + e\varphi(r) = mV^2/2 + e\varphi(r) \quad (2)$$

(кинетической плюс потенциальной), которая сохраняется на масштабах  $\sim \lambda_\varepsilon$ , такая нелокальная ФРЭ может как зависеть от радиуса, так и не зависеть. В любом случае нелокальная ФРЭ не факторизуется в виде произведения типа (1), для ее нахождения необходимо знать пространственный профиль потенциала  $\varphi(r)$  и решать кинетическое уравнение, зависящее уже не только от энергии, но и от пространственных переменных (подробнее см., например, [1,2]).

Критерии применимости локального приближения обычно получают стандартным образом из условия малости в кинетическом уравнении членов с производными по координате по сравнению с членами с производными по энергии. Это дает оценку  $R \gg \lambda_\varepsilon$  [1,2], т.е. характерная диффузионная длина  $R$  плазменного объема должна превышать длину релаксации электронов по энергии  $\lambda_\varepsilon$ . При  $\lambda_\varepsilon > R$ , как неоднократно было продемонстрировано во многих исследованиях (например, [1–6]), использование результатов расчетов ФРЭ в локальном приближении физически не обосновано и может приводить к грубым ошибкам. В свою очередь, выполнение условия  $R > \lambda_\varepsilon$  служит основанием для широкого использования локального приближения (1) в практических расчетах.

Для оценки  $\lambda_\varepsilon$  можно использовать выражение

$$\lambda_\varepsilon = \sqrt{2D_r\tau_\varepsilon}, \quad (3)$$

где  $D_r = V\lambda/3$  — коэффициент свободной диффузии электронов; время энергетической релаксации

$$\tau_\varepsilon^{-1} = \nu^* + \delta\nu \quad (4)$$

определяется потерями энергии при неупругих и упругих столкновениях (соответствующие частоты  $\nu^*$  и  $\nu$ ). Как время  $\tau_\varepsilon$ , так и длина  $\lambda_\varepsilon$  зависят от энергии электрона.

При неупругих столкновениях, сопровождаемых возбуждением уровня с номером  $k$  электрон теряет значительную часть своей энергии, равную порогу возбуждения  $\varepsilon_k$ , и релаксирует на одном столкновении. При упругом (квазиупругом) рассеянии релаксация по энергии происходит лишь за много столкновений, поэтому в выражение (4) входит соответствующий фактор энергообмена  $\delta$ . При упругом рассеянии электронов этот фактор составляет

$$\delta = 2m/M < 10^{-4}.$$

В атомарных газах, для которых в кинетическом уравнении Больцмана все основные процессы формирования ФРЭ однозначно разделяются на упругие и неупругие столкновения, выполняется неравенство  $\nu^* \gg \delta\nu$ . Поэтому значения длины энергетической релаксации в упругой (где нет неупругих столкновений) и неупругой областях энергий различаются здесь очень сильно.

Так, в упругой области энергий  $\varepsilon < \varepsilon_1$  ( $\varepsilon_1$  — первый порог неупругих процессов) длина

$$\lambda_\varepsilon \simeq \sqrt{D_r/(\delta\nu)} \simeq \lambda/\sqrt{\delta} > 100\lambda \quad (5)$$

значительна — более чем на два порядка превышает длину свободного пробега электрона.

В неупругой области  $\varepsilon > \varepsilon_1$ , определяющей процессы возбуждения и ионизации, уже претерпев одно неупругое столкновение, электрон за характерное время  $\sim 1/\nu^*$  теряет значительную часть своей энергии, так что при этом он успевает сместиться лишь на сравнительно малое по сравнению с (5) расстояние

$$\lambda_\varepsilon^* \simeq \sqrt{D_r/\nu^*} \simeq \sqrt{\lambda\lambda^*} < (3-10)\lambda. \quad (6)$$

Здесь  $\lambda^* = 1/(N\sigma^*)$  — длина пробега электронов относительно неупругих процессов. В зависимости от соотношения между сечениями упругих и неупругих процессов ( $\sigma/\sigma^* \simeq 10-100$ ), длина  $\lambda_\varepsilon^*$  составляет величину порядка нескольких длин свободного пробега электрона.

Факт сильного различия длины энергетической релаксации в упругой (5) и неупругой (6) областях энергий является принципиальным для атомарных газов, поскольку у них имеется протяженная упругая область энергий, т.е. область энергий, в которой отсутствуют

неупругие столкновения. Для большинства атомарных газов энергетический зазор  $\varepsilon_1$  значителен и близок к потенциалу ионизации (например, в инертных газах  $\varepsilon_1$  изменяется от 8.3 в Хе до 19.8 eV в Не). Поэтому существует большой диапазон давлений, когда при выполнении неравенства  $R > \lambda_\varepsilon^*$  в упругой области энергий сохраняется условие  $\lambda_\varepsilon > R$ . В этом случае, когда к нелокальному „телу“ ФРЭ ( $\varepsilon < \varepsilon_1$ ) „пришивается“ локальный „хвостик“ при  $\varepsilon > \varepsilon_1$ , использовать локальное приближение (1) для расчета ФРЭ нельзя как упругой ( $\varepsilon < \varepsilon_1$ ), так и в неупругой ( $\varepsilon > \varepsilon_1$ ) областях энергий [6]. В [6–9] было установлено, что в атомарных газах локальное приближение для ФРЭ неприменимо до сравнительно высоких значениях давления  $pR \leq 10 \text{ см} \cdot \text{Торр}$ , т.е. практически для всех реально используемых на практике условий диффузного режима гибели заряженных частиц. При этом оказалось, что при повышении давления переход к локальному случаю не осуществляется плавно от узких профилей констант возбуждения в случае „полной“ нелокальности, когда и  $\lambda_\varepsilon^* > R$ , к плоским профилям при выполнении  $R > \lambda_\varepsilon$ . Исследования [6–9] показали, что специфическим проявлением нелокальных свойств ФРЭ в атомарных газах при повышении давления газа является смещение максимума скорости возбуждения от центра к периферии разрядного объема. Поскольку свой уход на стенки электроны „чувствуют“ с расстояния  $\sim \lambda_\varepsilon$  от границ плазменного объема, то даже при высоких давлениях (вплоть до  $pR < 100 \text{ см} \cdot \text{Торр}$ ) вблизи стенок могут наблюдаться аномальные распределения профилей возбуждения в виде пристеночного пика-сателлита [7,8].

В отличие от атомарных в молекулярных газах могут возбуждаться также вращательные и колебательные состояния. При возбуждении вращательных уровней фактор энергообмена  $\delta_r = 8B/T \ll 1$  также мал и их можно считать квазиупругими ( $B$  — вращательная постоянная,  $T$  — температура газа). При возбуждении колебательных уровней соответствующий фактор энергообмена  $\delta_v \approx n\varepsilon_v/\varepsilon$  нельзя считать малым, поскольку электрон теряет заметную долю своей энергии  $\varepsilon$ . (Здесь  $\varepsilon_v$  — колебательный квант, составляющий величину, равную десятым долям электрон-вольт, например, для азота  $\varepsilon_v \approx 0.3 \text{ eV}$ , а  $n$  — номер уровня). Строго говоря, по своему проявлению в кинетическом уравнении Больцмана для электронов эти процессы являются промежуточными (между неупругими и квазиупругими), так что анализ формирования ФРЭ в области колебательного возбуждения требует специального рассмотрения, которое будет выполнено нами в отдельном сообщении.

Для целей настоящего рассмотрения принципиальным является следующее важное обстоятельство. Даже для наиболее сильного механизма колебательного возбуждения (через образование нестабильного отрицательного иона), величина эффективного порога  $\varepsilon_1^v$ , хотя и превышает энергию колебательного кванта  $\varepsilon_v$ , однако составляет лишь от одного до двух электрон-вольт (например, в азоте  $\varepsilon_v \approx 0.3$ ,  $\varepsilon_1^v \approx 1.7 \text{ eV}$ ). При этом суммарные сечения колебательного возбуждения велики

и сопоставимы с сечениями упругого рассеяния [10]. Поэтому в области энергий колебательного возбуждения оценка длины (6) по порядку величины соответствует длине свободного пробега электронов, так что критерием применимости локального приближения здесь будет являться условие  $R > \lambda_e^* \approx \lambda$ . Другими словами, в молекулярных газах из условия применимости диффузионного приближения  $R > \lambda$  следует, что  $R > \lambda_e^*$ , и для нахождения ФРЭ можно использовать локальное приближение.

Перечисленные обстоятельства привели к формированию в литературе вполне устойчивой точки зрения о том, что начиная уже с достаточно низких давлений (как только  $R > \lambda_e^* \approx \lambda$ ), ФРЭ (и константы соответствующих скоростей процессов возбуждения и ионизации) в молекулярных газах можно рассчитывать в локальном приближении (1).

Тем не менее выполненные в данной работе полномасштабные симуляции положительного столба тлеющего разряда в молекулярных газах ( $O_2$ ,  $N_2$ ) в широком диапазоне давлений показали, что это не так. На периферии разряда, где амбиполярное поле превышает продольное, даже при выполнении условия  $R \gg \lambda_e^*$  профили констант возбуждения различных колебательных и электронных состояний определяются не только величиной продольного, но и амбиполярного поля и могут возрастать от центра к периферии. Пространственные распределения скорости возбуждения шире профилей концентрации электронов и могут иметь немонотонные зависимости с максимумом не в центре трубки, где концентрация электронов максимальна, а на ее периферии. Причем чем выше уровень (чем больше энергетический зазор, который необходимо преодолеть электрону для совершения неупругого процесса), тем больше влияние поперечной диффузии и радиального поля, т. е. нелокальные эффекты в формировании ФРЭ проявляются все более отчетливо.

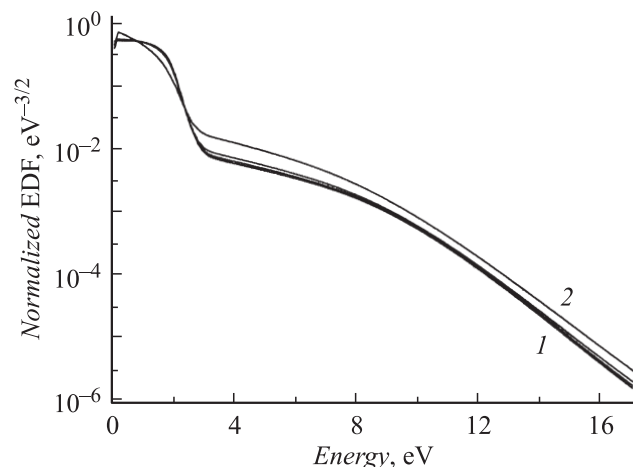
В качестве объекта исследований был выбран положительный столб разряда в наиболее распространенных молекулярных атмосферных газах — кислороде (исследовавшемся нами ранее в [11,12]) и азоте. Для сравнения проводилось также сопоставление с рассмотренным ранее случаем разряда в аргоне (см. [6–9]). Особенностью молекул азота являются большие значения сечений колебательного возбуждения, которые сопоставимы по величине с сечением упругого рассеяния (см., например, [10]). Спецификой плазмы кислорода является наличие отрицательных ионов, что приводит к ее расслоению на две области и формированию профилей концентраций и радиальных полей, качественно отличных от случая электроположительных газов (подробнее см. [11,12]).

Симуляции параметров положительного столба проводилась по методикам, использованным нами ранее в [6–12]. Подробная формулировка модели плазмы разряда и описание итерационной численной схемы и методов решения системы уравнений даны в [6–12]. Самосогласованное электрическое поле во всем объеме находилось из уравнения Пуассона. Описание тяжелых частиц

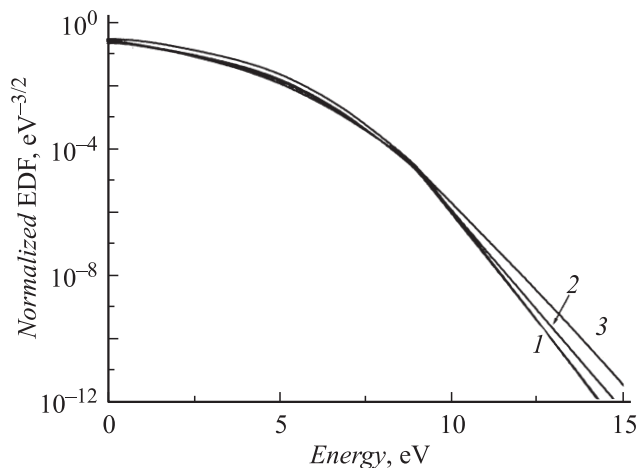
проводилось в диффузионно-дрейфовом приближении в рамках гидродинамической модели (fluid model). Для нахождения нелокальной ФРЭ решалось кинетическое уравнение в однородном продольном и неоднородном поперечном полях с учетом радиальной неоднородности. Для сравнения была предусмотрена также возможность решения кинетического уравнения в традиционном локальном приближении, когда радиальное поле и поперечная неоднородность в кинетическом уравнении не учитывались.

На первом этапе были проведены самосогласованные симуляции положительного столба в трубке с радиусом  $R = 1–1.6$  см в диапазоне давлений  $p = 0.1–10$  Торр. Для положительного столба разряда в азоте в уравнениях баланса учитывались три сорта частиц: молекулы азота, электроны и ионы  $N_2^+$ . При расчете ФРЭ учитывались возбуждения первых восьми колебательных уровней азота и восемь электронных молекулярных состояний с использованием сечений процессов из [10]. Скорость ионизации задавалась через табличные значения эффективной константы ионизации, представленные в [13,14] в виде ее зависимости от величины приведенного поля  $E_z/N$ . Детальный набор плазмохимических процессов для кислорода был представлен ранее в [11]. Скорость процессов с участием электронов находилась путем сверстки соответствующих сечений с рассчитываемой ФРЭ.

Напомним, что простой и наглядной проверкой применимости локального приближения (1) является совпадение друг с другом нормированных зависимостей  $f_0(w, r)$  от кинетической энергии при различных радиусах  $r$  [1,2]. Для примера на рис. 1 и 2 представлены ФРЭ в азоте и кислороде соответственно в условиях, когда заведомо выполняется условие  $R > \lambda_e^*$ . Можно заметить, что  $f_0(w, r)$  для различных радиусов  $r$  близки друг



**Рис. 1.** Функции распределения электронов (EDF) по кинетическим энергиям в положительном столбе разряда в азоте при давлении  $p = 1$  Торр, радиусе трубки  $R = 1.6$  см и разрядном токе  $I = 31.5$  mA для различных значений радиуса:  $r = 0, 0.7R, 0.8R$  (1) и  $0.9R$  (2). Функции нормированы на концентрацию электронов.



**Рис. 2.** Функции распределения электронов по кинетическим энергиям в положительном столбе разряда в кислороде при давлении  $p = 6$  Торр, радиусе трубки  $R = 1$  см и разрядном токе  $I = 10$  мА для различных значений радиуса:  $r = 0, 0.7R$  (1),  $0.8R$  (2) и  $0.9R$  (3). Функции нормированы на концентрацию электронов.

другу в центральных областях разряда, что свидетельствует о том, что здесь можно использовать локальное приближение. В то же время при больших радиусах они различаются, т.е. на периферии ФРЭ являются нелокальными.

Отличия от локального приближения увеличиваются при возрастании энергии, когда сама ФРЭ быстро падает и ее абсолютное значение мало. Поэтому более заметны отклонения от локального приближения на характеристиках, чувствительных к форме только быстрой части ФРЭ. К таковым относятся константы и скорости процессов с большим энергетическим порогом (возбуждение высоких колебательных уровней, электронных состояний, ионизация, диссоциация и т.п.), которые определяются значениями высокоэнергетической части ФРЭ.

На рис. 3 и 4 представлены профили констант возбуждения с участием быстрых электронов в кислороде и азоте для разрядных условий, представленных на рис. 1,2. Скорости процессов возбуждения электронным ударом с порогом  $\epsilon_k$  определялись путем свертки соответствующих сечений с рассчитываемой ФРЭ

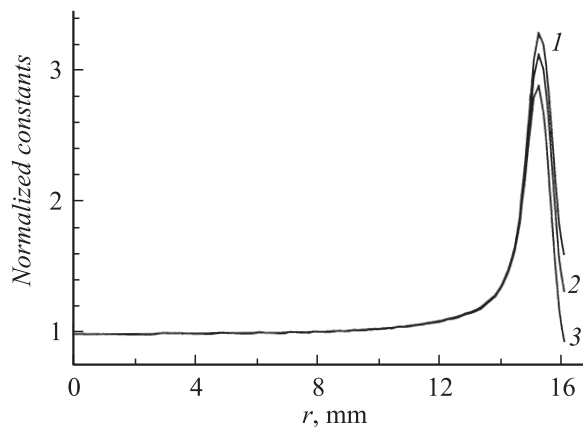
$$W_k(r) = \int_{\epsilon_k}^{\infty} f_0(w, r) v_k(w, r) \sqrt{w} dw, \quad (7a)$$

а константы соответствующих процессов — путем деления  $W_k(r)$  на профиль  $n_e(r)$ :

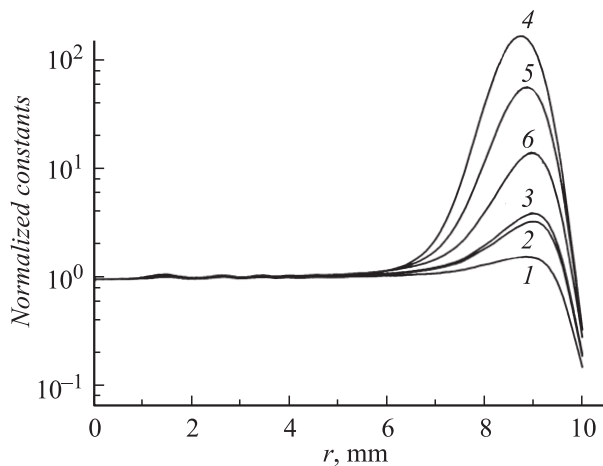
$$k_k(r) = W_k(r)/n_e(r). \quad (7b)$$

Видно, что константы процессов с большим энергетическим порогом не постоянны по сечению трубки, как это должно было бы быть для локальной ФРЭ, а начинают

возрастать с определенного значения радиуса по направлению к периферии. Это свидетельствует о появлении там дополнительного нагрева быстрых электронов, интенсивность которого растет от центра к стенке трубки. Причиной дополнительного нагрева быстрых электронов может явиться только поперечное радиальное поле, которое возникает в неоднородной плазме для обеспечения ее квазинейтральности. Это амбиполярное поле, выравнивающее потоки заряженных частиц в объеме, ускоряет ионы, а электроны задерживает. Поэтому при своем диффузионном движении к стенкам, т.е. против направления самосогласованного поля, электронный газ



**Рис. 3.** Нормированные радиальные профили констант процессов возбуждения уровней  $A^3\Sigma$  ( $v = 0-4$ ) (1),  $B^3\Pi$  (2) и  $A^1\Pi$  (3) молекул азота электронным ударом. Условия разряда те же, что и на рис. 1.



**Рис. 4.** Нормированные радиальные профили констант электронных процессов в кислороде. Условия разряда те же, что и на рис. 2. Кривым 1–6 соответствуют следующие процессы: 1 —  $e + O_2 \rightarrow e + 2O(^1D)$ , порог  $\Delta\epsilon = 9.1$  эВ; 2 —  $e + O_2 \rightarrow e + O + O(^1S)$ , порог  $\Delta\epsilon = 9.4$  эВ; 3 —  $e + O_2 \rightarrow e + O(^1D) + O(^1S)$ , порог  $\Delta\epsilon = 11.37$  эВ; 4 —  $e + O_2 \rightarrow 2e + O + O^+$ , порог  $\Delta\epsilon = 18.84$  эВ; 5 —  $e + O_2 \rightarrow e + 2O + h\nu$  ( $\lambda = 130$  нм), порог  $\Delta\epsilon = 14.71$  эВ; 6 —  $e + O_2 \rightarrow 2e + O_2^+$ , порог  $\Delta\epsilon = 12.14$  эВ.

в целом охлаждается; соответствующая энергия преимущественно идет на нагрев ионов (подробнее см. [15,16]).

В уравнении баланса энергий электронов соответствующий член, называемый диффузионным охлаждением, представляет собой работу амбиполярного поля над диффузионным потоком электронов. В связи с этим возникает вопрос: может ли амбиполярное поле, в целом тормозящее электронный газ, сообщить дополнительную энергию его части? В рамках представлений традиционного локального гидродинамического подхода ответ, конечно, отрицательный, поскольку при этом описании поле охлаждает каждую группу ансамбля электронов одинаковым образом, т.е. никак не может сообщить им дополнительную энергию. В реальной ситуации для ФРЭ, зависящей не только от энергии, но и от координаты, различные группы электронов нельзя принудительно характеризовать пространственными зависимостями типа (1) и общей для всех направленной скорости. Напротив, для нелокальной ФРЭ возможны различные сценарии поведения разных групп электронов. Как показано в [2,16], электроны разных энергий могут вести себя по-разному и даже могут двигаться в разные стороны. Другими словами, когда нет локального приближения, нет и „среднего“ электрона, когда для описания электронов достаточно средних характеристик, т.е. каждый из них характеризуется средними концентрацией, направленной скоростью и энергией всего ансамбля частиц.

Для объяснения полученных результатов рассмотрим особенности формирования пространственных зависимостей ФРЭ. В кинетическом уравнении для изотропной части ФРЭ удобно вместо переменной кинетической энергии перейти к переменной полной энергии. Как показано в [1,2], в этом случае ряд перекрестных членов со смешанными производными выпадает, что делает запись кинетического уравнения более компактной и удобной для анализа.

Кинетическое уравнение при редких межэлектронных столкновениях представляет собой уравнение двумерной диффузии по радиусу с коэффициентом  $D_r = \lambda V/3$  и по энергии с коэффициентом  $D_E = (eE)^2 D_r$  [1,16]

$$\frac{\partial}{\partial r} \Phi_r(\varepsilon, r) + \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Gamma_\varepsilon(\varepsilon, r) = \sum_k \left( v_k(w) \sqrt{w} f_0(\varepsilon) - v_k(w + \varepsilon_k) \sqrt{w + \varepsilon_k} f_0(\varepsilon + \varepsilon_k) \right). \quad (8)$$

Правая часть в (8) соответствует и источникам и стокам за счет всевозможных неупругих процессов возбуждения различных электронных и колебательных состояний. Здесь  $v_k$  частота возбуждения на уровень  $k$  с энергией  $\varepsilon_k$ . Левая часть в (8) представляет собой дивергенцию дифференциальных потоков электронов [1,2] соответственно по энергии

$$\Gamma_\varepsilon = - \left( D_E \frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon} + V_\varepsilon f_0 \right) \quad (9a)$$

и по координате

$$\Phi_r = D_r \frac{\partial f_0}{\partial r}. \quad (9b)$$

Поскольку для стационарной плазмы молекулярных газов баланс энергий электронов определяется неупругими ударами, в (8) можно пренебречь потерями энергий при упругих столкновениях, а также квазиупругим обменом энергий электронов и вращательных уровней (динамическим трением

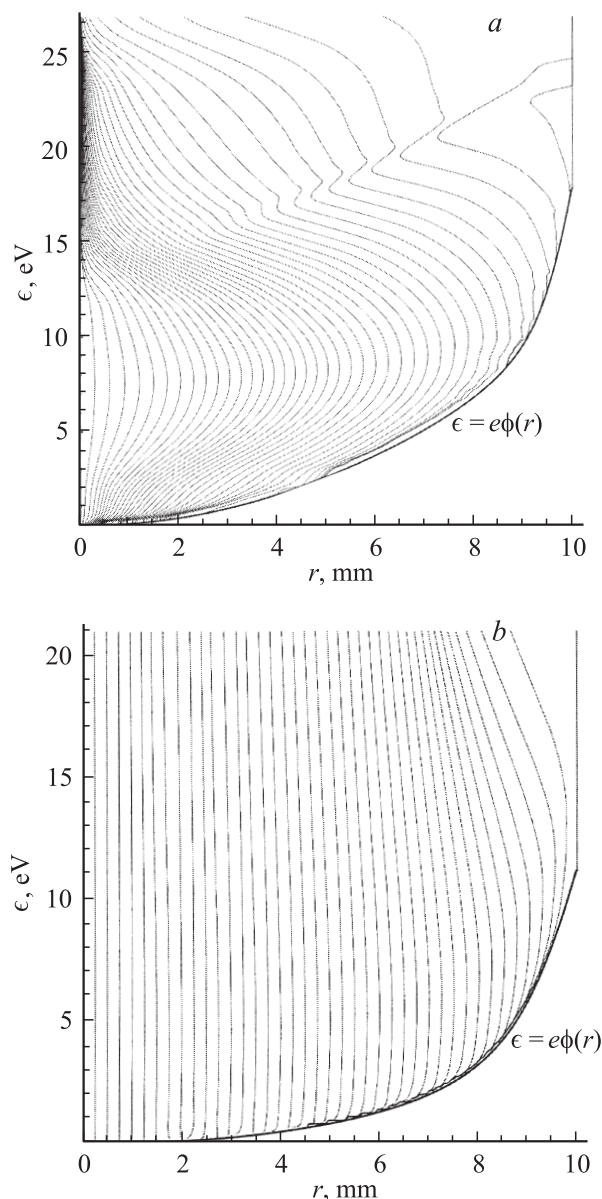
$$V_\varepsilon = \left( \delta v + \frac{8B}{T} v_r \right) w$$

в потоке по энергиям в (9a)).

Напомним, что пространственные потоки электронов, которые возникают в неоднородной плазме в неоднородных внешних полях, обеспечивают перераспределение частиц и энергий в плазменном объеме, а также формирование профилей плотности плазмы (см. [15,16]). Эти потоки, формирующие ФРЭ, содержат информацию о таких тонких характеристиках разряда, как образование и гибель зарядов, слагаемых и механизмах энергетического баланса электронов и т.п. В локальном приближении, когда ФРЭ формируется благодаря процессам релаксации по импульсам и энергиям преимущественно в данном месте, она определяется локальными значениями параметров в выбранной точке пространства, т.е. является локальной.

Малые поправки к локальной ФРЭ, которые пропорциональны относительно малым градиентам этих параметров, проявляют себя в формировании пропорциональных этим градиентам потоков частиц и энергий. Такое приближение описывается классической теорией переноса в рамках гидродинамического приближения (fluid model), подробнее см., например, [15]. В этом приближении направление дифференциальных потоков (т.е. вклад различных частей ФРЭ в полные потоки частиц и энергий) совпадает с направлениями полных потоков. Как только плазма становится более неоднородной и потоки частиц и энергий увеличиваются, эти потоки становятся более независимыми и самостоятельными. Радиальные потоки электронов в различных областях фазового пространства могут вести себя удивительно различным образом и, как показано в [16], в ограниченной плазме понятие о дифференциальных потоках  $\Phi(\varepsilon)$  оказывается очень эффективным для физического понимания пространственных механизмов формирования ФРЭ.

Наиболее наглядно физическую картину движения электронов на фазовой плоскости можно увидеть, построив силовые линии дифференциальных потоков электронов. Очевидно, что в локальном приближении, когда пренебрегается пространственным слагаемым (9b), „линии тока“ на фазовой плоскости  $(\varepsilon, r)$  везде должны быть направлены вертикально вверх по оси энергии. И наоборот, иное их распределение, имеющее смещение по координате, сигнализирует о неприменимости здесь локального приближения для расчета ФРЭ.



**Рис. 5.** Линии тока (т.е. линии, касательные к которым в каждой точке фазовой плоскости  $(r, \epsilon)$ , параллельны вектору фазового потока  $(vD_r \partial f_0 / \partial r, vD_r e^2 E_z^2 \partial f_0 / \partial \epsilon)$ ) для положительного столба разряда в аргоне (а) и кислороде (б) при давлении  $p = 6$  Торг и радиусе трубки  $R = 1$  см.

В качестве тестового примера, иллюстрирующего поведение потоков, на рис. 5,а изображены их силовые линии на фазовой плоскости  $(\epsilon, r)$  для положительного столба разряда в аргоне при давлении 6 Торг, соответствующем промежуточному случаю  $\lambda_c > R > \lambda_e^*$ . Эти условия были детально исследованы нами ранее в работах [6–9], в которых наблюдалось необычное явление сдвига максимума скорости возбуждения от центра к периферии при повышении давления газа, обусловленного нелокальными свойствами ФРЭ.

Как видно из рис. 5 а, в исследованных условиях поток электронов, стартующий с малых энергий, начинает рас-

ширяться в упругой области  $w < \epsilon_1$  по всей доступной ему области фазового пространства; электронный газ при этом охлаждается. По мере увеличения кинетической энергии и достижения порога неупругих столкновений (для рассматриваемого на рис. 5,а газа Ag это — 11.55 eV) быстрые электроны начинают „выбывать из игры“, теряя практически всю свою энергию и становясь медленными. Для этих электронов процесс набора энергии в поле с последующим сбросом этой энергии за счет неупругих соударений повторяется снова и снова, т.е. основная масса электронов, сосредоточенная в интервале энергий  $(0, \epsilon_1)$ , релаксирует по энергии на неупругих столкновениях. В свою очередь, резко уменьшающаяся часть электронов с  $w > \epsilon_1$ , которые продолжают диффузию на фазовой плоскости, не успевают претерпеть неупругий удар, релаксирует только на упругих столкновениях. Эти электроны преимущественно двигаются к центру трубки (см. рис. 5,а), поскольку при заданной полной энергии (2) возбуждение частиц газа начинается на оси, где кинетическая энергия электронов совпадает с полной.

При заданной полной энергии, но при других радиусах, их кинетическая энергия остается меньше пороговой. Поэтому по мере увеличения радиуса неупругие удары начинают происходить при все больших значениях полной энергии. Так как диффузионный поток частиц всегда направлен с сторону их стока (гибели), то в постоянном продольном поле после достижения криволинейной границы порога  $\epsilon = \epsilon_1 + e\phi(r)$  электроны на фазовой плоскости  $\epsilon, r$  начинают двигаться к центру трубки в зону их гибели за счет неупругих ударов. При движении к центру эти электроны, прежде чем претерпеть неупругое столкновение, получают дополнительную энергию и нагреваются в радиальном поле. В результате этого максимум скорости возбуждения расположен не на оси разряда, где концентрация электронов максимальна, а радиальное поле отсутствует, а смещается к периферии (подробнее см. [6–9]). Наиболее заметно этот эффект проявляется на периферии, где растущее к стенкам радиальное поле начинает превышать продольное.

Отметим, что поток пролетных электронов со значениями энергии, превышающими разность потенциалов ось–стенка трубки  $(\epsilon > e\Phi_w > \epsilon_i)$ , снова направлен к периферии. В результате на стенки идет электронный поток, по величине равный амбиполярному потоку ионов; он является малой разностью двух рассмотренных выше больших и примерно равных, но противоположно направленных потоков в упругой и неупругой областях энергий.

Таким образом, из рис. 5,а наглядно видно, что в положительном столбе тлеющего разряда в аргоне при промежуточных и высоких давлениях силовые линии фазового потока не являются вертикальными, а сначала расширяются к периферии и затем (при  $w > \epsilon_1$ ) направлены к оси. Поэтому в атомарных газах, даже когда выполняется условие локальности ФРЭ  $R > \lambda_e^*$  в

неупругой области энергий, но в упругой области все еще выполняется условие  $R < \lambda_\varepsilon$ , для нахождения ФРЭ во всей области энергий нельзя использовать локальное приближение (1).

Обратимся теперь к молекулярным газам. На рис. 5, *b* представлены результаты для кислорода при давлении  $p = 6$  Торр и радиусе трубки  $R = 1$  см. Видно, что в приосевых частях трубки силовые линии вертикальны, что свидетельствует о локальном характере формирования ФРЭ в этой области. В то же время на периферии они загибаются к центру трубки (ср. рис. 1,2). Поэтому основной вклад в формирование высокоэнергетичной ФРЭ здесь вносят электроны, диффундирующие с периферийных областей, которые при движении к оси получают дополнительную энергию в радиальном поле. Ясно, что использование локального приближения здесь будет приводить к ошибкам, а сам эффект обогащения быстрой части ФРЭ за счет ее нагрева в амбиполярном поле может сказываться как на форме энергетического распределения электронов, так и на эффективности процессов с большим энергетическим порогом.

Анализируя особенности формирования ФРЭ в плазме молекулярных газов необходимо иметь в виду, что при неупругом балансе энергий электронов, определяемом колебательным возбуждением, реализуются сравнительно большие ( $E \simeq \varepsilon_1^v / (e\lambda_\varepsilon^*)$ ) электрические поля, необходимые для поддержания разряда. Поэтому электроны быстро проходят небольшую ( $\sim 1-2$  eV) упругую область энергий ( $0, \varepsilon_1^v$ ), смещаясь при этом по координате на расстояние порядка  $\lambda_\varepsilon^* \simeq \lambda \ll R$  (6). Далее в основной массе электроны претерпевают неупругие столкновения, так что при  $\varepsilon > \varepsilon_1^v$  начинается резкий экспоненциальный спад ФРЭ с характерным масштабом  $T^* = eE\lambda_\varepsilon^* < \varepsilon_1^v$  (см. рис. 1). При этом основное число электронов сосредоточено в области до порога возбуждения  $\varepsilon < \varepsilon_1^v$ , так что в соответствии с общепринятыми критериями для этих (тепловых) электронов можно говорить о локальности (в том смысле, что подавляющее число электронов в области  $(0, \varepsilon_1^v)$  быстро релаксирует по энергиям, при этом мало смещаясь по координате).

В свою очередь экспоненциально уменьшающаяся часть быстрых электронов, проскочивших порог возбуждения, но все еще не успевших претерпеть неупругий удар, продолжает свою диффузию на фазовой плоскости  $(\varepsilon, r)$ . И хотя плотность электронов хвоста ФРЭ мала и быстро падает по энергии (см. рис. 1, 2), тем не менее эти электроны представляют значительный интерес для задач кинетики плазмы, поскольку определяют скорость неупругих процессов с большим энергетическим порогом (ионизацию, диссоциацию и т.п.). Продиффундировав до энергии на интервал  $\varepsilon$ , электроны перемещаются по координате на длину

$$\lambda_E = \varepsilon / (eE), \quad (10)$$

которая при  $\varepsilon \gg \varepsilon_1^v$  может быть немалой. Например, в азоте энергия ионизации примерно на порядок превышает порог колебательного возбуждения. Поэтому

прежде чем электроны достигнут порога ионизации, они соответственно пройдут путь порядка десяти длин  $\lambda_\varepsilon^*$  и сместятся при этом по координате на заметное расстояние. Из сказанного ясно, что чем выше энергия электронов, тем более нелокальна их ФРЭ на периферии разряда, где амбиполярное поле сопоставимо и превышает продольное.

Как видно из рис. 5, *b*, в приосевой области, где радиальные неоднородности малы и радиальное поле близко к нулю, силовые линии потоков электронов в кислороде практически вертикальны. Поэтому даже при значительном перемещении по энергии электроны сместятся по радиальной координате на ничтожно малое расстояние, т.е. формально для этих электронов можно говорить о применимости локального приближения. На периферии столба, где пространственная неоднородность плазмы и поперечное поле растут, смещение электронов по радиусу, которое определяется проекцией на координатную ось вектора суммарного поля, может быть значительным. Как видно рис. 5, здесь наблюдаются отклонения от локального приближения, причем чем ближе к стенке, где степень неоднородности плазмы и амбиполярное поле больше, тем эти отклонения сильнее. Диффундируя на фазовой плоскости, электрон быстрее всего достигает заданной энергии, соответствующей высокому энергетическому порогу, по линии наименьшего расстояния (по нормали) от заданной точки  $(\varepsilon, r)$  на криволинейную границу порога неупругих процессов  $\varepsilon = \varepsilon_1^v + e\varphi(r)$  (рис. 6).

Как видно из рис. 6, соответствующий угол наклона между направлением нормали и вертикальной осью определяется соотношением между продольным и поперечным полем

$$\operatorname{tg} \alpha = E_r / E_z. \quad (11)$$

Поэтому до заданной точки  $(\varepsilon, r)$  с большей вероятностью „просачиваются“ электроны, для которых вероятность испытать неупругий удар меньше всего, т.е. те, что при достижении заданной энергии в неупругой области энергий проходят меньший путь. Таковыми являются электроны, которые двигаются по линии наименьшей „оптической толщины“, т.е. по рассмотренной выше

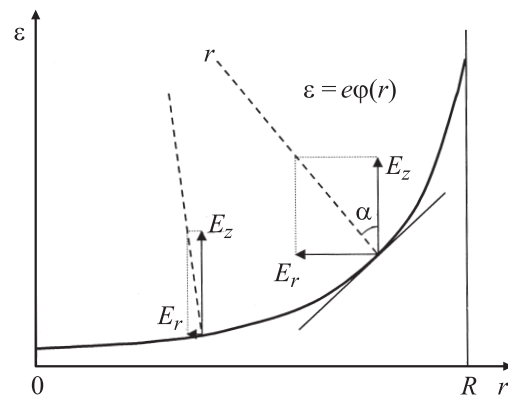


Рис. 6. Схема, иллюстрирующая формирование радиальной компоненты фазового потока.

нормали от точки  $(\varepsilon, r)$  на границу порога неупругих процессов  $\varepsilon = \varepsilon_1^v + e\varphi(r)$  (см. рис. 6). В энергетических единицах из (11) следует, что вероятность просачивания определяется эффективной температурой быстрых электронов

$$T^*(r) = T^* \sqrt{1 + (E_r/E)^2} = e\lambda_\varepsilon^* \sqrt{E_z^2 + E_r^2}, \quad (12)$$

так что для ФРЭ в неупругой области энергий имеем оценку

$$f(\varepsilon, r) = C \exp\left(-\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{T^*(r)}\right) = C \exp\left(-\frac{\varepsilon - \varepsilon_1}{\lambda_\varepsilon^* \sqrt{E_z^2 + E_r^2}}\right). \quad (13)$$

Эффективная температура (12) совпадает с локальной  $T^* = eE\lambda_\varepsilon^*$  лишь на оси, где амбиполярное поле равно нулю, и растет к периферии вместе с ростом  $E_r$ . Из (13) следует, что у стенок спад ФРЭ по энергии будет меньше соответственно и скорости процессов с большим порогом будут больше, чем рассчитанные в локальном приближении.

Более строгое рассмотрение, представленное в Приложении, показывает, что для энергий, значительно превышающих  $T^*$ , оценка (13) отражает основные зависимости поведения  $f(\varepsilon, r)$  в неупругой области энергий. Поэтому эту оценку можно рекомендовать для приближенного учета радиальных зависимостей быстрой части ФРЭ, а также для оценок погрешностей, возникающих при использовании локального приближения для расчета быстрой части ФРЭ.

Для оценок радиального поля можно использовать диффузионное распределение заряженных частиц плазмы, которое для цилиндрической геометрии является бесселевским ( $\sim J_0(2.4r/R)$ ). Это дает

$$E_r(r) = -\frac{2.4\bar{\varepsilon}}{eR} \frac{J_1(2.4r/R)}{J_0(2.4r/R)}, \quad (14)$$

где  $\bar{\varepsilon}$  — средняя энергия электронов,  $R$  — радиус трубки.

Это поле значительно лишь на периферии трубки, так что обычно оно заметно и превышает продольное лишь при  $r > 0.6-0.7R$ . Для быстрой оценки амбиполярного поля при  $r > 0.5R$  можно использовать приближенное выражение

$$E_r(r) = \frac{\bar{\varepsilon}}{eR} + \frac{0.042\bar{\varepsilon}}{eR} \exp(5.8r/R), \quad (15)$$

$r > 0.6-0.7R.$

Видно, что радиальное поле начинает резко расти, и при  $r > 0.7-0.8R$  оно практически всегда превышает продольное. Как ясно из проведенного анализа, в этом случае использование локального приближения для расчета ФРЭ неправомерно.

Таким образом, выполненные в работе полномасштабные симуляции положительного столба тлеющего разряда в молекулярных газах ( $N_2$  и  $O_2$ ) в широком

диапазоне давлений показали, что на периферии разряда, где амбиполярное поле превышает продольное, даже при выполнении условия  $R \gg \lambda_\varepsilon$  профили констант возбуждения различных колебательных и электронных состояний определяются величиной не только продольного, но и амбиполярного поля, т.е. они не постоянны по сечению и возрастают от центра к периферии. Причем чем выше уровень (чем больше энергетический зазор), тем сильнее вклад радиального поля, т.е. нелокальные эффекты в формировании ФРЭ проявляются все более отчетливо. Степень нелокальности, которую можно характеризовать как отклонение от вертикальности силовых линий фазового потока, определяется соотношением между продольным и поперечным полем. В приосевой области направление силовых линий практически вертикальное, т.е. для этих электронов можно использовать локальное приближение. В неупругой области энергий поток электронов поворачивает к центру трубки, так как сток электронов (следовательно, и направление силовых линий фазового потока) за счет неупругих ударов начинает происходить сначала именно в приосевой области. При движении к центру эти электроны, прежде чем претерпеть неупругое столкновение, получают дополнительную энергию (нагреваются) в радиальном поле. На периферии столба, где пространственная неоднородность плазмы и поперечное поле растут, наблюдаются отклонения, причем чем ближе к стенке, тем они сильнее. Выявленные особенности формирования ФРЭ дают возможность уточнить соответствующие критерии применимости локального приближения в плазме молекулярных газов. В частности, масштаб спада ФРЭ в неупругой области энергий возрастает по мере движения к периферии из-за роста амбиполярного поля.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 06-02-17317.

Авторы выражают глубокую благодарность Л.Д. Цендину за помощь в работе и стимулирующие обсуждения.

### Приложение. Построение приближенного решения кинетического уравнения (8) в неупругой области методом функции Грина

Нетрудно убедиться, что в неупругой области кинетическое уравнение (8) в безразмерных координатах имеет вид

$$\Delta f \equiv \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f. \quad (8a)$$

Для исследования свойств решения этого уравнения обратимся к известной формуле Грина

$$\int_{\Omega} (f \Delta u - u \Delta f) dx = \int_{\partial \Omega} \left( f \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_x, \quad (П1)$$



которая остается справедливой, если  $\Delta$  заменить на оператор более общего вида  $\tilde{L} = \Delta - 1$ :

$$\int_{\Omega} (f \tilde{L}u - u \tilde{L}f) dx = \int_{\partial\Omega} \left( f \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_x. \quad (\text{П2})$$

Пусть  $f$  есть решение уравнения

$$\tilde{L}f \equiv \Delta f - f = 0 \quad (\text{П3})$$

и  $u$  есть решение уравнения

$$\tilde{L}u \equiv \Delta u - u = \delta(x - y). \quad (\text{П4})$$

Здесь буквы  $x$  и  $y$  обозначают точки фазовой плоскости, т.е. двумерные векторы, оператор  $\tilde{L}$  действует по координатам  $x$ . Тогда (П2) принимает вид

$$\int_{\Omega} (f \delta(x - y) - u \delta) dx = \int_{\partial\Omega} \left( f \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_x \quad (\text{П5})$$

т.е.

$$f(y) = \int_{\partial\Omega} \left( f \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} - u \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} \right) dS_x. \quad (\text{П6})$$

Найдем теперь (частное!) решение уравнения (П4). В полярной системе координат с центром в точке  $y$  уравнение (П4) принимает вид

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - u = \delta(r), \quad (\text{П7})$$

где  $r$  есть расстояние между точками  $x$  и  $y$ , а  $\theta$  есть угол, который вектор  $y-x$  образует с осью абсцисс первоначальной системы. Можно найти симметричное относительно точки  $y$  решение уравнения (П7), убывающее на бесконечности (т.е. при  $r \rightarrow \infty$ ). Действительно, такое решение удовлетворяет обыкновенному дифференциальному уравнению

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du}{dr} \right) - u = \delta(r). \quad (\text{П8})$$

Решение уравнения (П8) есть функция Макдональда  $u = K_0(r)$ . При больших  $r$  справедлива асимптотическая формула

$$u = K_0(r) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2r}} \exp(-r). \quad (\text{П9})$$

Формула (П6) выражает значение функции  $u$  во внутренней точке  $y$  ограниченной области  $\Omega$  через значения  $f$  и  $\partial f / \partial \mathbf{n}$  на границе области  $\partial\Omega$ . С математической точки зрения нельзя считать значения  $f$  и  $\partial f / \partial \mathbf{n}$  произвольными. Здесь  $f$  на границе однозначно определяет граничные значения  $\partial f / \partial \mathbf{n}$ , и наоборот. Кроме того, в рассматриваемом нами случае область не ограничена. И тем не менее формула (П6) может быть использована для оценки поведения  $f$  в неупругой области. Для этого привлечем ряд упрощенных предположений.

1. В нашем случае область

$$\Omega = \{(\xi, \varepsilon) \mid -L \leq \xi \leq L, \quad \varphi(\xi) + \varepsilon_1 \leq \varepsilon\}$$

может быть заменена ограниченной

$$\Omega_1 = \{(\xi, \varepsilon) \mid -L \leq \xi \leq L, \quad \varphi(\xi) + \varepsilon_1 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_2\},$$

где  $\varepsilon_2$  — достаточно большое (в несколько раз больше  $\varepsilon_1$ ). (Примечание: буквами  $\xi$ ,  $\varepsilon$  здесь обозначаются координаты; сами точки плоскости здесь обозначаются  $x$  и  $y$ ). Известно, что в неупругой области  $f$  достаточно быстро спадает, поэтому в интеграле по  $\partial\Omega$  в формуле (П6) можно оставить только интеграл по нижней границе

$$\Gamma = \{(\xi, \varepsilon_1 \varepsilon_1 + \varphi(\xi)) \mid -L \leq \xi \leq L\}.$$

2. Нам известно, что до порога неупругих ударов  $\varepsilon_1$  функция распределения  $f$  локальна. Тогда значения функции и ее производной по энергии при кинетической энергии, равной  $\varepsilon_1$ , пропорциональны концентрации электронов

$$f(\xi, \varphi(\xi) + \varepsilon_1) = An_e(\xi) \quad (\text{П10})$$

и

$$\frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\xi, \varphi(\xi) + \varepsilon_1) = -(A/T_1)n_e(\xi), \quad (\text{П11})$$

где  $A$  и  $T_1$  — положительные константы ( $T_1$  характеризует наклон функции вблизи порога неупругих ударов  $\varepsilon_1$ ).

Единичный вектор нормали (внешний, т.е. направлен вниз) на границе  $\Gamma$

$$\mathbf{n} = \frac{(\varphi'(\xi), -1)}{\sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2}}, \quad (\text{П12})$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} &= \nabla f \mathbf{n} = (-An_e(\xi)/T_1, 0) \frac{(\varphi'(\xi), -1)}{\sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2}} \\ &= -\frac{An_e(\xi)\varphi'(\xi)}{T_1\sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2}}. \end{aligned} \quad (\text{П13})$$

В последней формуле использован тот факт, что на линии  $\Gamma$  поток направлен строго вертикально. Далее

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_0(r)}{\partial \mathbf{n}} &= \mathbf{n} \nabla K_0(r) = \mathbf{n} r K_0'(r)/r \\ &= \frac{K_0'(r)}{r\sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2}} (\varphi'(\xi), -1) (\xi - \xi_0, \varphi(\xi) + \varepsilon_1 - \varepsilon_0) \\ &= \frac{K_0'(r)}{r\sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2}} (\varphi'(\xi)(\xi - \xi_0) + \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varphi(\xi)), \end{aligned} \quad (\text{П14})$$

где  $(\xi_0, \varepsilon_0)$  — координаты точки  $y$ . Далее

$$\begin{aligned} f \frac{\partial K_0}{\partial \mathbf{n}} - K_0 \frac{\partial f}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{An_e(\xi)}{\sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2}} \\ &\times \left\{ \frac{K_0'(r)}{r} (\varphi'(\xi)(\xi - \xi_0) + \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varphi(\xi)) + \frac{K_0(r)}{T_1} \varphi'(\xi) \right\}. \end{aligned} \quad (\text{П15})$$

Таким образом,

$$f(\xi_0, \varepsilon_0) = \int_{-L}^L \frac{An_e(\xi)}{\sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2}} \left\{ \frac{K'_0(r)}{r} (\varphi'(\xi)(\xi - \xi_0) + \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varphi(\xi)) + \frac{K_0(r)}{T_1} \varphi'(\xi) \right\} d\lambda. \quad (\text{П16})$$

Учитывая, что элемент длины дуги

$$d\lambda = \sqrt{(d\varphi)^2 + (d\xi)^2} = \sqrt{1 + \varphi'(\xi)^2} d\xi,$$

получим

$$f(\xi_0, \varepsilon_0) = 2A \int_0^L n_e(\xi) \left\{ \frac{K'_0(r)}{r} (\varphi'(\xi)(\xi - \xi_0) + \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varphi(\xi)) + \frac{K_0(r)}{T_1} \varphi'(\xi) \right\} d\xi. \quad (\text{П17})$$

При больших  $r$  можно воспользоваться асимптотической формулой (П9). Продифференцировав (П9), получим

$$K'_0(r) \approx \frac{d}{dr} \left( \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-r} \right) = \sqrt{\frac{\pi}{2r}} e^{-r} \frac{2r + 1}{2r}. \quad (\text{П18})$$

Подставив последнее выражение в (П17), получим

$$f(\xi_0, \varepsilon_0) = A\sqrt{2\pi} \int_0^L n_e(\xi) \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}} \left\{ \frac{1 + 2r}{2r^2} (\varphi'(\xi)(\xi - \xi_0) + \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varphi(\xi)) + \frac{\varphi'(\xi)}{T_1} \right\} d\xi. \quad (\text{П19})$$

Подынтегральное выражение в (П19) экспоненциально убывает с  $r$ , поэтому значение интеграла определяется значением подынтегрального выражения с минимальным по кривой  $\Gamma$  значением  $r$ , которое обозначим  $r^*$ ; саму точку на кривой  $\Gamma$ , для которой достигается это минимальное значение, обозначим  $x^* = x^*(y)$ , а ее пространственную координату обозначим  $\xi^*$ . Таким образом,  $r^* = |r^*| = |y - x^*|$ . Очевидно, что  $x^*(y') = x^*(y)$ , если  $y'$  лежит на прямой  $l$ , соединяющей точки фазовой плоскости  $y$  и  $x^*(y)$ .

Опустив числовой множитель, получим оценку для значений функции на этой прямой (где  $r^*$  заменено на  $r$ , так как точка на прямой меняется)

$$f|_l \sim n_e(\xi^*) \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}} \left\{ \frac{1 + 2r}{2r^2} (\varphi'(\xi^*)(\xi^* - \xi_0) + \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varphi(\xi^*)) + \frac{\varphi'(\xi^*)}{T_1} \right\}. \quad (\text{П20})$$

Так как вектор нормали  $\mathbf{n}$  к  $\Gamma$  в точке  $x^*$  параллелен вектору  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{r} = r$ . Тогда из (П14) получим

$$\varphi'(\xi^*)(\xi^* - \xi_0) + \varepsilon_0 - \varepsilon_1 - \varphi(\xi^*) = r\sqrt{1 + \varphi'(\xi^*)^2}. \quad (\text{П21})$$

Подставив (П21) в (П20), получим

$$f|_l \sim n_e(\xi^*) \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}} \left\{ \frac{1 + 2r}{2r} \sqrt{1 + \varphi'(\xi^*)^2} + \frac{\varphi'(\xi^*)}{T_1} \right\}. \quad (\text{П22})$$

Наконец, если  $r \gg 1$ , то  $\frac{1+2r}{2r} \approx 1$  и учитывая, что  $\xi^*$  для всех точек прямой  $l$  одно и то же, из (П22) получается оценка соответствующая (13)

$$f|_l \sim \frac{e^{-r}}{\sqrt{r}}.$$

## Список литературы

- [1] *Tsendin L.D.* // Plasma Sources Sci. Technol. 1995. Vol. 4. P. 200–211.
- [2] *Tsendin L.D.* // Plasma Sources Sci. Technol. 2003. Vol. 12. P. 51–63.
- [3] *Behnke J., Golobovsky Yu., Nisimov S.U., Porokhova I.A.* // Contrib. Plasma. Phys. 1996. Vol. 36. N 1. P. 75–91.
- [4] *Golubovskii Yu., Porokhova I.A., Benke J.P.* // J. Phys. D: Appl. Phys. 1999. Vol. 32. P. 456–470.
- [5] *Bysch C., Kortshagen U.* // Phys. Rev. E. 1995. Vol. 51. N 1. P. 280–288.
- [6] *Богданов А., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д., Арсланбеков Р.Р., Колобов В.И.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 7. С. 44–51.
- [7] *Arslanbekov R.R., Kolobov V.I., Bogdanov E.A., Kudryavtsev A.A.* // Appl. Phys. Lett. 2004. Vol. 85. N 15. P. 1–3.
- [8] *Tsendin L.D., Bogdanov E.A., Kudryavtsev A.A.* // Phys. Rev. Lett. 2005. Vol. 94. N 1. P. 015 001.
- [9] *Bogdanov E.A., Kudryavtsev A.A., Tsendin L.D.* // IEEE Trans. Plasma Sci. 2006. Vol. 34. N 3. P. 834–843.
- [10] *Phelps A.V.* // JILA Report No 28. 1985. [ftp://jila.colorado.edu/collision\\_data/electron-neutral](ftp://jila.colorado.edu/collision_data/electron-neutral).
- [11] *Богданов Е.А., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д., Арсланбеков Р.Р., Колобов В.И., Кудрявцев В.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 8. С. 45–55.
- [12] *Богданов Е.А., Кудрявцев А.А., Цендин Л.Д., Арсланбеков Р.Р., Колобов В.И., Кудрявцев В.В.* // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 9. С. 70–77.
- [13] *Райзер Ю.П.* Физика газового разряда. М.: Наука, 1987. 592 с.
- [14] *Словецкий Д.И.* Энциклопедия низкотемпературной плазмы / Под ред. В.Е. Фортова. М.: Наука, 2000. Т. 1. С. 314.
- [15] *Рожанский А.В., Цендин Л.Д.* Столкновительный перенос в частично-ионизованной плазме. М.: Энергоатомиздат, 1988. 248 с.
- [16] *Mumken G., Shluter H., Tsendin L.D.* // Phys. Rev. E. 1999. Vol. 60. N 2. P. 2250–2259.