04;10

Особенности поперечной динамики релятивистского электронного пучка малой плотности, распространяющегося в плазме продольно внешнему магнитному полю

© Е.К. Колесников, А.С. Мануйлов

Санкт-Петербургский государственный университет
Научно-исследовательский институт математики и механики им. В.И. Смирнова
198504 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: Kolesnikov_evg@mail.ru, man06@mail.ru

(Поступило в Редакцию 25 июня 2008 г.)

Установлена возможность реализации трех различных режимов транспортировки релятивистского электронного пучка малой плотности: режима, характеризующегося периодическими колебаниями радиуса пучка, режима неограниченного расширения пучка и режима пинчевания. Получены аналитические выражения, описывающие радиальную эволюцию пучка в указанных режимах транспортировки.

PACS: 52.40.Mj

Введение

Проблема исследования формы огибающей аксиально-симметричных пучков заряженных частиц при транспортировке в плотных и разреженных газоплазменных средах давно привлекает внимание как отечественных, так и зарубежных исследователей [1–11]. Уравнение огибающей однородного неламинарного пучка без учета рассеяния было впервые сформулировано в работе [9]. Результаты [9] были обобщены в [10] на случай азимутально-симметричного пучка, распространяющегося продольно внешнему магнитному полю в рассеивающей газоплазменной среде.

В работе [12] на основе сформулированных нами в [13–15] кинетического уравнения, уравнений переноса и уравнения для среднеквадратичного радиуса получено уравнение огибающей релятивистского электронного пучка (РЭП) с произвольным автомодельным радиальным профилем плотности тока, учитывающее эффекты неламинарности и рассеяния пучка на фоновом газе при наличии внешних продольного магнитного поля и фокусирующего радиального электрического поля, создаваемого однородным ионным фоном в режиме ионной фокусировки (ИФ). Указанное уравнение может быть использовано для исследования качественных особенностей радиальной динамики РЭП, распространяющегося в газоплазменной среде при различных физических условиях.

В настоящей работе с помощью сформулированого в [12] уравнения огибающей РЭП определены основные качественные особенности транспортировки квазистационарного РЭП малой плотности, распространяющегося в плазме продольно внешнему магнитному полю в отсутствие процесса рассеяния.

Постановка задачи

Рассмотрим аксиально-симметричный параксиальный релятивистский электронный пучок, инжектируемый в однородную плазму при наличии однородного стационарного магнитного поля $\mathbf{B} = B_0\mathbf{i}_z$, направленного параллельно оси симметрии пучка z ($\mathbf{i}_z$ — орт указанной оси). Предположим, что плотность электронов пучка n_b много меньше плотности фоновой плазмы n_Φ, т. е.

$$n_b \ll n_\Phi. \tag{1}$$

Эффектом рассеяния частиц пучка в столкновениях с частицами фоновой плазмы будем пренебрегать.

Как показывают теория и эксперимент [4,16,17], в ситуации (1) при распространении РЭП в плазме может иметь место зарядовая и токовая (магнитная) нейтрализация пучка зарядами и токами, индуцируемыми в плазме, плотность которых

$$\rho_p = -\alpha_c\rho_b, \quad J_p = -\alpha_m J_b, \tag{2}$$

где α_c и α_m — соответственно коэффициенты зарядовой и магнитной нейтрализации пучка, значение которых находится в пределах от 0 до 1. По данным работы [17], посвященной детальному анализу реакции плотной плазмы на инжекцию РЭП, предельные значения коэффициентов нейтрализации реализуются при соответствующих ограничениях на параметры пучка и плазмы, приведенных в таблице.

Как видно из таблицы, характер реакции плазмы на инжекцию пучка существенно зависит от соотношения между длительностью импульса пучка τ_b и периодом ленгмюровских колебаний фоновой плазмы τ_p. При малой длительности пучка ($\tau_b \ll \tau_p$) зарядовая и токовая нейтрализация пучка плазмой практически отсутствует

Соотношение между параметрами	Значения коэффициентов нейтрализации	
	α_c	α_m
$\tau_b \ll \tau_p$	0	0
$\tau_b \gg \tau_p, \quad R_b \ll \lambda_p$	1	0
$\tau_b \gg \tau_p, \quad R_b \gg \lambda_p$	1	1

Примечание: τ_b — длительность импульса пучка, R_b — радиус пучка, $\tau_p = (\pi m/e^2 n_\Phi)^{1/2}$ — период ленгмюровских колебаний фоновой плазмы (m и e — масса и заряд электрона), $\lambda_p = v\tau_p$ — параметр размерности длины (v — скорость электронов пучка).

($\alpha_c = \alpha_m = 0$), и эволюция пучка после выхода из инжектора происходит так же, как в вакууме. Во втором предельном случае пучка большой длительности ($\tau_b \gg \tau_p$) пространственный заряд РЭП в „теле“ пучка (на расстояниях $\xi \gg \lambda_p$ от переднего фронта) оказывается нейтрализованным плазмой ($\alpha_c = 1$). Токовая нейтрализация пучка ($\alpha_m = 1$) в ситуации большой длительности пучка будет иметь место только при дополнительном ограничении на радиус пучка: $R_b \gg \lambda_p$. В противном случае, когда $R_b \ll \lambda_p$, токовая компенсация пучка будет практически отсутствовать.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением указанных с таблице режимов транспортировки РЭП в плазме, для которых значения коэффициентов зарядовой и токовой нетрализации пучка являются заданными. Кроме того, сделаем дополнительное предположение об автомодельности профиля плотности пучка, т. е. будем считать, что в любые моменты времени плотность пучка в сегменте S^τ зависит от отношения радиальной координаты r к радиусу пучка R_b в сегменте S^τ. В этом случае функция $\chi(\mathbf{r}, t)$, характеризующая радиальный профиль плотности пучка в сегменте S^τ и определяемая как

$$\chi(\mathbf{r}_\perp, t) = \int f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t) d\mathbf{p}_\perp$$

(здесь $f^\tau(\mathbf{r}_\perp, \mathbf{p}_\perp, t)$ — функция распределения частиц пучка в сегменте S^τ по поперечным координатам $\mathbf{r}_\perp$ и импульсам $\mathbf{p}_\perp$), будет иметь вид [12]

$$\chi(\mathbf{r}_\perp, t) = \frac{1}{2\pi R_b^2(t)} \Phi(x), \tag{3}$$

где безразмерая координата $x = r/R_b$ (здесь $r = |\mathbf{r}_\perp|$), а $\Psi(x)$ — заданная функция, удовлетворяющая условию

$$\int_0^1 x\Phi(x)dx = 1. \tag{4}$$

Тогда для исследования особенностей поперечной динамики РЭП после выхода из инжектора можно воспользоваться сформулированным нами в работе [12] уравнением огибающей (см. (43) в [12]), которое в рассматриваемом случае ($\gamma = 1, \ \delta = 0$) может быть записано в виде

$$\frac{d^2\xi}{dt'^2} + \frac{\mathrm{sign}(\kappa)}{2\xi} + \frac{\lambda^2\xi}{4} = \frac{1}{\xi^3}\left[\varepsilon^2 + \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2}\right)^2\right], \tag{5}$$

где $\xi = R_b/R_{b0}$, $t' = t/t_0$, $\mu = 1 - (1-\alpha_c)/(\beta^2(1-\alpha_m))$, $\kappa = \mu(1-\alpha_m)$, γ — лоренц-фактор электронов пучка, $\beta = v_z/c$ (здесь v_z — продольная компонента скорости частиц пучка и c — скорость света),

$$t_0 \equiv \left(\frac{\omega_{b0}\beta\sqrt{|\kappa_0|}}{\eta_\Phi}\right)^{-1}, \ \lambda = \frac{\Omega_b\eta_\Phi}{\omega_{b0}\beta\sqrt{|\kappa_0|}}, \ \delta = \frac{\omega_{\Phi0}\eta_\Phi}{\omega_{b0}\beta\sqrt{|\kappa_0|}}, \tag{6}$$

$$\sigma_\theta = \frac{2\langle\Phi(x)x^3\dot\theta_0(x)\rangle}{\omega_{b0}\beta\sqrt{|\kappa_0|}\eta_\Phi}, \quad \varepsilon = \frac{2E_0}{\omega_{b0}\beta\sqrt{|\kappa_0|}\eta_\Phi\gamma R_{b0}^2}, \tag{7}$$

$$\langle\Phi(x)x^3\dot\theta_0(x)\rangle = \int_0^1 \Phi(x)x^3\dot\theta_0(x)dx, \tag{8}$$

$$\eta_\Phi = \left[2\int_0^1 \Phi(x)x^3dx\right]^{1/2}, \quad \omega_{b0}^2 = \frac{4\pi e^2\langle n_{b0}\rangle}{\gamma m}. \tag{9}$$

Здесь E_0 — начальное значение среднеквадратичного эмиттанса,

$$\langle n_{b0}\rangle = N_b^0/(\pi R_{b0}^2)$$

— средняя начальная плотность пучка в сегменте S^τ,

$$\omega_{\Phi0} = (4\pi e^2 n_{\Phi0}/\gamma m)^{1/2}$$

— начальная ленгмюровская частота электронов фоновой плазмы (здесь $n_{\Phi0}$ — начальная плотность электронов плазмы), $\Omega_b = |e|B_0/(\gamma mc)$ — гирочастота частиц пучка во внешнем магнитном поле.

Тогда уравнение (5) можно переписать в виде

$$\frac{d^2\xi}{dt'^2} = -\frac{\partial U_{\mathrm{eff}}}{\partial\xi}, \tag{10}$$

где

$$U_{\mathrm{eff}}(\xi) = \frac{\lambda^2}{8}(\xi^2-1) + \frac{1}{2}\left[\varepsilon^2 + \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2}\right)^2\right]\frac{1-\xi^2}{\xi^2} + \frac{\mathrm{sign}(\kappa)\ln(\xi)}{2} \tag{11}$$

— эффективный скалярный потенциал поперечного движения, удовлетворяющий условию: $U_{\mathrm{eff}}(1) = 0$.

Как следует из выражения (11) для потенциала $U_{\mathrm{eff}}(\xi)$, в зависимости от значений параметров $\kappa, \lambda, \varepsilon$ и σ_θ возможны следующие три основных типа радиальной эволюции пучка:

1) периодические колебания радиуса,

2) неограниченное расширение пучка,

3) режим пинчевания, при котором на некотором расстоянии от ускорителя коллективное электромагнитное поле сжимает пучок в точку.

Режим транспортировки, характеризующийся периодическими колебаниями радиуса пучка

Этот режим реализуется при $\lambda \neq 0$, а также в ситуации $\lambda = 0$, $\kappa > 0$, $\varepsilon^2 + \sigma_\theta^2 \neq 0$. В этом случае при $\xi \to 0$ или при $\xi \to +\infty$ эффективный потенциал $U_{\text{eff}}(\xi) \to +\infty$ и для любого начального значения $\dot{R}_{b0}$ безразмерный радиус пучка $\xi = R_b/R_{b0}$ периодически колеблется в некотором промежутке $[\xi_{\min}, \xi_{\max}]$.

Проинтегрировав уравнение (10) с начальными условиями при $t' = \tau/t_0$ ($\xi = 1$, $d\xi/dt' = t_0\dot{R}_{b0}/R_{b0}$), получим закон временной эволюции радиуса пучка в сегменте S^τ, который при $\dot{R}_{b0} \geq 0$ будет определяться выражениями

$$t - \tau = \begin{cases} T_0(\xi) + mT_1 + mT_2, & \xi \geq 1, \\ -T_0(\xi) + (m+1)T_1 + mT_2, & \xi \geq 1, \\ T_0(\xi) + (m+1)T_1 + mT_2, & \xi < 1, \\ -T_0(\xi) + (m+1)T_1 + (m+1)T_2, & \xi < 1, \end{cases} \tag{12}$$

и при $\dot{R}_{b0} < 0$

$$t - \tau = \begin{cases} T_0(\xi) + mT_1 + mT_2, & \xi \leq 1, \\ -T_0(\xi) + mT_1 + (m+1)T_2, & \xi \leq 1, \\ T_0(\xi) + mT_1 + (m+1)T_2, & \xi > 1, \\ -T_0(\xi) + (m+1)T_1 + (m+1)T_2, & \xi > 1, \end{cases} \tag{13}$$

где $m = 0, 1, 2\ldots$,

$$T_0(\xi) = t_0 \left| \int\limits_1^\xi \frac{d\xi'}{\sqrt{\Psi(\xi')}} \right|,$$

$$T_1 = 2T_0(\xi_{\max}), \quad T_2 = 2T_0(\xi_{\min}), \tag{14}$$

функция

$$\Psi(\xi) = \sigma_r^2 + \left[\varepsilon^2 + \left(\sigma_\theta + \frac{\lambda}{2}\right)^2\right] \frac{1-\xi^2}{\xi^2} + \frac{\lambda^2}{4}(1-\xi^2) - \text{sign}(\kappa)\ln\xi, \tag{15}$$

постоянная

$$\sigma_r = \dot{R}_{b0}/(R_{b0}/t_0), \tag{16}$$

а $\xi_{\min}$ и $\xi_{\max}$ определяются корнями уравнения

$$\Psi(\xi) = 0. \tag{17}$$

Режим неограниченного расширения пучка

Данный режим имеет место в случае $\lambda = 0$, $\kappa < 0$ (саморасходящийся пучок в пренебрежении внешним магнитным полем). В этом случае потенциал $U_{\text{eff}}(\xi)$ в промежутке $[0, +\infty)$ монотонно убывает от $+\infty$ до $-\infty$, и для любого начального значения $\dot{R}_{b0}$ радиальное движение граничной частицы пучка является инфинитным и происходит в промежутке $[\xi_{\min}, +\infty)$, нижняя граница которого в случае $\dot{R}_{b0} < 0$ определяется корнем уравнения (17), а для $\dot{R}_{b0} > 0$, $\xi_{\min=1}$.

Решение уравнения (10) в этом случае с учетом закона сохранения среднего обобщенного углового момента частиц сегмента пучка (см. (16) работы [12]) может быть записано в виде

$$t - \tau = \begin{cases} T^m \pm T_0^m(\xi^m), & \xi < 1, \dot{R}_{b0} \leq 0, \\ T^m + T_0^m(\xi^m), & \xi > 1, \dot{R}_{b0} \leq 0, \\ T_0^m(\xi^m) - T^m, & \dot{R}_{b0} > 0, \end{cases} \tag{18}$$

где переменная $\xi^m = R_b/R_{b\,\min} = \xi/\xi_{\min}$, функция $T_0^m(\xi^m)$ задается интегралом

$$T_0^m(\xi^m) = t_0 \int\limits_1^{\xi^m} \frac{d\xi'}{\sqrt{\ln(\xi') + \frac{1}{\xi_{\min}^4}(\varepsilon^2 + \sigma_\theta^2)\frac{\xi'^2 - 1}{\xi'^2}}}, \tag{19}$$

а постоянная $T^m = T_0^m(\xi_{\min}^{-1})$.

В частном случае „холодного“ невращающегося пучка ($\varepsilon = 0$, $\sigma_{\theta=0}$) интегралы в (18) могут быть выражены через интеграл вероятности от мнимого аргумента:

$$F(y) \equiv \exp(-y^2) \int\limits_0^y \exp(t^2)dt. \tag{20}$$

В результате имеем

$$t - \tau = 2t_0 \times \begin{cases} \dfrac{F\left(\sqrt{-\ln\xi_{\min}}\right)}{\xi_{\min}} \pm \dfrac{\xi F\left(\sqrt{\ln\xi/\xi_{\min}}\right)}{\xi_{\min}}, & \xi \leq 1, \quad \dot{R}_{b0} < 0, \\ \dfrac{F\left(\sqrt{-\ln\xi_{\min}}\right)}{\xi_{\min}} + \dfrac{\xi F\left(\sqrt{\ln\xi/\xi_{\min}}\right)}{\xi_{\min}}, & \xi > 1, \quad \dot{R}_{b0} < 0, \\ \dfrac{\xi F\left(\sqrt{\ln\xi/\xi_{\min}}\right)}{\xi_{\min}} - \dfrac{F\left(\sqrt{-\ln\xi_{\min}}\right)}{\xi_{\min}}, & \dot{R}_{b0} \geq 0, \end{cases} \tag{21}$$

где

$$\xi_{\min} = \exp(-\sigma_r^2).$$

Отметим, что в случае $\dot{R}_{b0} = 0$ (21) принимает вид

$$t - \tau = 2t_0\xi F(\sqrt{\ln\xi}). \tag{22}$$

Учитывая, что при $y \ll 1$, $F(y) \sim y$, а при $y \sim 1$, $F(y) \sim 1/2$, из (22) могут быть получены приближенные аналитические выражения для функции $\xi(t)$:

$$\xi(t) = \frac{R_b}{R_{b0}} = \begin{cases} \exp\left[(t-\tau)^2/4t_0^2\right], & \sqrt{\ln\xi} \ll 1, \\ (t-\tau)/t_0, & \sqrt{\ln\xi} \sim 1. \end{cases} \tag{23}$$

Как видно из (23), после выхода из инжектора, радиус пучка в сегменте S^τ сначала экспоненциально растет со временем, а затем его рост становится линейным с $\dot{R}_{b0} = R_{b0}/t_0 = \text{const}$. Последнее соотношение позволяет, в частности, установить простой критерий параксиальности пучка в рассматриваемом режиме транспортировки. Действительно, в этом случае имеем

$$\frac{v_\perp}{v_z} \equiv \nu \leq \frac{\dot{R}_b}{c\beta} \sim \frac{R_{b0}}{t_0 c\beta} = 2\sqrt{|\kappa|\frac{I_b}{I_A}}, \tag{24}$$

где I_b — полный ток пучка, $I_A = \beta\gamma mc^2/e$ — предельный ток Альфвена (для электронного пучка $I_A = 17\beta\gamma$ kA). Как следует из (24), условие параксиальности холодного саморасходящегося пучка может быть записано в виде

$$\sqrt{|\kappa|\frac{I_b}{I_A}} \ll 1. \tag{25}$$

Режим пинчевания

Рассмотрим, наконец, последний из возможных режимов радиальной эволюции пучка — режим пинчевания. Как следует из выражения (11) для эффективного потенциала $U_{\text{eff}}(\xi)$, этот режим реализуется при $\kappa > 0$, $\varepsilon = \sigma_\theta = \lambda = 0$ (самосжимающийся холодный невращающийся пучок в пренебрежении магнитным полем). В этом случае потенциал $U_{\text{eff}}(\xi)$ в промежутке $[0, +\infty]$ монотонно возрастает от $-\infty$ до $+\infty$ и, таким образом, для любого значения $\dot{R}_{b0}$ радиальное движение граничной частицы пучка происходит в промежутке $[0, \xi_{\max}]$, верхняя граница которого для $\dot{R}_{b0} > 0$ определяется корнем уравнения (17), а при $\dot{R}_{b0} \leq 0$, $\xi_{\max} = 1$.

Проинтегрировав уравнение (10), получим закон временной эволюции радиуса пучка

$$t - \tau = \sqrt{\pi} t_0$$

$$\times \begin{cases} \phi\left(\sqrt{-\ln \xi_{\max}}\right) \mp \phi\left(\sqrt{\ln \frac{\xi_{\max}}{\xi}}\right), & \xi \geq 1,\ \dot{R}_{b0} > 0, \\ \phi\left(\sqrt{-\ln \xi_{\max}}\right) + \phi\left(\sqrt{\ln \frac{\xi_{\max}}{\xi}}\right), & \xi < 1,\ \dot{R}_{b0} > 0, \\ \phi\left(\sqrt{\ln \frac{\xi_{\max}}{\xi}}\right) - \phi\left(\sqrt{-\ln \xi_{\max}}\right), & \dot{R}_{b0} \leq 0, \end{cases} \tag{26}$$

где $\xi_{\max} = \exp(\sigma_r^2)$,

$$\phi(x) = 2/\sqrt{\pi} \int_0^x \exp(-t^2)dt$$

— функция Лапласа.

Как следует из (26), в момент

$$t_p = \begin{cases} \tau + \sqrt{\pi} t_0 [1 + \phi\left(\sqrt{\ln \xi_{\max}}\right)], & \dot{R}_{b0} > 0, \\ \tau + \sqrt{\pi} t_0 [1 - \phi\left(\sqrt{\ln \xi_{\max}}\right)], & \dot{R}_{b0} \leq 0 \end{cases} \tag{27}$$

радиус пучка R_b обращается в нуль, т. е. имеет место эффект „пинчевания" пучка коллективным электромагнитным полем. В частном случае $\dot{R}_{b0} = 0$, $t_p = \tau + \sqrt{\pi} t_0$. Используя последнее выражение, оценим параметр параксиальности пучка ν. Учитывая, что в этом случае

$$\dot{R}_{b0} \sim R_{b0}/(t_0 - \tau) = R_{b0}(\sqrt{\pi} t_0),$$

получим

$$\nu \leq \frac{\dot{R}_b}{c\beta} \sim \frac{R_{b0}}{c\beta t_0 \sqrt{\pi}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\kappa \frac{I_b}{I_A}}. \tag{28}$$

Таким образом, условие параксиальности холодного самосжимающегося пучка может быть записано в виде, аналогичном (25)

$$\sqrt{\kappa \frac{I_b}{I_A}} \ll 1. \tag{29}$$

Выводы

В настоящей статье показано, что уравнение огибающей РЭП малой плотности может быть записано в виде обыкновенного дифференциального уравнения, описывающего радиальное движение граничных частиц пучка в эффективном потенциальном поле. На основе анализа эффективного потенциала установлена возможность реализации трех различных режимов транспортировки РЭП малой плотности.

Получены аналитические выражения, описывающие радиальную эволюцию пучка в указанных режимах транспортировки.

Список литературы

[1] *Рухадзе А.А., Богданкевич Л.С., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* Физика сильноточных релятивистских электронных пучков. М., 1980. 167 с.

[2] *Диденко А.Н., Григорьев В.П., Усов Ю.П.* Мощные электронные пучки и их применение. М., 1977. 277 с.

[3] *Кузелев М.В., Рухадзе А.А.* Электродинамика плотных электронных пучков в плазме. М., 1990. 331 с.

[4] *Миллер Р.* Введение в физику сильноточных пучков заряженных частиц. М., 1984. 432 с.

[5] *Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* // ЖТФ. 1972. Т. 42. Вып. 3. С. 511–521.

[6] *Колесников Е.К., Курышев А.П., Филиппов Б.В.* // Сб. „Физическая механика". Л.: Изд-во ЛГУ, 1978. Вып. 3. С. 78–93.

[7] *Киквидзе Р.Р., Минаев И.М., Рухадзе А.А., Шкварунец А.Г.* // Физика плазмы. 1984. Т. 10. С. 976–981.

[8] *Lee E.P.* // Phys. Fluids. 1976. Vol. 19. N 1. P. 60–69.

[9] *Kapchinsky I.M., Vladimirsky V.V.* // Proc. Int. Conf. on High Energy Accelerators.: Geneva, CERN. 1959. P. 274–288.

[10] *Lee E.P., Cooper R.K.* // Part. Accel. 1976. Vol. 7. P. 83–95.

[11] *Колесников Е.К., Курышев А.П., Филиппов Б.В.* // Вестн. ЛГУ. Сер. мат., мех., астрон., 1979. № 13. Вып. 3. С. 84–86.

[12] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 2. С. 113–118.

[13] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2004. Т. 74. Вып. 9. С. 103–107.

[14] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 119–125.

[15] *Колесников Е.К., Мануйлов А.С.* // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 8. С. 109–113.

[16] *Валлис Г., Зауэр К., Рухадзе А.А., Зюндер Д., Росинский С.Е., Рухлин В.Г.* // УФН. 1975. Т. 113. № 3. С. 435–462.

[17] *Hammer D.A., Rostoker N.* // Phys. Fluids. 1970. Vol. 13. N 8. P. 1831–1850.