

# Исследование хаотической автоколебательной системы с переменной структурой

© Э.В. Кальянов, Р.В. Беляев, В.И. Калинин

Институт радиотехники и электроники РАН,  
125009 Москва, Россия  
e-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

(Поступило в Редакцию 11 декабря 2007 г.)

Проведено преобразование уравнений Рёсслера к колебательной форме и на основе полученных уравнений записана новая математическая модель управляемой системы с переменной структурой, использующей алгоритм хаотизирующей обратной связи. Численными методами проведен анализ процесса хаотизации колебаний с помощью автокоммутации, когда без нее реализуются лишь регулярные движения. Наряду с исследованиями одной системы с автокоммутацией рассмотрены процессы хаотизации колебаний в сложной системе с переменной структурой, основанной на двух моделях. Выяснено, что в сложной системе реализуется частичная синхронизация хаотизируемых колебаний подсистем, обусловленная наличием общей для них управляющей обратной связи.

PACS: 05.45.-a

## Введение

Проблема управления динамическими системами всегда привлекала внимание исследователей. Это справедливо и применительно к управлению системами, обладающими хаотической динамикой, исследование которых само по себе является одной из наиболее важных и интересных задач современной физики. Их изучению уделяется большое внимание, что позволило внести новые представления в теории колебаний [1–4]. Управляемые хаотические системы важны для практического применения [5,6], в том числе для целей скрытой передачи информации [7] и шифрования [7,8].

Для управления колебаниями, генерируемыми хаотическими системами, используются различные методы [3,9]. Наиболее известны из них способы, основанные на принудительном воздействии внешних сигналов (как регулярных, так и шумоподобных), взаимной синхронизации и применении запаздывающей обратной связи [3].

Эффективным способом управления генерируемыми колебаниями для систем с хаотической динамикой оказался способ, основанный на использовании автокоммутации, обеспечиваемой с помощью так называемого алгоритма хаотизирующей обратной связи (АХОС), позволяющего переводить в режим хаотических колебаний даже простые системы с регулярной динамикой [10–12].

Представляет интерес исследование применения автокоммутации к управлению колебаниями модели, предложенной Рёсслером в [13]. Этому вопросу посвящена настоящая работа. В ней на основе уравнений Рёсслера, преобразованных к колебательной форме, создана новая управляемая модель с переменной структурой, в которой благодаря АХОС обеспечивается автокоммутация колебательного процесса. При этом оказываются возможными как хаотизация колебаний при параметрах, при которых без АХОС возбуждаются регулярные

движения, так и изменение структуры аттракторов при хаотических режимах работы.

## Исходные уравнения и математические модели

В качестве исходных уравнений воспользуемся моделью Рёсслера, уравнения которой приведены в [13] и имеют вид

$$\begin{aligned} dx/dt &= x - z - xy, & dy/dt &= -\alpha y + x^2, \\ dz/dt &= -\beta x - \gamma z + \delta, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\alpha, \beta, \gamma, \delta$  — постоянные коэффициенты.

Математическая модель (1), в отличие от классической системы Рёсслера, предложенной в [14], мало изучена. В ней реализуется хаотический аттрактор, отображающий решение типа точки взрыва. В то же время, как оказалось, в этой системе могут наблюдаться решения с хаосом Лоренца, если задать  $\alpha = \beta = 0.08$ ,  $\gamma = 0.5$ ,  $\delta = 0$ . Естественно, имеются и широкие области параметров, при которых возбуждаются регулярные движения.

Для создания на основе уравнений (1) системы с переменной структурой представим эти уравнения в колебательной форме. Сделаем замену переменных так, что  $x \rightarrow y$ ,  $y \rightarrow z$ ,  $z \rightarrow x$ . Исключив затем переменную  $y(t)$  и вводя функцию  $f(t)$ , обеспечивающую самовоздействие, можем получить уравнения, записанные в форме неавтономной системы

$$\begin{aligned} d^2x/dt^2 + (\gamma - 1)dx/dt + (\beta - \gamma)x &= \varphi(dx/dt, x, z) + d_0f(t), \\ dz/dt + \alpha z &= \psi(dx/dt, x), \end{aligned} \quad (2)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi(dx/dt, x, z) &= -[(dx/dt + \gamma x - \delta)z + \delta], \\ \psi(dx/dt, x) &= [(dx/dt + \gamma x - \delta)\beta]^2,\end{aligned}\quad (3)$$

$d_0$  — постоянный коэффициент.

Преобразования системы уравнений Рёсслера к колебательной форме показывают, что в таком виде она является колебательной системой по переменной  $x$  (первое уравнение системы (2)) с нелинейной правой частью  $\varphi(dx/dt, x, z)$  и инерционностью, определяемой нелинейной функцией  $\psi(dx/dt, x)$  в правой части второго уравнения системы (2) для переменной  $z$ .

Представленная запись системы в виде уравнений (2), (3) пригодна для управления с помощью АХОС. Для обеспечения нерегулярного „самовоздействия“ собственного сигнала и возможности управления колебаниями зададим функцию  $f(t)$  так, чтобы она зависела от колебательного процесса  $x(t)$ . Это можно осуществить, например, с помощью условия

$$f(t) = \begin{cases} u(t) & \text{при } u(t) > v(t), \\ v(t) & \text{при } u(t) < v(t), \end{cases}\quad (4)$$

где переменные  $u(t)$ ,  $v(t)$  являются решениями линейных дифференциальных уравнений (совместно с (2)–(4)), определяющих фильтрующие устройства, а именно

$$\begin{aligned}d^2u/dt^2 + (\omega_u/Q_u)du/dt + \omega_u^2u &= d_u\omega_u^2x, \\ d^2v/dt^2 + (\omega_v/Q_v)dv/dt + \omega_v^2v &= d_v\omega_v^2x,\end{aligned}\quad (5)$$

где  $\omega_u$ ,  $\omega_v$  — собственные частоты фильтров,  $Q_u$ ,  $Q_v$  — добротности фильтров,  $d_u$ ,  $d_v$  — коэффициенты связи.

Система (2)–(5) является самосогласованной. Она определяет управляемую автоколебательную систему с АХОС, основанную на преобразованных уравнениях Рёсслера.

Алгоритм хаотизирующей обратной связи, реализующий переменную структуру при переключениях в дополнительной обратной связи для колебательного уравнения системы (2), реализуется в виде системы из двух параллельно включенных уравнений фильтров второго порядка (5) с разными частотами и добротностями. Эти фильтры считаются все время подключенными к цепи обратной связи со стороны входа, так что они в равной мере подвергаются воздействию сигнала с выхода системы (2). Но со стороны выхода в каждый данный момент подключен лишь один из них, а именно тот, для которого выполняется условие (4).

При проведении расчетов реализации колебаний, генерируемых такой системой, предполагается, что на каждом шаге счета одновременно происходит изменение состояния обоих уравнений системы (5) независимо от того, выход какого фильтра в данный момент времени подключен к обратной связи.

Режим автокоммутиации можно использовать и для хаотизации колебаний генератора, основанного на использовании нескольких автоколебательных систем, описываемых уравнениями (2). Применительно к двум автоколебательным системам можно записать

$$\begin{aligned}d^2x_i/dt^2 + (\gamma_i - 1)dx_i/dt + (\beta_i - \gamma_i)x_i &= \varphi_i(dx_i/dt, x_i, z_i) + d_i f(t), \\ dz_i/dt + \alpha_i z_i &= \psi_i(dx_i/dt, x_i),\end{aligned}\quad (6)$$

где

$$\begin{aligned}\varphi_i(dx_i/dt, x_i, z_i) &= [(dx_i/dt + \gamma_i x_i - \delta_i)z_i + \delta_i], \\ \psi_i(dx_i/dt, x_i) &= [(dx_i/dt + \gamma_i x_i - \delta_i)/\beta_i]^2,\end{aligned}\quad (7)$$

$i = 1, 2$ ;  $d_1, d_2$  — коэффициенты дополнительной (управляющей) связи первой и второй подсистем. Смысл остальных обозначений тот же, что и в уравнениях (3) для параметров без индекса  $i$ .

Условия автокоммутиации (4) пригодны и для обеспечения хаотизации колебаний в системе уравнений (6), (7), но при этом переменные  $u(t)$  и  $v(t)$  должны быть решениями уравнений

$$\begin{aligned}d^2u/dt^2 + (\omega_u/Q_u)du/dt + \omega_u^2u &= d_u\omega_u^2x_1, \\ d^2v/dt^2 + (\omega_v/Q_v)dv/dt + \omega_v^2v &= d_v\omega_v^2x_2,\end{aligned}\quad (8)$$

которые отличаются от системы (5) тем, что на входы фильтров подаются сигналы от различных подсистем. Смысл обозначений в соотношениях (8) тот же, что и соответствующих обозначений без индекса в выражениях для одной системы.

Соотношениями (4), (6)–(8) описываются самосогласованная математическая модель управляемой системы, основанной на двух автоколебательных подсистемах, определяемых уравнениями Рёсслера. Подсистемы являются взаимно связанными, так как функция  $f(t)$ , в соответствии с (4), равна либо  $u(t)$ , либо  $v(t)$ , которые, в свою очередь, связаны, как следует из уравнений (8), со значениями  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ .

Численный анализ проводился методом Рунге–Кутты четвертого порядка. При исследовании автономного режима, когда  $d_0 = 0$ , неизменяемые параметры выбраны так, что  $\beta = 0.4$ ,  $\gamma = 0.004$ ,  $\delta = 0.2$ . Эти же величины использовались при изучении влияния АХОС в системе, описываемой соотношениями (2)–(5); при этом остальные неизменяемые параметры определялись следующими значениями:  $Q_u = Q_v = 40$ ,  $d_u = 0.44$ ,  $d_v = 0.36$ . При исследовании сложной хаотизируемой системы, описываемой соотношениями (4), (6)–(8), параметры выбирались равными следующим значениям:  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0.6$ ,  $\beta_1 = 1$ ,  $\beta_2 = 1.3$ ,  $\omega_u = 1.2$ ,  $\omega_v = 1$ ,  $d_u = 0.66$ ,  $d_v = 0.54$ . Значения остальных параметров ( $\gamma_i$ ,  $\delta_i$ ,  $Q_u$ ,  $Q_v$ ) те же, что и в случае одной автоколебательной системы.

При численном анализе модели с АХОС, основанной на одной автоколебательной системе, первое уравнение

системы (2) представлялось в виде двух уравнений первого порядка путем введения новой переменной, равной  $y = dx/dt$ . Система (5) также записывалась в виде четырех уравнений при введении новых переменных, определяемых производными  $du/dt$  и  $dv/dt$ .

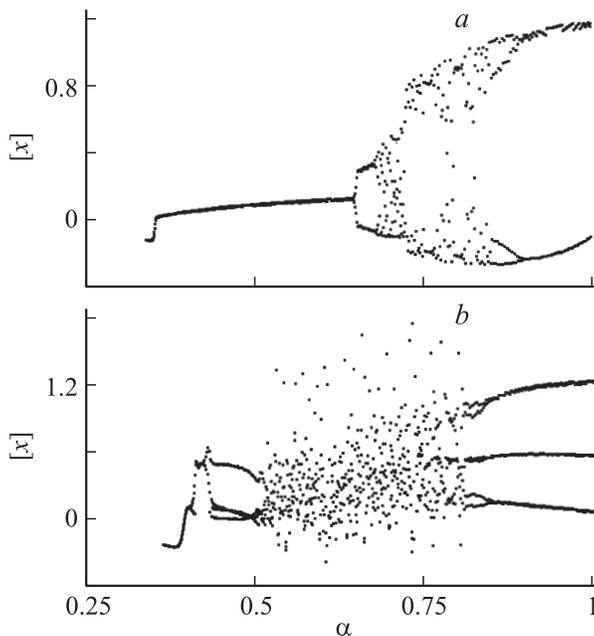
При численном анализе модели с АХОС, основанной на двух автоколебательных системах, уравнения второго порядка систем (6) и (8) представлялись в виде уравнений первого порядка путем введения новых переменных, определяемых производными  $dx_1/dt$ ,  $dx_2/dt$ ,  $du/dt$  и  $dv/dt$ .

При численном анализе рассчитывались реализации колебательных процессов, аттракторы, спектры мощности, характеристические показатели Ляпунова и однопараметрические бифуркационные диаграммы.

## Модель с АХОС, основанная на одной автоколебательной системе

На рис. 1 приведены бифуркационные диаграммы, являющиеся наиболее информативным отображением процессов, происходящих в автоколебательной системе, при адиабатическом изменении одного из параметров. Они рассчитаны при начальных условиях для переменных, равных 0, 1, и показывают изменение максимальных значений колебаний  $x(t)$  (обозначенных через  $[x]$ ) при увеличении параметра  $\alpha$ . Рис. 1, *a* рассчитан при обычной (автономной) работе (при  $d_0 = 0$ ), а рис. 1, *b* — при работе с АХОС, когда  $d_0 = 0.4$ ,  $\omega_u = 0.7$ ,  $\omega_v = 1.1$ .

Как видно (см. рис. 1, *a*), бифуркация Андронова–Хопфа в автономной системе возникает при достижении



**Рис. 1.** Изменение максимальных значений колебательного процесса  $x(t)$  в зависимости от параметра  $\alpha$  при автономном режиме работы (*a*) и при работе с АХОС (*b*).

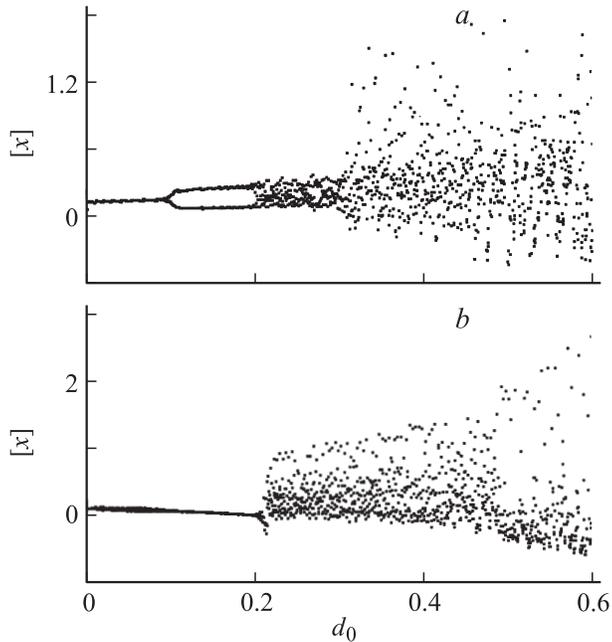
параметром  $\alpha$  значения  $\alpha \approx 0.35$ . При  $\alpha \approx 0.65$  происходит бифуркация удвоения периода колебательного процесса, а когда  $\alpha > 0.68$  — переход к хаосу, который прерывается при достижении параметром дополнительной обратной связи значения  $d_0 = 0.72$ . Вторая, относительно узкая область хаотизации колебаний, сосредоточена вблизи значения  $\alpha = 0.8$ . При дальнейшем адиабатическом увеличении  $\alpha$  возникают обратные бифуркации удвоения периода, в результате которых при  $\alpha > 0.89$  реализуются колебания, которым в фазовом пространстве соответствует двухоборотный предельный цикл.

При работе системы с АХОС (см. рис. 1, *b*) после возбуждения автоколебаний и сложных бифуркаций (в интервале изменения  $\alpha \in [0.38; 0.53]$ ) возникает нерегулярный разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса, что свидетельствует о хаотизации движений. Область хаоса занимает относительно широкий интервал изменения параметра  $\alpha$  и простирается до значения  $\alpha \approx 0.8$ , после чего возникают шеститактные колебания, переходящие при  $\alpha > 0.82$  в трехтактные движения.

Изменение максимального характеристического показателя Ляпунова находится в соответствии с бифуркационными диаграммами, представленными на рис. 1. При  $d_0 = 0$  значения  $\alpha$ , при которых реализуется превышение величины этого показателя над нулевым значением, соответствуют величинам  $\alpha$ , при которых происходит нерегулярный разброс точек на диаграмме (рис. 1, *a*). В случае работы системы с АХОС хаотизация, диапазон которой определяется по максимальным значениям характеристического показателя Ляпунова, занимает тот же интервал значений параметра  $\alpha$ , в котором возникает нерегулярный разброс точек на диаграмме (рис. 1, *b*).

Бифуркационные диаграммы, рассчитанные при адиабатическом уменьшении  $\alpha$ , имеют несколько иной вид: проявляется гистерезис, присущий нелинейной системе. В случае  $d_0 = 0$  на диаграмме, отображающей изменение  $[x]$  в процессе уменьшения  $\alpha$ , остается одна область хаотических движений, занимающая интервал  $\alpha \in [0.76; 0.82]$ . Значение  $\alpha$ , соответствующее переходу от двухтактных колебаний к однитактным движениям, снижается до величины  $\alpha \approx 0.6$ , а значение  $\alpha$ , соответствующее обратной бифуркации удвоения периода с установлением движений, которым в фазовом пространстве соответствует простой предельный цикл, „затягивается“ по сравнению с диаграммой, представленной на рис. 1, *a*, до величины  $\alpha \approx 0.29$ . В случае  $d_0 = 0.4$  ( $\omega_u = 0.7$ ,  $\omega_v = 1.1$ ) при уменьшении параметра  $\alpha$  происходит незначительное смещение области значений  $\alpha$ , в которой реализуется нерегулярный разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса. Он занимает интервал  $\alpha \in [0.5; 0.78]$ . Существенное изменение претерпевают кривые, отображающие поведение регулярных движений при  $\alpha < 0.5$ .

Расширение области хаотических движений возможно путем увеличения дополнительной обратной связи. При



**Рис. 2.** Изменение максимальных значений колебательного процесса  $x(t)$  в зависимости от параметра дополнительной обратной связи при  $\alpha = 0.601\ 077\ 5$ : *a* —  $\omega_u = 0.7$ ,  $\omega_v = 1.1$ , *b* —  $\omega_u = 0.9$ ,  $\omega_v = 1.3$ .

увеличении параметра  $d_0$  до 0.6 происходит расширение области хаотизации в сторону увеличения  $\alpha$  до 1.2. При  $d_0 = 0.6$  хаос реализуется в процессе увеличения  $\alpha$  в интервале  $\alpha \in [0.5; 1.22]$ .

При фиксированных значениях параметра  $\alpha$ , определяющих режимы регулярных колебаний, увеличение параметра  $d_0$  приводит к хаотизации движений. На рис. 2, *a* показано изменение максимальных значений колебательного процесса  $x(t)$  в зависимости от параметра дополнительной обратной связи (при  $\omega_u = 0.7$ ,  $\omega_v = 1.1$ ), когда без АХОС (при  $d_0 = 0$ ) возбуждаются регулярные одноктные колебания, соответствующие значению  $\alpha = 0.601\ 077\ 5$  на диаграмме рис. 1, *a*. Как видно, при увеличении параметра дополнительной обратной связи хаотизация движений происходит через удвоение периода колебаний (по сценарию Фейгенбаума).

Бифуркация удвоения периода колебаний реализуется при достижении параметром дополнительной обратной связи значения  $d_0 \approx 0.1$ . При  $d_0 \approx 0.2$  возникают сложные бифуркации, а при  $\alpha \approx 0.3$  — нерегулярный разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса, что свидетельствует о переходе в режим хаотических движений. Режим хаотических колебаний срывается при достижении параметром дополнительной обработки связи значения  $d_0 \approx 1.2$ .

Следует заметить, что при выбранных параметрах фильтрующих элементов величины коэффициента дополнительной обратной связи  $d_0$ , при которых происходит удвоение периода колебаний, а соответственно и значения этого коэффициента, соответствующие пере-

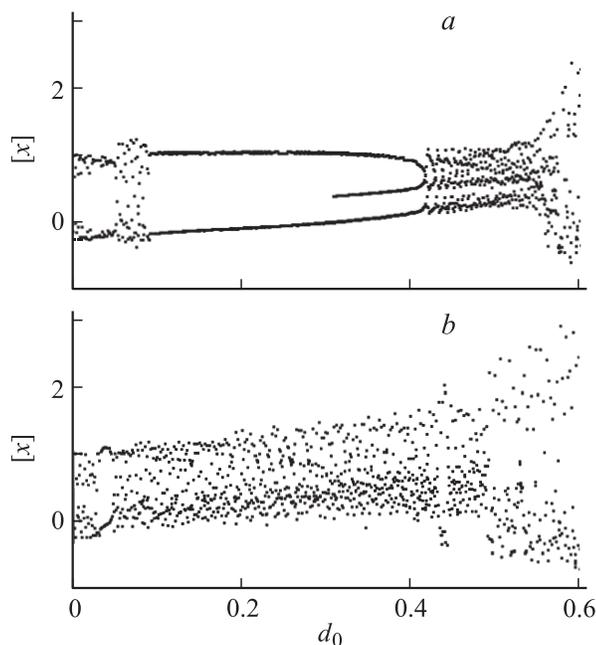
ходу к хаосу, возрастают по мере уменьшения  $\alpha$ . При этом снижается значение  $d_0$ , при котором происходит дехаотизация движений. Так, при  $\alpha = 0.56$  переход к двухтактным движениям реализуется при  $d_0 = 0.41$ , а при  $\alpha = 0.52$  — при  $d_0 = 0.45$ . Соответствующие значения коэффициента дополнительной обратной связи, при которых происходит переход к хаосу, равны  $d_0 = 0.44$  и 0.46. При этом значения коэффициентов, определяющих дехаотизацию колебаний, равны  $d_0 = 0.66$  (при  $\alpha = 0.56$ ) и 0.58 (при  $\alpha = 0.52$ ). Таким образом, область хаотических движений, реализующаяся в интервале  $d_0 \in [0.3; 0.7]$  при  $\alpha \approx 0.6$ , сужается до интервала  $d_0 \in [0.46; 0.58]$  при  $\alpha = 0.52$ . Расширение этой области хаотизации возможно путем соответствующего выбора параметров фильтрующих элементов.

Изменение собственных частот фильтрующих элементов оказывает существенное влияние на процессы хаотизации. Бифуркационные диаграммы хорошо отображают это влияние. Так, при сдвиге собственных частот фильтрующего элемента в область более высоких частот (до  $\omega_u = 0.8$ ,  $\omega_v = 1.2$ ) бифуркационное значение  $\alpha$ , соответствующее удвоению периода, снижается до  $\alpha = 0.06$ , а хаос реализуется при  $\alpha > 0.18$ . Однако четкой закономерности нет. При дальнейшем увеличении значений собственных частот (при  $\omega_u = 0.9$ ,  $\omega_v = 1.3$ ) реализуется жесткий переход от одноктных движений к хаосу, когда  $\alpha \approx 0.22$  (см. рис. 2, *b*). Область двухтактных колебаний наблюдается лишь при  $d_0 < 0$ , что отображается слабым раздвоением линии, соответствующей максимальным значениям колебательного процесса.

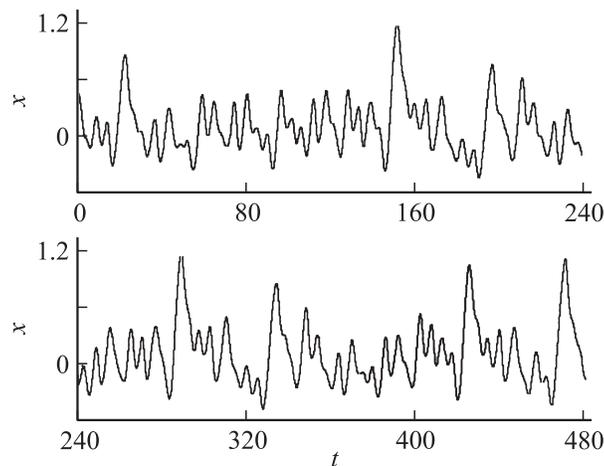
В случае, когда без автокоммутации в системе возбуждаются сложные или хаотические движения, использованием АХОС обеспечивает изменение структуры колебаний и может приводить как к большему развитию хаоса, так и к дехаотизации. Это иллюстрируется бифуркационными диаграммами, представленными на рис. 3, который рассчитан при параметрах и начальных условиях, соответствующих значению  $\alpha = 0.801\ 094\ 2$  на диаграмме рис. 1, *a*.

Так, в случае, когда без АХОС возбуждается хаос, бифуркационная диаграмма, показывающая изменение максимальных значений колебательного процесса в зависимости от параметра дополнительной обратной связи, отображает при  $\omega_u = 0.7$ ,  $\omega_v = 1.1$  чередование сложных и хаотических движений по мере увеличения этого параметра от  $d_0 = 0$  до 0.08 (рис. 3, *a*). В интервале значений  $d_0 \in [0.8; 0.42]$  происходит дехаотизация колебательного процесса с возбуждением двухтактных (при  $d_0 < 0.3$ ) и трехтактных (при  $d_0 > 0.3$ ) колебаний. Измененные хаотические движения реализуются при  $d_0 > 0.42$ , причем при  $d_0 > 0.55$  наблюдаются хаотические колебания с переключением.

Если частоты фильтров, как и в случае, иллюстрируемом рис. 2, *b*, равны значениям  $\omega_u = 0.9$ ,  $\omega_v = 1.3$ , то бифуркационная диаграмма, рассчитанная для интервала изменения параметра  $d_0$  от 0 до 0.6, отображает только



**Рис. 3.** Изменение максимальных значений колебательного процесса  $x(t)$  в зависимости от параметра дополнительной обратной связи при  $\alpha = 0.8010942$ : *a* —  $\omega_u = 0.7$ ,  $\omega_v = 1.1$ , *b* —  $\omega_u = 0.9$ ,  $\omega_v = 1.3$ .



**Рис. 4.** Фрагменты реализаций колебательного процесса  $x(t)$  при хаотизации движений с помощью АХОС.

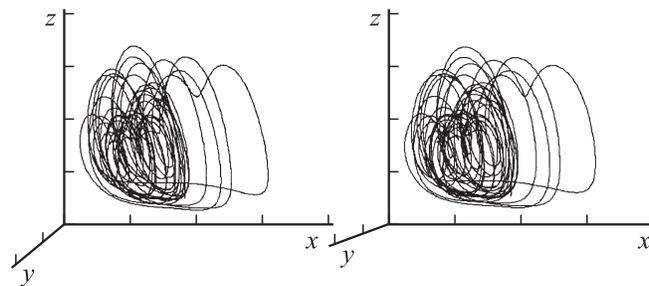
нерегулярный разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса (рис. 3, *b*). В соответствии с этой диаграммой хаос с переключением движений развивается при  $d_0 > 0.45$ .

На рис. 4 приведены характерные фрагменты реализаций колебательного процесса при хаотизации движений с помощью АХОС, рассчитанные в интервале времени  $t \in [0; 480]$  при параметрах, соответствующих значению  $d_0 = 0.4001163$  на диаграмме, представленной на рис. 2, *a*.

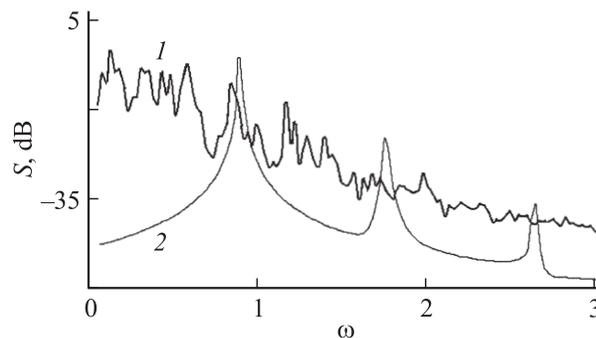
На рис. 5 показано стереоскопическое изображение аттрактора, соответствующего колебаниям в интервале времени  $T \in [0; 240]$ , которые отображаются соответствующим фрагментом реализации, представленным на рис. 4.

На рис. 6 иллюстрируется спектр мощности хаотических колебаний (кривая 1). Кривой 2 на рис. 6 для наглядности показан спектр мощности „исходных“ (регулярных) колебаний, которые реализуются при параметрах, соответствующих значению  $d_0 = 0$  на рис. 2, *a*.

На представленных фрагментах реализаций колебаний системы с АХОС видна перемежаемость типа „хаос–хаос“, которая обусловлена нерегулярным переключением движений между двумя фильтрующими элементами, имеющими различные собственные частоты. Видны нерегулярно перемежающиеся „высокочастотные“ („быстрые“) и „низкочастотные“ („медленные“) движения. Низкочастотные осцилляции имеют, как правило, большие выбросы хаотических движений в область положительных значений  $x$ . Аттрактор отображает запутанные движения фазовых траекторий. Объемный вид аттрактора, представленный с помощью двух его изображений (для левого и правого глаза), удобно рассматривать с помощью стереоскопа. Можно также использовать метод, описанный в работе [15], фрагмент которой процитирован в подрисуночной подписи.



**Рис. 5.** Стереоскопическое изображение аттрактора. „Для получения объемного изображения поставьте лист бумаги перпендикулярно плоскости страницы и рассматривайте левый график левым глазом, а правый — правым. Подберите такое положение головы, при котором два плоскостных изображения сольются в одно объемное.“



**Рис. 6.** Спектры мощности колебаний при работе системы с АХОС (1) и при  $d_0 = 0$  (2).

Спектр мощности, соответствующий колебаниям, иллюстрируемым фрагментами реализаций (см. рис. 4), является непрерывным и в соответствии с перемежаемостью типа „хаос–хаос“ имеем „выбросы“ спектральной плотности мощности хаотических колебаний вблизи частот, определяющих собственные частоты фильтрующих элементов, а также на частоте, близкой к частоте исходных колебаний при регулярном режиме работы.

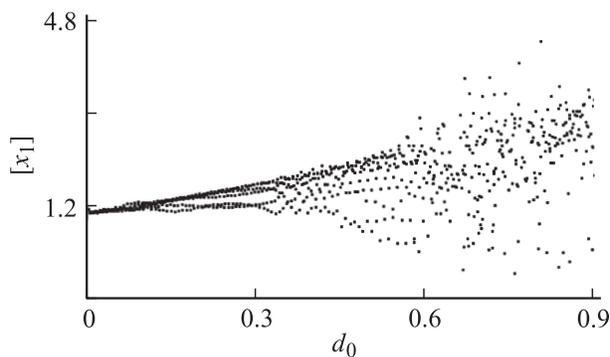
Приведенные результаты численного анализа свидетельствуют об эффективности использования АХОС для реализации хаотических движений, когда в обычном режиме возбуждаются лишь регулярные колебания. Путем изменения структуры колебаний с помощью АХОС можно осуществлять кодирование сигнала в системах скрытой связи, основанных на применении хаотических сигналов для скрытой передачи информации. При этом использование АХОС существенно затрудняет возможность определения по реализации колебаний параметров самой системы, формирующей хаотические колебания. Рассмотренная система может быть применена для шифрования информации методом, основанным на использовании хаотических решений детерминированных уравнений.

### Модель с АХОС, основанная на двух автоколебательных системах

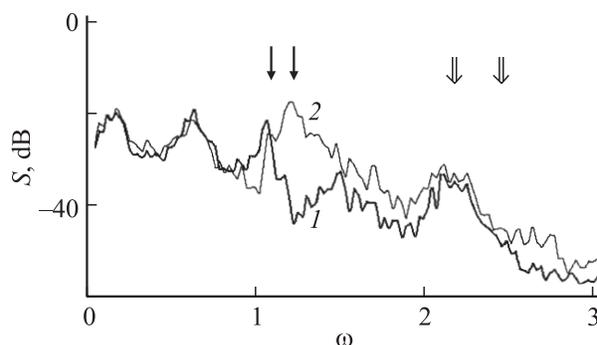
При хаотизации двух автоколебательных систем с помощью АХОС использовались режимы регулярных колебаний, когда параметры парциальных систем различались только значениями параметров  $\beta_1$  и  $\beta_2$ . При исходных (регулярных) режимах работы подсистем частота генерации первой подсистемы имела значение 1.08, а второй —  $\omega = 1.2$ . При этом изменение амплитуд колебаний мало различалось; для первой и для второй подсистем значения амплитуд находились соответственно в пределах от  $-1.4$  до  $0.7$  и от  $-1.3$  до  $0.9$ . При выбранных параметрах подсистем собственные частоты фильтров системы с АХОС выбраны в соответствии с частотами генерации, причем, как уже отмечалось, так, что  $\omega_u = 1.2$ ,  $\omega_v = 1$ .

На рис. 7 представлена бифуркационная диаграмма, иллюстрирующая изменение колебательного процесса в одной из подсистем (в первой) при увеличении параметра дополнительной обратной связи. Как видно, при увеличении этого параметра до значения  $d_0 \approx 0.6$  происходит „мягкое“ изменение структуры колебаний с усложнением движений от одноктактных до девятитактных. Четко выраженный нерегулярный разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса, реализуется при  $d_0 > 0.64$ .

На рис. 8 кривыми 1 и 2 представлены спектры мощности, иллюстрирующие колебания в подсистемах при наличии АХОС. Они рассчитаны при  $d_0 = 0.8$ . Стрелками (одинарными) показано местоположение частот генерации (основных составляющих) при работе



**Рис. 7.** Изменение максимальных значений колебательного процесса  $x_1(t)$  в одной из двух парциальных подсистем в модели, основанной на двух автоколебательных системах, при увеличении параметра дополнительной обратной связи.



**Рис. 8.** Спектры мощности, соответствующие колебаниям в первой (1) и второй (2) подсистемах, при работе системы с АХОС.

системы без АХОС. Двойные стрелки соответствуют местоположению вторых гармоник. При этом короткие стрелки относятся к первой подсистеме, а длинные — ко второй. Видно, что при работе АХОС спектры мощности отображают хаотические колебания. Они являются непрерывными и занимают широкий диапазон частот. Их различие четко выражено в диапазоне частот  $\omega \in [1; 1.4]$ . При частотах за пределами этого диапазона в обеих подсистемах реализуется практически одинаковое изменение спектральной плотности мощности хаотических колебаний. В этом проявляется эффект частичной синхронизации колебаний подсистем. Частичная синхронизация проявляется также при анализе фазовых траекторий: как было выяснено, траектории движений обеих подсистем в проекции на плоскость  $\{x_1, x_2\}$  имеют заметно выраженную преимущественную ориентацию движений в направлении множества  $x_1 = x_2$ .

Приведенные результаты свидетельствуют о возможности хаотизации колебаний двух систем, основанных на преобразованных уравнениях Рёсслера. Благодаря АХОС реализуется взаимодействие между подсистемами, приводящее к эффекту частичной взаимной синхронизации колебаний.

## Выводы

Уравнения Рёсслера могут быть записаны в колебательной форме, в которой сохраняются решения, отображающие режимы как регулярных, так и хаотических движений. На основе преобразованных уравнений Рёсслера возможно создание автоколебательной системы с АХОС, обладающей развитым хаосом при параметрах, при которых без автокоммутации возбуждаются регулярные колебания. Возможна и дехаотизация движений при использовании АХОС, когда без этого алгоритма („автономно“) реализуется хаос.

Усложнение системы с АХОС путем использования двух подсистем, описываемых преобразованными уравнениями Рёсслера, также позволяет получать хаотические колебания на основе регулярных режимов, которые возникают без АХОС. При этом возникает частичная хаотическая синхронизация колебаний подсистем. Усложнение системы существенно затрудняет ее реконструкцию известными методами, что важно при использовании хаоса для скрытой передачи информации и шифрования.

Рассмотренный подход к хаотизации колебаний открывает путь создания полностью алгоритмических моделей генератора цифровых хаотических последовательностей, включающих как сам алгоритм цифрового генератора, так и алгоритм АХОС. Этот вариант позволит формировать случайные цифровые последовательности на поле целых чисел с управляемым изменением характеристики распределения вероятностей.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты № 07-02-00351, 07-07-00195, 07-07-12054).

## Список литературы

- [1] *Неймарк Ю.И., Ланда П.С.* Стохастические и хаотические колебания. М.: Наука, 1987. 424 с.
- [2] *Дмитриев А.С., Кислов В.Я.* Стохастические колебания в радиофизике и электронике. М.: Наука, 1989. 280 с.
- [3] *Анищенко В.С., Вадивасова Т.Е., Астахов В.В.* Нелинейная динамика хаотических и стохастических систем. Фундаментальные основы и избранные проблемы / Под ред. В.С. Анищенко. Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 1999. 368 с.
- [4] *Кузнецов С.П.* Динамический хаос (курс лекций). М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2001. 296 с.
- [5] *Дмитриев А.С., Панас А.И.* Динамический хаос. Новые носители информации для систем связи. М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2002. 252 с.
- [6] *Залогин Н.Н., Кислов В.В.* Широкополосные хаотические сигналы в радиотехнике и информационных системах. М.: Радиотехника, 2006. 208 с.
- [7] *Гуляев Ю.В., Беляев Р.В., Воронцов Г.М.* и др. // Радиотехника и электроника. 2003. Т. 48. № 10. С. 1157–1185.
- [8] *Кальянов Г.Н., Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 24. С. 45–50.
- [9] *Ксиу-Кин Фенг, Ки Шен* // Письма в ЖТФ. 2007. Т. 33. Вып. 13. С. 78–84.

- [10] *Кальянов Э.В.* // Письма в ЖТФ. 2006. Т. 32. Вып. 6. С. 29–35.
- [11] *Кальянов Э.В.* // Радиотехника и электроника. 2007. Т. 52. № 3. С. 373–380.
- [12] *Кальянов Э.В.* // Нелинейный мир. 2007. Т. 5. № 3. С. 143–147.
- [13] *Rossler O.E.* // Z. Naturforsch. 1976. Bd 31A. N 12. S. 1664–1670.
- [14] *Rossler O.E.* // Phys. Lett. 1976. Vol. 57A. N 5. P. 397–398.
- [15] *Хакен Г.* Синергетика: Иерархии неустойчивостей в самоорганизующихся системах и устройствах. М.: Мир, 1985. 423 с.