01;03

Связанные волны линейной и угловой скоростей и температуры в жидкости с внутренним вращением

© А.Ф. Кабыченков

Институт радиотехники и электроники РАН,
141190 Фрязино, Московская обл., Россия
e-mail: akab@mail.cplire.ru

(Поступило в Редакцию 15 апреля 2008 г. В окончательной редакции 2 октября 2008 г.)

Записаны уравнения движения локально неравновесной жидкости с внутренним вращением. Рассмотрен термо-спиновый эффект. Показано, что в жидкости с внутренним вращением могут распространяться высокочастотные поперечные связанные волны линейной скорости, угловой скорости внутреннего вращения и температуры. Определены дисперсионное соотношение и частотная зависимость коэффициента затухания. Сравнение теоретической и экспериментальной дисперсии скорости поперечного звука показывает удовлетворительное согласие теории с экспериментом. Низкочастотные поперечные волны не проникают в жидкость, они затухают на длине волны. Показано, что в жидкости с внутренним вращением существуют частоты и соответствующие им волновые числа, при которых либо волны не затухают, либо отсутствует сдвиг фазы в скин-слое. Установлено, что спектр возбуждений может содержать частоту отсечки или энергетическую щель благодаря взаимодействию полей линейной и угловой скорости. Определены дисперсия и затухание связанных волн в окрестности точек синхронизма, где происходит резонансное взаимодействие несвязанных волн.

PACS: 03.65.Ge

Введение

Жидкость обладает свойством текучести, которое обусловлено отсутствием сдвиговых напряжений в жидкости [1]. По этой причине поперечные упругие волны не распространяются в однородной жидкости [2]. Колебание погруженной в жидкость пластины в ее собственной плоскости вызывает за счет вязкости поперечные смещения в жидкости вдоль нормали к поверхности пластины [3]. Однако эти смещения затухают в приповерхностном слое (на длине волны) и не могут рассматриваться в качестве поперечных волн [3]. Тем не менее гиперзвуковые поперечные волны экспериментально обнаружены в маловязких жидкостях [4,5]. Эти волны возбуждались на частоте $0.5-1.0$ GHz с помощью кристаллов кварца или ниобата лития, помещенных в сверхвысокочастотный резонатор.

Возможно, что распространение поперечных волн обусловлено локально неравновесным состоянием жидкости на гиперчастотах. Движение молекул жидкости включает два процесса — колебания относительно некоторого положения в течение времени „оседлости“ и перескока в другое положение за время самодиффузии [6]. Если период внешних воздействий меньше времени „оседлости“, то жидкость проявляет эффективную сдвиговую жесткость. Следовательно, на гиперчастотах возможен поперечный звук. С понижением температуры скорость поперечных волн будет возрастать, и волны будут эффективно возбуждаться на более низких частотах.

Жидкость как сплошная среда характеризуется усредненными по физически бесконечно малому объему величинами [1]. В классической среде этими величинами является плотность массы, энергии и импульса. Однако заключенные в элементарном объеме частицы обладают не только импульсом, но и моментом импульса (орбитальные моменты, а также спины электронов и ядер). Следовательно, наряду с плотностью импульса среда характеризуется плотностью момента импульса (внутренним вращением) [7–9]. Плотность полного момента импульса складывается из плотностей орбитального (внешнего) момента и внутреннего момента (плотности спина). Изменение внутреннего момента импульса во времени вызывается объемным моментом силы, определяемым антисимметричной частью тензора напряжений [7–9]. При постоянном внутреннем моменте импульса тензор напряжений будет симметричным. При симметричном тензоре напряжений внешний и внутренний моменты импульса сохраняются по отдельности. В общем случае на материальную точку среды действуют не только объемные и поверхностные силы, но также объемные и поверхностные моменты сил [7–9].

В поперечной волне поле скоростей обладает завихренностью (локальным внешним вращением). В силу закона сохранения полного момента импульса внешнее вращение вызывает внутреннее [7–9]. Связь внешнего и внутреннего вращений продемонстрирована гиромагнитными эффектами. Определяющая изменение плотности спина антисимметричная часть тензора напряжений пропорциональна разности скоростей внешнего и внутреннего вращений [8,9]. Скорость внешнего вращения представляет собой половину вихря линейной скорости, а скорость внутреннего вращения определяется как отношение плотности спина к плотности среднего момента инерции. Указанная разность скоростей исчезает за время релаксации внутреннего вращения. Ввиду малости этого времени ($10^{-9}-10^{-11}$ s для суспензий частиц с характерным размером 10^{-5}–10^{-6} cm) внутреннее вращение обычно не учитывается при рассмотрении вязкого течения [8,9]. Однако период гиперзвука сравним с этим временем релаксации и, следовательно, распространение гиперзвука необходимо рассматривать с учетом внутреннего вращения.

Связь внутреннего вращения и скорости сдвиговых смещений позволяет возбуждать волны внутреннего вращения (спиновые волны) через поперечный гиперзвук. В области гиперчастот адиабатическое приближение становится неприменимым. Поэтому здесь необходимо учитывать релаксацию внутренней энергии наряду с внутренним вращением. Таким образом, при рассмотрении гиперзвука среду следует характеризовать векторными полями линейной и угловой скоростей и скалярным полем температуры, определенных на скалярном поле плотности массы.

В настоящей работе рассматриваются гиперзвуковые возбуждения жидкости с учетом изменений внутреннего вращения и температуры в рамках локально неравновесной термодинамики, а также объясняются экспериментальные результаты [4,5].

Жидкость с внутренним вращением может рассматриваться в качестве модели для изучения связанных векторных и скалярных полей. Такие модели имеют место в теории поля. Связанные волны линейной и угловой скоростей и температуры представляют собой возбуждение векторных полей и скалярного поля.

Уравнения неравновесной термодинамики

В рамках неравновесной термодинамики движение однокомпонентной сплошной среды описывается уравнениями баланса, выражающими законы сохранения массы, импульса и момента импульса

$$\rho^{\bullet} + \rho v_{n,n} = 0, \tag{1}$$

$$\rho \mathbf{v}^{\bullet} + \mathbf{P}_{n,n} = 0, \tag{2}$$

$$\rho \mathbf{s}^{\bullet} + \mathbf{R}_{n,n} = \mathbf{N}, \tag{3}$$

где ρ — плотность среды, $\mathbf{v}$ — скорость материальной точки среды, $()^{\bullet} \equiv d()/dt = ()_{,t} + v_n()_{,n}$ — материальная производная, $()_{,t} \equiv \partial()/\partial t$, $()_{,n} \equiv \partial()/\partial x_n$, x_n — декартовы координаты, $\mathbf{P}_n = \mathbf{e}_i P_{in}$, $\mathbf{e}_i$ — базисный вектор, P_{in} — тензор линейных напряжений (плотность поверхностных сил), $\mathbf{s} = \theta\boldsymbol{\omega}$ — плотность внутреннего момента импульса (плотность спина), θ — плотность (среднего) момента инерции на единицу массы, $\boldsymbol{\omega}$ — угловая скорость внутреннего вращения, физический смысл которой следует из соотношения $\boldsymbol{\omega} = \Sigma\theta_i\boldsymbol{\omega}_i/\theta$; $\theta = \Sigma\theta_i/\Sigma m_i$, θ_i, m_i и $\boldsymbol{\omega}_i$ — моменты инерции, масса и угловая скорость заключенных в элементарном объеме частиц, $\mathbf{R}_n = \mathbf{e}_i R_{in}$, R_{in} — тензор угловых напряжений (плотность поверхностных моментов сил), $\mathbf{N} = -2\mathbf{P}$ — плотность объемных моментов сил, обусловленных несимметричностью тензора линейных напряжений, $\mathbf{P} = -(1/2)\mathbf{e}_i e_{ink} P^a_{nk}$ — вектор, дуальный антисимметричной части $P^a_{nk} = -e_{nki}P_i$ тензора линейных напряжений, e_{ink} — единичный антисимметричный тензор [8].

Уравнение баланса энтропии имеет вид

$$\rho s^{\bullet} + J^s_{n,n} = \sigma, \tag{4}$$

где s — плотность энтропии, $\mathbf{J}^s = T^{-1}\mathbf{q}$ — поток энтропии, T — температура, $\mathbf{q}$ — тепловой поток (поток внутренней энергии).

Производство энтропии представляет собой положительно определенную билинейную форму

$$\sigma = \mathbf{J}^n\mathbf{K}^n \geq 0,$$

в которой обобщенные термодинамические потоки и сопряженные им термодинамические силы выражаются в виде

$$\begin{aligned}
J^1_i &= q_i, & K^1_i &= T^{-1}_i,\\
J^2_{ij} &= v_{ij}, & K^2_{ij} &= -T^{-1}P_{ji},\\
J^3_i &= \omega_i - \Omega_i, & K^3_i &= -T^{-1}2P_i,\\
J^4_{ij} &= \omega_{ij}, & K^4_{ij} &= -T^{-1}R_{ji},\\
J^5_i &= V_i, & K^5_i &= -T^{-1}2R_i,
\end{aligned} \tag{5}$$

где $P_{ij} = P^s_{ij} - P^e_{ij}$ — симметричный тензор линейных напряжений, обусловленный вязкостью среды, $P^e_{ij} = p\delta_{ij}$ — тензор равновесных линейных напряжений, δ_{ij} — единичный симметричный тензор, $p = (1/3)P^e_{ii}$ — давление, $v_{ij} = (v_{j,i} + v_{i,j})/2$ — симметричный тензор линейной скорости деформации, $\boldsymbol{\Omega} = (1/2)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{v}$ — угловая скорость локального внешнего вращения (вихрь линейной скорости), $\omega_{ij} = (\omega_{j,i} + \omega_{i,j})/2$ — симметричный тензор угловой скорости деформации, $R_{ij} = R^s_{ij}$ — симметричный тензор угловых напряжений, обусловленный вязкостью среды, $\mathbf{R} = -(1/2)\mathbf{e}_i e_{ijn} R^a_{jn}$ — вектор, дуальный антисимметричной части $R^a_{jn} = -e_{jni}R_i$ тензора угловых напряжений, $\mathbf{V} = (1/2)\,\mathrm{rot}\,\boldsymbol{\omega}$ — „внутренняя“ скорость (вихрь угловой скорости) [7–10].

Термодинамические переменные связаны уравнениями состояния $s = s(T, \rho)$ и $p = p(T, \rho)$. Термодинамические потоки и силы в (5) связаны определяющими уравнениями, которые при слабых силах можно представить в форме линейных интегральных соотношений

$$\mathbf{J}^n(t) = \int_{-\infty}^{t} L^{nm}(t, t')\mathbf{K}^m(t')dt', \tag{6}$$

где $L^{nm}(\mathbf{Q})$ — кинетические коэффициенты, $\mathbf{Q} \equiv (Q^1)$ — параметры, включающие термодинамические переменные. Выражение (6) показывает, что поток в данный момент времени определяется обобщенными силами во все предыдущие моменты времени, т.е. связь (6) учитывает „память“ среды.

Кинетические коэффициенты удовлетворяют симметрийным уравнениям

$$R^\wedge L^{nm}_{ij..}(r^\wedge \mathbf{Q}) = L^{nm}_{i'j'..}(\mathbf{Q}),$$

$$\underline{c}\,R^\wedge L^{nm}_{ij..}(\underline{c}\,r^\wedge \mathbf{Q}) = L^{nm}_{i'j'..}(\mathbf{Q}),$$

$$c'R^\wedge L^{mn}_{ji..}(c'r^\wedge \mathbf{Q}) = L^{nm}_{i'j'..}(\mathbf{Q}),$$

$$\underline{c}\,c'R^\wedge L^{mn}_{ji..}(\underline{c}\,c'r^\wedge \mathbf{Q}) = L^{nm}_{i'j'..}(\mathbf{Q}), \tag{7}$$

где $R^\wedge L^{nm}_{ij..} \equiv (r_{i'i} r_{j'j..}) L^{nm}_{ij...}(r^\wedge \mathbf{Q})$ — преобразование коэффициентов при простых поворотах, $r^\wedge$ — оператор простого поворота, применяемый к каждому нижнему индексу, $r_{i'i}$ — матрица поворота, $c = c^n c^m = \pm 1$, $c = \underline{c}, c'$, $c^\wedge \mathbf{K}^m = c^m \mathbf{K}^m$ — определяющее c^m соотношение, $c^\wedge = \underline{1}, 1'$ — операторы пространственной и временной инверсии, $\underline{c}^m$, $c'^m = 1$ для векторов $\mathbf{K}^m$ четного (i) типа (аксиальный i-вектор, $\mathbf{K}^{2,3}$), $\underline{c}^m = -1$, $c'^m = 1$ — для векторов электрического (e) типа (полярный i-вектор, $\mathbf{K}^{1,4,5}$), $\underline{c}^m = 1$, $c'^m = -1$ для векторов магнитного (m) типа (аксиальный c-вектор), $\underline{c}^m = -1$, $c'^m = -1$ — для векторов магнитоэлектрического (me) типа (полярный c-вектор) [10–12].

Перестановка пар индексов в (7) обусловлена принципом причинности. В симметричных относительно $1'$ средах третье уравнение из (7) дает классическое симметрийное соотношение $c' L^{mn}_{ji}(-\mathbf{s}, -\mathbf{B}) = L^{nm}_{ij}(\mathbf{s}, \mathbf{B})$, причем $c' = 1$ в случае $\mathbf{K}^n$ и $\mathbf{K}^m$, изменяющих или не изменяющих знак одновременно под действием $1'$, и $c' = -1$ в противоположном случае, когда только один из векторов изменяет знак, $\mathbf{B}$ — магнитное поле [12,13].

В центросимметричных изотропных средах из перекрестных кинетических коэффициентов будут отличными от нуля, как видно из (7), только коэффициенты L^{15}_{ij} и L^{51}_{ij}.

Уравнения движения локально неравновесной среды с внутренним вращением

Ограничиваясь двумя членами в разложении термодинамических сил в (6) в точке t, используя (7) с учетом симметрии среды, определяющие уравнения линейных напряжений можно записать в виде

$$P_{ij} + \tau_t^{\,v} P_{ij,t} = f_{ij}, \quad f_{ij} = P_{0ij} - \delta_{ij} l^v (\tau_l^{\,v} - \tau_v^{\,v}) P_{\mu\mu,t},$$

$$P_{0ij} = -2\eta^v (v_{ij} - \delta_{ij} v_{\mu\mu}/3) + \delta_{ij} \xi^v v_{\mu\mu},$$

$$P_{\mu\mu} + \tau_v^{\,v} P_{\mu\mu,t} = -3\xi^v v_{\mu\mu},$$

$$\mathbf{P} + \tau_r^{\,v} \mathbf{P}_t = \lambda^v (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega}), \tag{8}$$

где $\tau_t^{\,v}$ и $\tau_l^{\,v}$ — время поперечной и продольной релаксаций симметричных линейных напряжений к локально равновесному значению, δ_{ij} — единичный тензор, $l^v = L^{22}_{12}(0)/2L^{22}_{44}(0)$ (далее в кинетических коэффициентах используется сокращенная запись индексов), P_{0ij} — тензор локально равновесных вязких напряжений, $P_{\mu\mu} = P_{11} + P_{22} + P_{33}$, $v_{\mu\mu} = \operatorname{div} \mathbf{v}$ — скорость относительного изменения объема или точечная особенность поля линейной скорости, η^v — коэффициент линейной сдвиговой вязкости, $\tau_v^{\,v} = (3\xi^v/2\eta^v)(\tau_t^{\,v} + 3l^v \tau_l^{\,v})$ — время объемной релаксации, ξ^v — коэффициент линейной объемной вязкости, $\tau_r^{\,v}$ — время релаксации антисимметричных линейных напряжений, λ^v — коэффициент линейной вращательной вязкости.

На основании (2) и (8) уравнение движения поля линейной скорости в локально неравновесной среде можно представить в форме

$$\begin{aligned}\tau_t^{\,v}(\rho \mathbf{v}^\bullet)_{,t} + \rho \mathbf{v}^\bullet - (\eta^v \mathbf{v}_{,n})_{,n} \\ = -\operatorname{grad} p^{ve} + \eta^v_{,n} \operatorname{grad}(v_n) + \operatorname{rot} \mathbf{P}^e,\end{aligned} \tag{9}$$

где $p^{ve} = p + \tau_t^{\,v} p_{,t} + p^v$ — эффективное давление или эффективный скалярный потенциал, градиент которого дает силу, $p^v = -(\xi^v + \eta^v/3) v_{\mu\mu} + l^v(\tau_v^{\,v} - \tau_l^{\,v}) P_{\mu\mu,t}$ — составляющая потенциала, связанная с точечной особенностью поля линейной скорости,

$$P_{\mu\mu} = -(3\xi^v/\tau_v^{\,v}) \int_{-\infty}^{t} v_{\mu\mu}(t') \exp\big((t'-t)/\tau_v^{\,v}\big) dt'$$

— составляющая потенциала, определяемая предысторией особенности, $\mathbf{P}^e = \mathbf{P} + \tau_t^{\,v} \mathbf{P}_{,t}$ — эффективный векторный потенциал, ротор которого дает силу, причем

$$\mathbf{P} = (\lambda^v/\tau_r^{\,v}) \int_{-\infty}^{t} (\boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\Omega})(t') \exp\big((t'-t)/\tau_r^{\,v}\big) dt'$$

определяется предысторией разности скоростей внутреннего и внешнего вращений. Из (9) следует, что динамика линейной скорости зависит от завихренности угловой скорости внутреннего вращения.

В локально равновесной среде $(\tau_{t,}^{\,v} \tau_l^{\,v} \to 0)$ без учета внутреннего вращения $(\lambda^v \to 0)$ уравнение (9) переходит в уравнение Навье–Стокса, описывающее диффузию импульса. В локально неравновесной среде параболическое уравнение Навье–Стокса преобразуется в гиперболическое (9), которое допускает решения в виде поперечных волн.

Определяющие уравнения угловых напряжений с учетом симметрии среды на основании (6) и (7) можно записать в виде

$$R_{ij} + \tau_t^{\,\omega} R_{ij,t} = n_{ij}, \quad n_{ij} = R_{0ij} - \delta_{ij} l^\omega (\tau_l^{\,\omega} - \tau_v^{\,\omega}) R_{\mu\mu,t},$$

$$R_{0ij} = -2\eta^\omega (\omega_{ij} - \delta_{ij} \omega_{\mu\mu}/3) + \delta_{ij} \xi^\omega \omega_{\mu\mu},$$

$$R_{\mu\mu} + \tau_v^{\,\omega} R_{\mu\mu,t} = -3\xi^\omega \omega_{\mu\mu},$$

$$\mathbf{R} + \tau_r^{\,\omega} \mathbf{R}_{,t} + \alpha^\omega (\mathbf{q} + \tau^q \mathbf{q}_{,t}) = -\lambda^\omega \mathbf{V}, \tag{10}$$

где $\tau_t^{\,\omega}$ и $\tau_l^{\,\omega}$ — время поперечной и продольной релаксации симметричных угловых напряжений к локально равновесному значению, $l^\omega = L^{44}_{12}(0)/2L^{44}_{44}(0)$,

$R_{\mu\mu} = R_{11} + R_{22} + R_{33}$, $\omega_{\mu\mu} = \operatorname{div} \boldsymbol{\omega}$ — точечная особенность поля угловой скорости, η^ω — коэффициент угловой сдвиговой вязкости, $\tau_v^\omega = (3\xi^\omega/2\eta^\omega)(\tau_t^\omega + 3l^\omega\tau_l^\omega)$ — время объемной релаксации, ξ^ω — коэффициент угловой объемной вязкости, τ_r^ω — время релаксации антисимметричных угловых напряжений, λ^ω — коэффициент угловой вращательной вязкости, α^ω — коэффициент, определяющий перекрестные (термоспиновые) эффекты, τ^q — перекрестное термоспиновое время релаксации.

Из (3) и (10) следует уравнение движения поля угловой скорости внутреннего вращения в локально неравновесной среде

$$\tau_t^\omega(\rho\theta\boldsymbol{\omega}^\bullet)_{,t} + \rho\theta\boldsymbol{\omega}^\bullet - (\eta^\omega\boldsymbol{\omega}_{,n})_{,n} = \mathbf{N}^e - \operatorname{grad} p^{\omega e} + \eta^\omega_{,n}\operatorname{grad}\omega_n + \operatorname{rot}\mathbf{R}^e, \quad (11)$$

где $\mathbf{N}^e = -2(\mathbf{P} + \tau_t^\omega\mathbf{P}_{,t})$ — неравновесный момент сил, обусловленный антисимметричной частью тензора линейных напряжений, $p^{\omega e} = -(\xi^\omega + \eta^\omega/3)\omega_{\mu\mu} + l^\omega(\tau_v^\omega - \tau_l^\omega)R_{\mu\mu,t}$ — связанный с точечной особенностью поля угловой скорости эффективный скалярный потенциал, градиент которого дает момент сил,

$$R_{\mu\mu} = -(3\xi^\omega/\tau_v^\omega)\int_{-\infty}^{t}\omega_{\mu\mu}(t')\exp\big((t'-t)/\tau_v^\omega\big)dt'$$

— составляющая скалярного потенциала, обусловленная предысторией особенности, $\mathbf{R}^e = \mathbf{R} + \tau_t^\omega\mathbf{R}_{,t}$ — эффективный векторный потенциал, ротор которого дает момент сил. Из (11) видно, что на внутреннее вращение влияют вихрь линейной скорости и непотенциальная часть теплового потока.

В локально равновесном состоянии $(\tau_t^\omega, \tau_r^v \to 0)$ уравнение (11) описывает диффузию внутреннего момента импульса. При малой неоднородности внутреннего и внешнего вращений скорость $\boldsymbol{\omega} \to \boldsymbol{\Omega}$ с характерным временем релаксации $\tau^\lambda = \rho\theta/2\lambda^v$ [7]. В локально неравновесной среде параболическое уравнение диффузии внутреннего вращения преобразуется в гиперболическое уравнение, которое допускает решения в виде поперечных волн.

При слабом тепловом потоке и малых антисимметричных угловых напряжениях на основании (6) и (7) с учетом симметрии среды можно записать определяющее уравнение теплового потока в виде

$$\mathbf{q} + \tau^T\mathbf{q}_{,t} + \alpha^T(\mathbf{R} + \tau^q\mathbf{R}_{,t}) = -\lambda^T T_{,\mathbf{x}}, \quad (12)$$

где λ^T — коэффициент теплопроводности, τ^T — время релаксации теплового потока, α^T — коэффициент, определяющий перекрестные (термоспиновые) эффекты, причем благодаря симметрии кинетических коэффициентов $\alpha^T = -2T(\lambda^T/\lambda^\omega)\alpha^\omega$. Вследствие положительной определенности производства энтропии коэффициенты $\lambda^\omega, \lambda^T > 0$. При $\alpha^T \to 0$ уравнение (12) переходит в уравнение Каттанео–Максвелла.

Соотношения (10) и (12) дают дифференциальные уравнения второго порядка для $\mathbf{q}$ и $\mathbf{R}$. Из этих уравнений видно, что $\mathbf{q}$ и $\mathbf{R}$ определяются не только градиентом температуры и вихрем угловой скорости внутреннего вращения, но и их изменением во времени. В локально равновесном состоянии $(\tau_r^\omega, \tau^T, \tau^q \to 0)$ из (10) и (12) с учетом симметрии кинетических коэффициентов следуют простые соотношения

$$\mathbf{q} = -\lambda^T T_{,\mathbf{x}} - \alpha^T\mathbf{R},$$
$$\mathbf{V} = -(\alpha^T/2T)T_{,\mathbf{x}} - \alpha^R\mathbf{R}, \quad (13)$$

где $\alpha^R = (1+\alpha_0)/\lambda^\omega$, причем $\alpha_0 = -\alpha^\omega\alpha^T > 0$. Если коэффициент α^T отличен от нуля, то поток внутренней энергии производится не только градиентом температуры, но и антисимметричной частью тензора, определяющего поток внутреннего вращения (термоспиновый эффект). Этот же коэффициент определяет возбуждение завихренности скорости внутреннего вращения градиентом температуры. В частности, неоднородность $T_{,x}$ создает неоднородности $\omega_{z,y}$ или $\omega_{y,z}$ и, наоборот, неоднородности $\boldsymbol{\omega}$ (магнитного поля) создают градиент T. По симметрии термоспиновый эффект аналогичен термоэлектрическому эффекту, $\mathbf{R}$ и $\mathbf{V}$ — аналоги электрического поля и тока (недиссипативного). По аналогии с намагниченностью плотность недиссипативного тока можно определить соотношением $\langle\int[\mathbf{rs}]dv\rangle$, где $\mathbf{s}$ — микроскопическая плотность спина. Интегрирование производится по объему „элементарной ячейки“ или кластера, в котором сохраняется ближний порядок, $\langle\ldots\rangle$ — усреднение по элементарному объему. Из (7) следует, что однородный спонтанный недиссипативный ток (внутренний импульс) может существовать только в средах неинвариантных относительно как пространственной, так и временной инверсий.

На основании (4) и (12) с учетом уравнения состояния $dx = (c_v/T)dT + \chi\rho^{-2}d\rho$ (c_v — теплоемкость, $\chi = (p_{,T})_\rho$) можно записать уравнение, описывающее пространственно-временное изменение температуры в локально неравновесной среде с внутренним вращением в виде

$$\tau^T(\rho c_v T^\bullet)_{,t} + \rho c_v T^\bullet - (\lambda^T T_{,n})_{,n} = \sigma^T + (\alpha^T R_n^T)_{,n}, \quad (14)$$

где $\mathbf{R}^T = \mathbf{R} + \tau^q\mathbf{R}_{,t}$, $\sigma^T = \sigma_0^T + \tau^T\sigma_{0,t}^T$ — источник тепла, обусловленный преобразованием механического движения в тепло, причем мощность источника определяется не только величиной $\sigma_0^T = T\chi v_{\mu\mu} - \sigma_m^T$, но и скоростью ее изменения, $\sigma_m^T = P_{ji}v_{ij} + 2\mathbf{P}(\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\omega}) + R_{ji}\omega_{ij} + 2\mathbf{RV}$ — составляющая источника, связанная со сдвиговыми и вращательными напряжениями.

Приращение температуры линейно связано со скоростью и ускорением сжимаемости. Эта связь, в частности, определяет нагревание среды при сжатии. Кроме этого, $v_{\mu\mu}$ перенормирует теплоемкость. При постоянной плотности в отсутствие постоянных неоднородностей линейной и угловых скоростей источник тепла определяется только нелинейной составляющей σ_m^T. Влияние внутреннего вращения на тепловые процессы происходит через расходимость вектора $\alpha^T \mathbf{R}^T$. Следовательно, при постоянных коэффициентах завихренность внутреннего вращения $\mathbf{V}$ не влияет на тепловые процессы.

Связь поля температуры и поля угловой скорости внутреннего вращения происходит через перекрестные и неравновесные процессы. В локально равновесной среде $(\tau^T \to 0)$ без учета внутреннего вращения $(\alpha^T \to 0)$ уравнение (14) переходит в уравнение теплопроводности, описывающее диффузию внутренней энергии. В локально неравновесной среде параболическое уравнение теплопроводности преобразуется в гиперболическое (14), которое допускает волновые решения отклонения температуры $T_\sim = T - T_0$ от равновесного значения T_0.

Связанные волны линейной и угловой скоростей и температуры

В линейном приближении система уравнений (9), (11) и (14) имеет решение в виде гармонических волн $\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}, T_\sim \propto \exp(i\mathbf{kx} - i\omega t)$, где $\mathbf{k}$ и ω — волновой вектор и частота волн. Подставив последнее соотношение в (8), (10), (12) и (9), (11) при условии однородных и постоянных коэффициентов вязкости, определяющих перекрестные эффекты коэффициентах, $\upsilon_{\mu\mu}$ и $\omega_{\mu\mu}$ получим систему линейных алгебраических уравнений. Из этой системы следуют соотношения связи векторов линейной и угловой скоростей в волне

$$\mathbf{v} = ic^v[\boldsymbol{\omega}\mathbf{k}], \quad \boldsymbol{\omega} = ic^\omega[\mathbf{v}\mathbf{k}], \tag{15}$$

где $c^v = \lambda_v^v / d^v$ и $c^\omega = \lambda_\omega^v / d^\omega$ — коэффициенты динамической связи полей, $\lambda_v^v = \lambda_{v0}^v \xi_v^v$ и $\lambda_\omega^v = \lambda_{\omega 0}^v \xi_v^\omega$ — параметры связи $\lambda_{v0}^v = (\lambda^v / \rho \tau_t^v)$ и $\lambda_{\omega 0}^v = (\lambda^v / \rho \theta \tau_t^\omega)$ — амплитуды параметров $\xi_v^v = (1 - i\omega\tau_t^v)/(1 - i\omega\tau_r^v)$ и $\xi_v^\omega = (1 - i\omega\tau_t^\omega)/(1 - i\omega\tau_r^v)$ — функции, характеризующие частотную зависимость параметров связи, $d^v = d_0^v - \upsilon_{v\xi}^2 \mathbf{k}^2$ и $d^\omega = d_0^\omega - \upsilon_{\omega\xi}^2 \mathbf{k}^2$ — полиномы, определяющие дисперсионные соотношения несвязанных волн, $d_0^v = \omega^2 + i\omega(\tau_t^v)^{-1}$ и $d_0^\omega = \omega^2 - \omega_\xi^2 + i\omega(\tau_t^\omega)^{-1}$ — зависящие только от частоты слагаемые, $\omega_\xi^2 = \omega_0^2 \xi_v^\omega$ — эффективная частота „отсечки" (эффективная энергетическая щель), $\omega_0^2 = (\tau^\lambda \tau_t^\omega)^{-1}$ — энергетическая щель, $\upsilon_{v\xi}^2 = \upsilon_v^2(1 + \lambda_\eta^v \xi_v^v)$ и $\upsilon_{\omega\xi}^2 = \upsilon_\omega^2(1 + \lambda_\eta^\omega \xi_\omega^\omega \xi_T)$ — эффективная скорость, $\upsilon_v^2 = \nu^v / \tau_t^v$ и $\upsilon_\omega^2 = \nu^\omega / \tau_t^\omega$ — скорость возбуждения полей линейной и угловой скоростей, $\nu^v = \eta^v / \rho$ и $\nu^\omega = \eta^\omega / \rho\theta$ — кинематическая вязкость, $\lambda_\eta^v = \lambda^v / 2\eta^v$ и $\lambda_\eta^\omega = \lambda^\omega / 2\eta^\omega$ — отношения коэффициентов вязкости, $\xi_\omega^\omega = (1 - i\omega\tau_t^\omega)/(1 - i\omega\tau_r^\omega)$ — функция, характеризующая наряду с ξ_v^v, частотную зависимость эффективной скорости, $\xi_T = (1 + \alpha_0 \xi_\omega^q \xi_T^q)^{-1}$ — функция, характеризующая влияние температуры на скорость волн внутреннего вращения, $\xi_\omega^q = (1 - i\omega\tau^q)/(1 - i\omega\tau_r^\omega)$ и $\xi_T^q = (1 - i\omega\tau^q)/(1 - i\omega\tau^T)$ — составляющие функции, определяющие ее частотную зависимость.

Из (15) видно, что векторы линейной и угловой скоростей взаимно ортогональны и лежат в плоскости, нормальной направлению распространения волны, причем сдвиг фаз между колебаниями векторов зависит не только от параметров среды, но и от частоты.

При постоянных и однородных кинетических коэффициентах температурные волны не связаны непосредственно с векторами скоростей. Влияние поля температуры на поле угловой скорости внутреннего вращения происходит через завихренность поля угловой скорости, и обратное влияние происходит через его расходимость, что видно из (11) и (14). Однако поскольку $\operatorname{rot} T_{,x} \equiv 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{V} \equiv 0$, то прямая связь между полями отсутствует. Влияние температурных колебаний на связанные волны линейной и угловой скоростей в линейном приближении осуществляется параметрически через изменение скорости волн внутреннего вращения.

Дисперсионное соотношение связанных волн получается из (15) в виде

$$d^v d^\omega = \lambda_v^v \lambda_\omega^v \mathbf{k}^2. \tag{16}$$

Решение уравнения (16) можно представить в виде

$$k_{1,2}^2 = (1/2)\left[d_+ \pm (d_-^2 + \Lambda_d)^{1/2}\right], \tag{17}$$

где $d_\pm = d_v^v \pm d_\Lambda^\omega$, $d_v^v = d_0^v / \upsilon_{v\xi}^2$, $d_\Lambda^\omega = d_v^\omega + \Lambda$, $d_v^\omega = d_0^\omega / \upsilon_{\omega\xi}^2$ — нормированные слагаемые, зависящие только от частоты $\Lambda = \lambda_v^v \lambda_\omega^v / \upsilon_{v\xi}^2 \upsilon_{\omega\xi}^2$, $\Lambda_d = 4\Lambda d_v^v$ — параметр связи. При $\Lambda_d \to 0$ соотношение (17) распадается на два соотношения $k_v^2 = d_v^v$ и $k_\omega^2 = d_\Lambda^\omega$, описывающие несвязанные волны линейной и угловой скоростей внутреннего вращения. Последние соотношения описывают и связанные волны в областях высоких и низких частот, где $d_-^2 \gg \Lambda_d$.

Дисперсионное соотношение температурных волн на основании (10), (12) и (14) при постоянных плотности, теплоемкости, коэффициенте теплопроводности и характеризующем термо-спиновой эффект коэффициенте, определяется соотношением

$$k_3^2 = d_v^T, \tag{18}$$

где $d_v^T = d_0^T / \upsilon_{T\xi}^2$, $d_0^T = \omega^2 + i\omega/\tau^T$, $\upsilon_{T\xi}^2 = \upsilon_T^2 \xi_T$ — зависящая от частоты эффективная скорость, $\upsilon_T^2 = \nu^T / \tau^T$ — скорость температурных волн, $\nu^T = \lambda^T / \rho c_v$ — коэффициент температуропроводности.

Волны температуры и скоростей связаны благодаря зависимости скорости распространения волн от одного параметра ξ_T, зависимого от перекрестных коэффициентов. В отсутствие связи $(\xi_T \to 1)$ дисперсия температурных волн будет определяться соотношением $k_T^2 = d_0^T / \upsilon_T^2$. Заметим, что скорости волн всех полей определяются отношением удельного коэффициента диффузии (импульса, момента импульса, внутренней энергии) к времени релаксации.

Поперечные волны линейной скорости

Рассмотрим сначала возбуждения поля линейной скорости $\mathbf{v}(t, x_n)$. Разделив d_v^v на действительную $d_v^{v\prime}$ и мнимую $d_v^{v\prime\prime}$ части, определяющие дисперсию и затухание волн линейной скорости уравнения $k_v^2 = d_v^v$ можно представить в виде

$$k_v^{\prime;\prime\prime} = 2^{-1/2}\left\{\left[(d_v^{v\prime})^2 + (d_v^{v\prime\prime})^2\right]^{1/2} \pm d_{0v}^{v\,\prime}\right\}^{1/2}. \qquad (19)$$

В случае действительных ω действительная и мнимая части выражаются соотношением

$$d_{v'}^v = (\omega^2/v_{v\lambda}^2) I_{2\xi}^v / I_1^v,$$

$$d_{v''}^v = (\omega/\tau_t^{\,v} v_{v0}^2) I_3^v / I_1^v, \qquad (20)$$

где $v_{v\lambda}^2 = v_{v0}^2/\xi_{\lambda v}$ — характерная скорость, $\xi_{\lambda v} = (1 + \lambda_\eta^v \theta^v)/(1 + \lambda_\eta^v)$ — функция, определяемая соотношением времен релаксации линейных сдвиговых и вращательных напряжений, $\theta^v = \tau_r^{\,v}/\tau_t^{\,v}$ — отношение времен релаксации, $\tau_1^{\,v} = \tau_t^{\,v}(\theta^v + \lambda_\eta^v)/(1 + \lambda_\eta^v)$, $(\tau_{2\xi}^v)^2 = (\tau_2^{\,v})^2/\xi_{\lambda v}$, $(\tau_2^{\,v})^2 = \tau_r^{\,v}\tau_1^{\,v}$, $(\tau_3^{\,v})^2 = (\tau_t^{\,v})^2[(\theta^v)^2 + \lambda_\eta^v]/(1 + \lambda_\eta^v)$ характерные времена релаксации в поле линейной скорости, причем $\tau_3^v > \tau_1^{\,v} > \tau_{2\xi}^v$, $v_{v0}^2 = v_v^2(1 + \lambda_\eta^v)$ — асимптотическая скорость, $I_n^v = 1 + (\omega\tau_n^{\,v})^2$ — функции, определяемые соотношением частоты и времени релаксации, $n = 1, 2\ldots$ Зависимости $k_v^{\prime;\prime\prime}(\omega)$ представляют собой монотонные функции, которые могут иметь точки перегиба, где групповая скорость имеет экстремальное значение.

В низкочастотной области $\omega \ll \min\{(\tau_t^{\,v})^{-1}, (\tau_r^{\,v})^{-1}\}$ сдвиговые и вращательные напряжения будут локально равновесными. Здесь действительная и мнимая части k_v равны: $k_{v'} = k_{v''} = \left(\omega/2\nu^v(1 + \lambda_\eta^v)\right)^{1/2}$. Следовательно, низкочастотные поперечные волны не распространяются в жидкости, они затухают на расстоянии $\delta^v = 1/k_v''$ от источника (гидравлический скин-эффект). Внутреннее вращение изменяет толщину скин-слоя, причем для $\lambda_\eta^v \gg 1$ величина $k_{v''} = (\omega\rho/\lambda^v)^{1/2}$ определяется коэффициентом вращательной вязкости.

В высокочастотной области $\omega \gg \max\{(\tau_t^{\,v})^{-1}, (\tau_r^{\,v})^{-1}\}$ сдвиговые и вращательные напряжения будут локально неравновесными. Здесь действительная часть $k_{v'} = \omega/v_{v\infty}$ линейно возрастает с частотой, а мнимая часть $k_{v''} = 1/2v_{v\infty}\tau_\infty^v$ не зависит от частоты, причем отношение $k_{v''}/k_{v'} = 1/2\omega\tau_\infty^v \ll 1$, где $V_{v\infty} = v_v(1 + \lambda_\eta^v/\theta^v)^{1/2}$ и $\tau_\infty^v = \tau_t^{\,v}\theta^v(\theta^v + \lambda_\eta^v)/\left((\theta^v)^2 + \lambda_\eta^v\right)$ — асимптотические скорость и время релаксации. Следовательно, высокочастотные поперечные волны могут распространяться в жидкости. Внутреннее вращение изменяет скорость волн линейной скорости и их время релаксации. Если время релаксации сдвиговых напряжений значительно меньше времени релаксации вращательных напряжений, то $v_{v\infty} \approx v_v$ и $\tau_\infty^v \approx \tau_t^{\,v}$ и, следовательно, характеристики

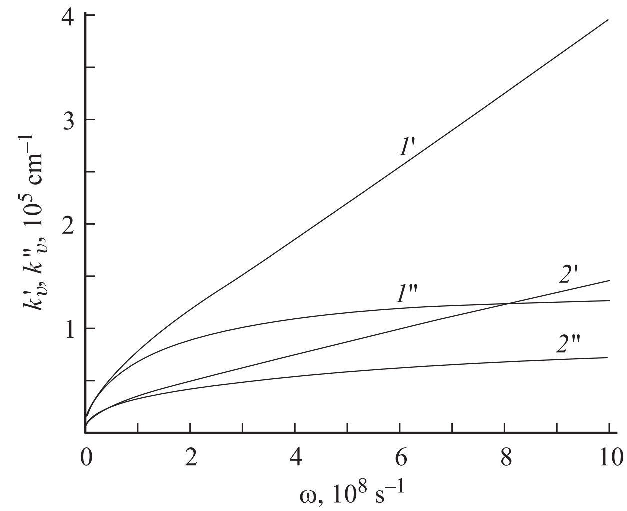

Рис. 1. Зависимости действительной (кривые $1'$, $2'$) и мнимой (кривые $1''$, $2''$) частей волнового числа от частоты при различных праметрах: $\lambda_\eta^v = 4$ (2).

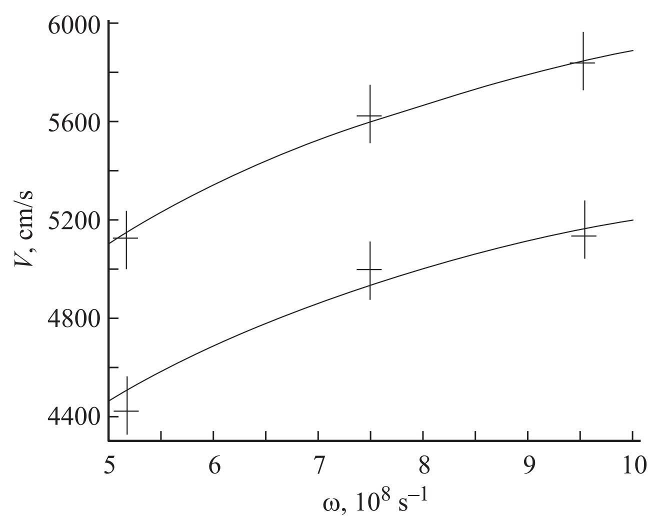

Рис. 2. Дисперсия скорости поперечного звука в жидкости и сравнение теоретических (линии) и экспериментальных (символы) результатов [4].

волн определяются параметрами сдвиговых напряжений. В противном случае $v_{v\infty} \approx v_\lambda = (\lambda^v/2\rho\tau_r^{\,v})^{1/2}$ и $\tau_\infty^v \approx \tau_r^{\,v}$ и, следовательно, характеристики волн определяются параметрами вращательных напряжений.

Дисперсия и затухание линейных волн на основе (19) при $\tau_t^{\,v} = 1.4 \cdot 10^{-9}$ s, $\tau_r^{\,v} = 0.7 \cdot 10^{-9}$ s и различных λ_η^v показаны на рис. 1. Теоретические кривые дисперсии скорости для воды при численных значениях параметров $\tau_t^{\,v} = 1.2 \cdot 10^{-9}$ s, $\tau_r^{\,v} = 0.88 \cdot 10^{-9}$ s, $\lambda_\eta^v = 2.2$, $\nu^v = 0.01\,\mathrm{cm^2/s}$ и для нитробензола при $\tau_t^{\,v} = 1.4 \cdot 10^{-9}$ s, $\tau_r^{\,v} = 0.85 \cdot 10^{-9}$ s, $\lambda_\eta^v = 1.2$, $\nu^v = 0.02\,\mathrm{cm^2/s}$, а также экспериментальные точки [4] представлены на рис. 2.

Видно, что расчеты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

Распространение упругих поперечных волн в жидкости происходит аналогично распространению электромагнитных волн в проводящей среде [14].

Поперечные волны угловой скорости внутреннего вращения

Рассмотрим далее возбуждения поля угловой скорости $\omega(t, x_n)$. В соотношении $k_\omega^2 = d_\Lambda^\omega$ можно представить $d_\Lambda^\omega = [\omega^2 + i(\omega/\tau_t^\omega) - \omega_0^2 f_0 \xi_{v1}^\omega]/v_{\omega\xi}^2$, где $f_0 = 1/(1+\lambda_\eta^v)$, $\xi_{v1}^\omega = (1 - i\omega\tau_t^\omega)/(1 - i\omega\tau_1^v)$. Видно, что возбуждения полей линейной скорости и температуры влияют на волны внутреннего вращения посредством смещения частоты и через перенормировку скорости соответственно. Для того чтобы выделить влияние температурных изменений удобно записать $v_{\omega\xi}^2 = v_{\omega 0}^2 \xi_\omega^{\omega 1}/F_T$, где $v_{\omega 0}^2 = v_\omega^2(1+\lambda_\eta^\omega)$ — асимптотическая скорость, $\xi_\omega^{\omega 1} = (1 - i\omega\tau_1^\omega)/(1 - i\omega\tau_r^\omega)$ — функция, определяющая дисперсию волн угловой скорости, $F_T = (1 + \alpha_0 \xi_\omega^q \xi_T^q)/(1 + \alpha_\lambda \xi_{\omega 1}^q \xi_T^q)$ — функция, определяющая связь полей температуры и угловой скорости, $\xi_{\omega 1}^q = (1 - i\omega\tau^q)/(1 - i\omega\tau_1^\omega)$ — составляющая функции, характеризующая наряду с ξ_ω^q и ξ_T^q ее частотную зависимость, $\tau_1^\omega = \tau_t^\omega(\theta^\omega + \lambda_\eta^\omega)/(1+\lambda_\eta^\omega)$ — эффективное время релаксации, определяемое отношением коэффициентов вязкости, $\theta^\omega = \tau_r^\omega/\tau_t^\omega$ — отношение времени релаксации, $\alpha_\lambda = \alpha_0/(1+\lambda_\eta^\omega)$ — перенормированный коэффициент связи полей угловой скорости и температуры.

Разделив d_Λ^ω на действительную $d_\Lambda^{\omega\prime}$ и мнимую $d_\Lambda^{\omega\prime\prime}$ части, определяющие дисперсию и затухание волн угловой скорости внутреннего вращения уравнение $k_\omega^2 = d_\Lambda^\omega$ можно представить в виде

$$k_\omega^{\prime,\prime\prime} = 2^{-1/2}\Big\{\big[(d_\Lambda^{\omega\prime})^2 + (d_\Lambda^{\omega\prime\prime})^2\big]^{1/2} \pm d_\Lambda^{\omega\prime}\Big\}^{1/2}. \qquad (21)$$

В случае действительных ω части выражаются соотношениями

$$d_\Lambda^{\omega\prime} = d_{\Lambda 0}^{\omega}{}' F_v' F_T' - d_{\Lambda 0}^{\omega}{}'' F_v'' F_T'',$$

$$d_\Lambda^{\omega\prime\prime} = d_{\Lambda 0}^{\omega}{}'' F_v'' F_T' + d_{\Lambda 0}^{\omega}{}' F_v' F_T''. \qquad (22)$$

Функции, определяющие дисперсию „чистых“ волн угловой скорости внутреннего вращения имеют аналогичный (20) вид

$$d_{\Lambda 0}^{\omega}{}' = (\omega^2/v_{\omega\lambda}^2)(I_{2\xi}^\omega/I_1^\omega),$$

$$d_{\Lambda 0}^{\omega}{}'' = (\omega/\tau_t^\omega v_{\omega 0}^2)(I_3^\omega/I_1^\omega), \qquad (23)$$

где $v_{\omega\lambda}^2 = v_{\omega 0}^2/\xi_{\lambda\omega}$ — нормированная скорость, $\xi_{\lambda\omega} = (1 + \lambda_\eta^\omega\theta^\omega)/(1+\lambda_\eta^\omega)$ — функция, определяемая отношением времен релаксации $(\tau_{2\xi}^\omega)^2 = (\tau_2^\omega)^2/\xi_{\lambda\omega}$, $(\tau_2^\omega)^2 = \tau_r^\omega\tau_1^\omega$, $(\tau_3^\omega)^2 = (\tau_t^\omega)^2[(\theta^\omega)^2 + \lambda_\eta^\omega]/(1+\lambda_\eta^\omega)$ — характерные времена релаксации в поле угловой скорости, причем $\tau_3^\omega > \tau_1^\omega > \tau_{2\xi}^\omega$, $I_n^\omega = 1 + \omega^2(\tau_n^\omega)^2$ — функции, определяемые соотношением частоты и времен релаксации.

Функции, определяющие влияние поля линейной скорости на поле угловой скорости внутреннего вращения выражаются соотношениями

$$F_v' = 1 - (\omega_0^2/\omega^2) f_v', \quad F_v'' = 1 - \omega_0^2(\tau_{2\xi}^{\omega v})^2 f_v'', \qquad (24)$$

где

$$f_v' = (f_0/\xi_{\lambda\omega})\big[I_2^\omega I_2^{\omega v} - \omega^2(\tau_3^{\omega v})^2\big]/I_1^v I_{2\xi}^\omega,$$

$$f_v'' = f_0 I_4^{\omega v}/I_1^v I_3^\omega$$

— функции, характеризующие частотную зависимость эффективной частоты отсечки, причем $f_v' > 0$, $(\tau_2^{\omega v})^2 = \tau_t^\omega\tau_1^v$, $(\tau_{2\xi}^{\omega v})^2 = (\tau_2^{\omega v})^2\xi_{\omega v2}$, $(\tau_3^{\omega v})^2 = (\tau_1^\omega - \tau_r^\omega)(\tau_1^v - \tau_t^\omega)$, $(\tau_4^{\omega v})^2 = (\tau_3^\omega)^2\xi_{\omega v4}/\xi_{\omega v2}$ — эффективные перекрестные времена релаксации, $\xi_{\omega v2} = 1 - \tau_{t\xi}^\omega/\tau_1^v$ и $\xi_{\omega v4} = 1 - \tau_\infty^\omega/\tau_1^v$ — функции, определяемые отношением времен релаксации в полях угловой и линейной скоростей, $\tau_{t\xi}^\omega = \tau_t^\omega\xi_{\lambda\omega}$ и $\tau_\infty^\omega = \tau_t^\omega(\tau_2^\omega)^2/(\tau_3^\omega)^2$ — характерные времена релаксации в поле угловой скорости внутреннего вращения. Если параметр связи линейной и угловой скоростей $\lambda^v \to 0$, то частота $\omega_0^2 \to 0$ и, следовательно, $F_v', F_v'' \to 1$.

Функции, определяющие влияние поля температуры на поле угловой скорости внутреннего вращения, имеют вид

$$F_T' = (1 + \alpha_0 f_T')(1 + \alpha_\lambda f_{T1}')/F_{T0},$$

$$F_T'' = \big[\alpha_0 f_T''(1 + \alpha_\lambda f_{T1}') - \alpha_\lambda f_{T1}''(1 + \alpha_0 f_T')\big]/F_{T0}, \qquad (25)$$

где

$$f_T' = [I_2^{\omega q} I_2^{Tq} - \omega^2(\tau_3^{\omega q})^2]/I_r^\omega I^T,$$

$$f_T'' = \omega(\tau_r^\omega - \tau^q)[I_2^{Tq} + I_2^{\omega q}\xi_{\omega T}]/I_r^\omega I^T,$$

$$f_{T1}' = [I_{21}^{\omega q} I_2^{Tq} - \omega^2(\tau_{31}^{\omega q})^2]/I_1^\omega I^T,$$

$$f_{T1}'' = \omega(\tau_1^\omega - \tau^q)[I_2^{Tq} + I_{21}^{\omega q}\xi_{\omega 1T}]/I_1^\omega I^T,$$

— составляющие функции, определяющие ее частотную зависимость $(\tau_2^{\omega q})^2 = \tau_r^\omega\tau^q$, $(\tau_2^{Tq})^2 = \tau^T\tau^q$, $(\tau_3^{\omega q})^2 = (\tau_r^\omega - \tau^q)(\tau^T - \tau^q)$, $(\tau_{21}^{\omega q})^2 = \tau_1^\omega\tau^q$, $(\tau_{31}^{\omega q})^2 = (\tau_1^\omega - \tau^q)(\tau^T - \tau^q)$ — перекрестные термоспиновые времена релаксации, $\xi_{\omega T} = (\tau^T - \tau^q)/(\tau_r^\omega - \tau^q)$ и $\xi_{\omega 1T} = (\tau^T - \tau^q)/(\tau_1^\omega - \tau^q)$ — отношения времен релаксации в полях температуры и угловой скорости,

$$F_{T0} = (1 + \alpha_\lambda f_{T1}')^2 + (\alpha_\lambda f_{T1}'')^2.$$

Если параметр связи полей температуры и угловой скорости внутреннего вращения $\alpha_0 \to 0$, то $F_T' \to 1$ и $F_T'' = 0$.

Качественно проанализируем соотношения (21). В области высоких частот $(\omega \to \infty)$ слагаемые $d_\Lambda^{\omega\prime} \propto \omega^2$ и $d_\Lambda^{\omega\prime\prime} \propto \omega$ и, следовательно, $|d_\Lambda^{\omega\prime}| \gg |d_\Lambda^{\omega\prime\prime}|$ и $k_\omega' \gg k_\omega''$. Здесь возможно распространение волн внутреннего вращения. С понижением ω слагаемые $d_\Lambda^{\omega\prime}$ и

$d_\Lambda^{\omega\prime\prime}$ уменьшаются, причем первое уменьшается быстрее. В области частот, где $|d_\Lambda^{\omega\prime\prime}| \gg |d_\Lambda^{\omega\prime}|$, величина $k'_\omega \approx k''_\omega \approx (d_\Lambda^{\omega\prime\prime}/2)^{1/2}$. Следовательно, низкочастотная волна внутреннего вращения не распространяется, она затухает в жидкости на длине волны (скин-эффект).

В отличие от возбуждения поля линейной скорости возбуждения поля угловой скорости внутреннего вращения благодаря взаимодействию полей имеют ненулевые характерные частоты ω_s и ω_c, которые удовлетворяют уравнениям $d_\Lambda^{\omega\prime}(\omega_s) = 0$ и $d_\Lambda^{\omega\prime\prime}(\omega_c) = 0$. Частота ω_s соответствует точному скин-эффекту. В точке ω_s изменяется соотношение между k'_ω и k''_ω. Частота ω_c определяет окно прозрачности (волна на ω_c не затухает) при $\omega_c > \omega_s$ и частоту отсечки при $\omega_c < \omega_s$.

В общем случае уравнения довольно громоздкие. Поэтому рассмотрим частный случай слабой связи полей температуры и угловой скорости внутреннего вращения ($\alpha_0 \to 0$).

В данном случае определяющее ω_s уравнение сводится к $F'_{v0}(\omega_s) = 0$, где $F'_{v0}(\omega) \equiv \omega^6 + a_2\omega^4 + a_1\omega^2 - a_0$ — бикубический полином, $a_2 = (\tau_1^v)^{-2} + (\tau_{2\xi}^\omega)^{-2} - \omega_{0v}^2$, $a_1 = (\tau_{2\xi}^\omega)^{-2}\big((\tau_1^v)^{-2} - \omega_{0v}^2\xi_{\omega v}\big)$ и $a_0 = \omega_{0v}^2/(\tau_2^\omega)^2(\tau_2^{\omega v})^2$ — коэффициенты, $\omega_{0v}^2 = 1/\tau_f^\lambda\tau_1^v$ — эффективная частота отсечки, $\tau_f^\lambda = \tau^\lambda/f_0$ — перенормированное время релаксации, $\xi_{\omega v} = 1 + (\tau_3^\omega)^2/(\tau_{t\xi}^\omega\tau_1^v)$. Уравнение имеет только одно решение, причем $\omega_s \to 0$ при $\omega_0 \to 0$.

Частоты ω_c удовлетворяют уравнению $F''_{v0}(\omega_{c1,2}) = 0$, где $F''_{v0}(\omega) \equiv \omega^4 + b_1\omega^2 + b_0$ — биквадратный полином. $b_1 = (\tau_3^\omega)^{-2} + (\tau_1^v)^{-2} - \omega_{0v}^2\xi_{\omega v4}$ и $b_0 = (\tau_3^\omega)^{-2}[(\tau_1^v)^{-2} - \omega_{0v}^2\xi_{\omega v2}]$ — коэффициенты. В области параметров, где $b_0 > 0$, $b_1 > 0$, действительных $\omega_{c1,2}$ не существует, для $b_0 > 0$, $-2b_0^{1/2} < b_1 < 0$ существует две частоты $\omega_{c1,2}^2 = [-b_1 \pm (b_1^2 - 4b_0)^{1/2}]/2$, для $b_0 < 0$ существует одна частота ω_{c1}^2. При условии $-4b_0 \gg b_1^2$ частота $\omega_{c1}^2 = (-b_0)^{1/2}$, при условии $b_1^2 \gg 4|b_0|$ частоты $\omega_{c1}^2 = -b_0/b_1$ и $\omega_{c2}^2 = -b_1$. В первом случае $\omega_{c1}^2 \propto (\tau_1^v - \tau_{t\xi}^\omega - \tau_f^\lambda)^{1/2}$. Если λ_η^v и λ_η^ω достаточно малы, то $\omega_{c1}^2 \propto (\tau_r^v - \tau_t^\omega - \tau^\lambda)^{1/2}$. Следовательно, частота ω_c определяется соотношением эффективных времен релаксации линейной и угловой скоростей и временем подстройки угловой скорости к вихрю линейной скорости, причем первое больше суммы двух последних. Если $d_\Lambda^{\omega\prime}(\omega_c) > 0$, то на частотах $\omega_{c1,2}$ волна внутреннего вращения распространяется без затухания. Эти частоты ограничены неравенствами $(b_1^2 - b_0 + a_1 - a_2b_1)\omega_{c1,2}^2 > a_0 + (a_2 - b_1)b_0$. С уменьшением a_0 диапазон частот расширяется. Если $d_\Lambda^{\omega\prime}(\omega_c) < 0$, то в точке $\omega = \omega_c$ волновое число $k'_\omega = 0$ и, следовательно, ω_c представляет собой частоту отсечки. Величина этой частоты определяется как коэффициентами вязкости, так и временами релаксации. На этой частоте сдвиг фаз в соседних точках скин-слоя отсутствует, слой ведет себя как твердое тело. В области параметров $\tau^\lambda/f_0 >$ $> \max\{\tau_1^v - \tau_{t\xi}^\omega; (\tau_1^v - \tau_\infty^\omega)/\big(1 + (\tau_1^v)^2/(\tau_3^\omega)^2\big)\}$ отсечка отсутствует.

Таким образом, дисперсионная кривая будет близка к линейной на высоких частотах и будет стремиться либо прямо к началу координат, либо к ω_c и далее через максимум k'_ω к началу координат на низких частотах. Особенности дисперсии и поглощения волн обусловлены взаимодействием полей. Рассмотрим дисперсию и затухание волн в предельных областях подробнее.

В области частот, где $|F'_v| \ll (\omega/\tau_\infty^\omega)|F''_v|$ волновые числа

$$k'^{,\prime\prime}_\omega = (\omega/2\tau_t^\omega v_{\omega 2}^2)^{1/2}\big[1 \pm (\tau_\infty^\omega F'_v/2\omega|F''_v|) + 2(\tau_\infty^\omega F'_v/4\omega F''_v)^2\big], \tag{26}$$

где $v_{\omega 2}^2(\omega) = v_{\omega 0}^2 I_1^v I_1^\omega/(\tau_1^v)^2(\tau_3^\omega)^2|F''_v|$ — эффективная скорость. В окрестности ω_s действительная и мнимая части k_ω равны $k'_\omega = k''_\omega = (\omega/2\tau_t^\omega v_{\omega 2}^2(\omega_s))^{1/2}$. Следовательно, низкочастотные поперечные волны внутреннего вращения не распространяются в жидкости, они затухают на расстоянии $\delta^\omega = 1/k''_\omega$ от источника (скин-эффект). Поправка, определяемая вторым слагаемым, изменяет знак при переходе ω через ω_s.

В области частот, где $|F'_v| \gg (\omega/\tau_\infty^\omega)|F''_v|$ волновые числа

$$k'^{,\prime\prime}_\omega = (\omega^2/2v_{\omega 1}^2)^{1/2}\big[(1 \pm F'_v/|F'_v|) + 2(\omega F''_v/2\tau_\infty^\omega F'_v)^2\big]^{1/2}, \tag{27}$$

где $v_{\omega 1}^2(\omega) = v_{\omega 0}^2\omega^2 I_1^v I_1^\omega/(\tau_1^v)^2(\tau_2^\omega)^2|F'_v|$ — эффективная скорость. Соотношения, определяющие действительную и мнимую части k_ω в области $\omega > \omega_s$, наоборот, определяют мнимую и действительную части k_ω в области $\omega < \omega_s$. В высокочастотной области $\omega \gg \max\{(\tau_t^\omega)^{-1}, (\tau_r^\omega)^{-1}\}$ действительная часть $k'_\omega = \omega/v_{\omega\infty}$ — линейная функция частоты, а мнимая часть $k''_\omega = 1/2v_{\omega\infty}\tau_\infty^\omega$ не зависит от частоты, причем отношение $k''_\omega/k'_\omega = 1/2\omega\tau_\infty^\omega \ll 1$. Здесь асимптотические скорость $v_{\omega\infty} = v_\omega(1 + \lambda_\eta^\omega/\theta^\omega)^{1/2}$ и время релаксации $\tau_\infty^\omega = \tau_t^\omega\theta^\omega(\theta^\omega + \lambda_\eta^\omega)/((\theta^\omega)^2 + \lambda_\eta^\omega)$ определяются как сдвиговыми, так и вращательными вязкостями и временами релаксации. Следовательно, в области высоких частот, где сдвиговые и вращательные поверхностные моменты сил являются локально неравновесными, в жидкости могут распространяться поперечные волны угловой скорости внутреннего вращения с асимптотической скоростью $v_{\omega\infty}$.

Соотношения (27) описывают распространение волн и в окрестности точек ω_{cn}. В точках $\omega_{c1,2}$ функция $F''_{v0} = 0$ и, следовательно, в области $\omega_{cn} > \omega_s$ мнимая часть $k''_\omega(\omega_{cn}) = 0$, а в области $\omega_{cn} < \omega_s$ действительная часть $k'_\omega(\omega_{cn}) = 0$. В первом случае среда будет прозрачной на частоте ω_{cn} (антирезонанс). С приближением ω к ω_{cn} расстояние, на которое распространяется волна, неограниченно растет. Этот эффект аналогичен эффектам самоиндуцированной прозрачности в оптике или антирезонанса в магнетизме. Во втором случае происходят синфазные колебания в пределах скин-слоя.

Построенные численно зависимости (21) приведены на рис. 3–5. Влияние связи угловой скорости с вихрем линейной скорости на дисперсию волн внутреннего вращения показано на рис. 3 при постоянных параметрах поля линейной скорости $\tau_t^v = 1.4 \cdot 10^{-9}$ s, $\tau_r^v = 0.7 \cdot 10^{-9}$ s, $\lambda_\eta^v = 2.0$, $v^v = 0.01\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$, поля угловой скорости внутреннего вращения $\tau_t^\omega = 0.8 \cdot 10^{-10}$ s, $\tau_r^\omega = 1.0 \cdot 10^{-10}$ s, $\lambda_\eta^\omega = 1.0$, $v^\omega = 0.01\,\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$ и поля температуры $\tau^T = 1 \cdot 10^{-10}$ s, $v^T = 0.01\mathrm{cm}^2/\mathrm{s}$, $\tau^q = 1 \cdot 10^{-8}$ s, $\alpha_0 = 10^{-4}$. Видно, что с уменьшением величины параметра связи частота отсечки уменьшается (кривые $4'-2'$) и в итоге исчезает (кривая $1'$). Подставив численные значения в выражение для b_0 и b_1, получим $b_0 < 0$ для кривых $2'-4'$ и $b_0 > 0$

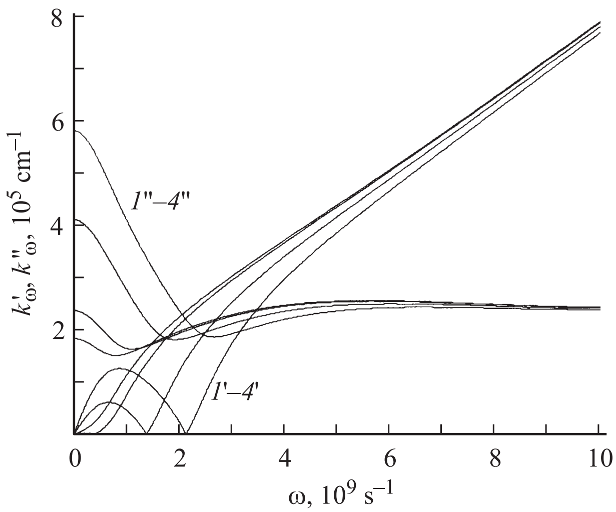

Рис. 3. Влияние поля линейной скорости на дисперсию волн угловой скорости внутреннего вращения. Кривые $1'-4'$ и $1''-4''$ показывают частотную зависимость действительной и мнимой частей волнового числа при $\tau^\lambda = 5 \cdot 10^{-10}$, $3 \cdot 10^{-10}$, $1 \cdot 10^{-10}$, $0.5 \cdot 10^{-10}$ s.

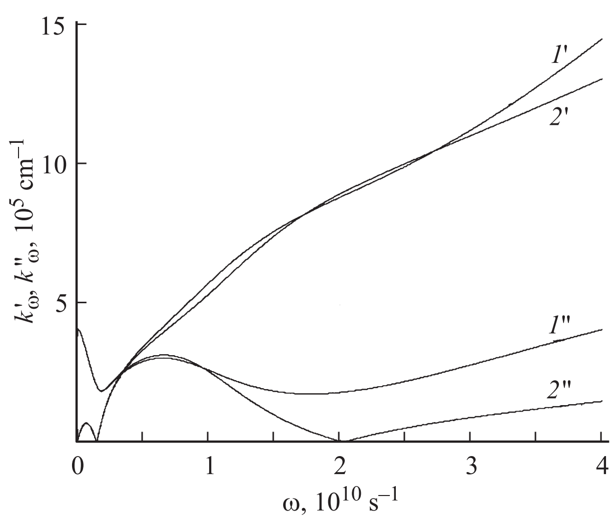

Рис. 4. Влияние времени релаксации в поле внутреннего вращения на дисперсию и затухание волн угловой скорости. Кривые $1'$, $1''$ соответствуют $\tau_t^\omega = 0.2 \cdot 10^{-8}$, $\tau_r^\omega = 0.2 \cdot 10^{-8}$ s, кривые $2'$, $2''$ соответствуют $\tau_t^\omega = 0.2 \cdot 10^{-8}$ и $\tau_r^\omega = 0.02 \cdot 10^{-12}$ s.

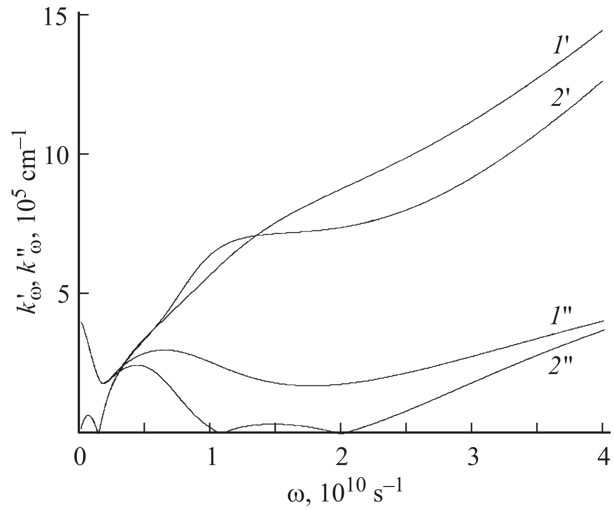

Рис. 5. Влияние поля температуры на дисперсию и затухание волн угловой скорости внутреннего вращения. Кривые $1'$, $1''$ и $2'$, $2''$ соответствуют параметрам $\alpha_0 = 10^{-4}$ и $\alpha_0 = 2 \cdot 10^{-4}$.

для кривой $1'$, $b_1 > 0$ — для всех кривых. Численные неравенства соотетствуют вышеприведенным условиям существования частоты отсечки. В области высоких частот k'_ω линейно растет с частотой и k''_ω не зависит от частоты. Влияние времен релаксации угловых напряжений на дисперсию и затухание волн внутреннего вращения для приведенных выше значений параметров и $\tau^\lambda = 10^{-10}$ s представлено на рис. 4. При данных значениях параметров $\omega_s \approx 0.4 \cdot 10^{-10}$, $\omega_{c1} \approx 0.1 \cdot 10^{-10}$ и $\omega_{c2} \approx 2.1 \cdot 10^{-10}\,\mathrm{s}^{-1}$ и, следовательно, $\omega_{c1} < \omega_s < \omega_{c2}$. Из рисунка видно, что ω_{c1} — частота отсечки и ω_{c2} — частота прозрачности в соответствии с аналитическими расчетами.

Влияние температуры на волны внутреннего вращения для приведенных выше значений параметров и $\tau_t^\omega = 0.2 \cdot 10^{-10}$, $\tau_r^\omega = 0.2 \cdot 10^{-10}$ s показано на рис. 5. С уменьшением связи полей температуры и внутреннего вращения окна прозрачности возникают при меньших временах релаксации и расположены в области более высоких частот.

Температурные волны

Рассмотрим теперь возбуждения поля температуры $T(t, x_n)$. В отсутствие взаимодействия в случае действительных ω и комплексных k на основании уравнения $k_T^2 = d_0^T/v_T^2$ дисперсия и затухание несвязанных температурных волн определяются соотношениями $\omega = v_T k_T'^2 (k_T'^2 + k_{T0}^2)^{-1/2}$ и $k_T'' = (\omega/k_T')2\tau^T k_{T0}^2$, где $k_{T0} = (2\tau^T v_T)^{-1}$ — обратное удвоенное расстояние, которое пробегает волна за время релаксации к локально равновесному состоянию. В высокочастотной области $(\omega \gg (\tau^T)^{-1})$ скорость и затухание волны не зависят от частоты. В низкочастотной области (обратное неравенство) величина $k_T'' = k_T' = (\omega/2v^T)^{1/2}$. Низкочастотные волны затухают на расстоянии $\delta^T = 1/k''_T$ от источника (температурный скин-эффект). Температурные волны ведут себя подобно поперечным волнам линейной скорости при $\lambda^v = 0$. В случае действительных k и комплексных ω дисперсия и затухание определяются соотношениями $\omega' = v_T(k_T^2 - k_{T0}^2)^{1/2}$ и $\omega'' = (2\tau^T)^{-1}$. Локализованные возбуждения с $k_T < k_{T0}$ не возникают, а с $k_T > k_{T0}$ затухают за время $2\tau^T$, причем с уменьшением масштаба их фазовая скорость растет и групповая скорость уменьшается, стремясь к одному асимптотическому значению. Чем у́же волновой пакет, тем медленней он расплывается.

Дисперсия и затухание температурной компоненты связанных волн на основании (18) определяются выражениями

$$k'_3{}'' = 2^{-1/2}\left\{\left[(d_v^{T\prime})^2 + (d_v^{T\prime\prime})^2\right]^{1/2} \pm d_v^{T\prime}\right\}^{1/2}. \qquad (28)$$

В случае действительных ω действительная $d_v^{T\prime}$ и мнимая $d_v^{T\prime\prime}$ части имеют вид

$$d_v^{T\prime} = (\omega^2 \xi_\alpha / v_T^2) I_1^{T\omega} / I_r^\omega,$$

$$d_v^{T\prime\prime} = (\omega / \tau^T v_{T\alpha}^2) I_2^{T\omega} / I_r^\omega, \qquad (29)$$

где $(\tau_1^{T\omega})^2 = (\tau_r^\omega)^2 \xi_{\alpha 1}$ и $(\tau_2^{T\omega})^2 = (\tau_r^\omega)^2 \xi_{\alpha 2}$ — характерные времена релаксации, $\xi_\alpha = 1 + \alpha_0 \theta_T^\omega (2\theta_\omega^q - 1)$, $\xi_{\alpha 1} = (1 + \alpha_0 \theta_T^q \theta_\omega^q)/\xi_\alpha$ и $\xi_{\alpha 2} = [1 + \alpha_0 \theta_\omega^q (2 - \theta_\omega^q)]/(1 + \alpha_0)$ — функции, определяемые соотношением времен релаксации и произведением перекрестных коэффициентов, $\theta_\omega^q = \tau^q/\tau^T$, $\theta_\omega^q = \tau^q/\tau_r^\omega$, $\theta_T^\omega = \tau_r^\omega/\tau^T$ — отношение времен релаксации, $v_{T\alpha}^2 = v_T^2/(1 + \alpha_0)$ — характерная скорость, перенормированная взаимодействием. Действительная часть в (28) изменяет знак с частотой при условии $\tau_r^\omega > 2\tau^q + \tau^T/\alpha_0$, причем $d_v^{T\prime} > 0$ в области $\omega > \omega_{T1}$ и $d_v^{T\prime} < 0$ в области $\omega < \omega_{T1}$, где $\omega_{T1}^2 = -(\tau_1^{T\omega})^{-2}$. Мнимая часть в (28) изменяет знак с частотой при $\tau_r^\omega < \tau^q \alpha_0[(\alpha_0^{-1} + 1)^{1/2} - 1]$, причем $d_v^{T\prime\prime} > 0$ в области $\omega < \omega_{T2}$ и $d_v^{T\prime\prime} < 0$ в области $\omega > \omega_{T2}$, где $\omega_{T2}^2 = -(\tau_2^{T\omega})^{-2}$. Не существует области параметров, в которой действительная и мнимая части изменяют знак одновременно. Частоты ω_{T1} и ω_{T2} определяют точный скин-эффект и окно прозрачности соответственно. При слабом взаимодействии ($\alpha_0 \to 0$) эти эффекты исчезают. Рассмотрим частные случаи.

В области частот, где $|I_2^{T\omega}| \gg |\omega \tau_\xi^T I_1^{T\omega}|$, соотношение (30) сводится к виду

$$k'_3{}'' = 2^{-1/2}\left((\omega/\tau^T)^{1/2}/v_{T2}\right)\left[1 \pm (\omega \tau_\xi^T I_1^{T\omega}/2|I_2^{T\omega}|)\right.$$

$$\left. + 2(\omega \tau_\xi^T I_1^{T\omega}/4I_2^{T\omega})^2\right], \qquad (30)$$

где $\tau_\xi^T = \tau^T \xi_\alpha/(1 + \alpha_0)$ — перенормированное время релаксации температуры, $v_{T2}^2 = v_{T\alpha}^2 I_r^\omega/|I_2^{T\omega}|$ — зависящая от частоты эффективная скорость. На низких частотах $\omega \ll |\tau_2^{T\omega}|^{-1}, (\tau_r^\omega)^{-1}$ и при $\xi_\alpha < 0$ в окрестности ω_{T1} величина $k'_3 = k''_3 = 1/\delta_\alpha^T$, где $\delta_\alpha^T = (\omega/2\tau^T)^{1/2}/v_{T\alpha}$ — перенормированная взаимодействием глубина проникновения температурной волны.

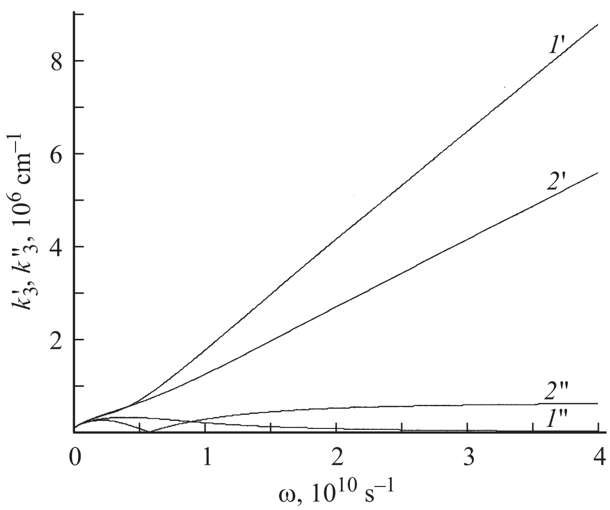

Рис. 6. Дисперсионная зависимость ($1'$, $2'$) и особенность затухания ($1''$, $2''$) температурной компоненты связанных волн при значениях параметров $\tau^q = 1 \cdot 10^{-8}$ s (кривые $1'$, $1''$) и $\tau^q = 2 \cdot 10^{-8}$ s (кривые $2'$, $2''$).

В области частот, где $|\omega \tau_\xi^T I_1^{T\omega}| \gg |I_2^{T\omega}|$, соотношение (30) сводится к виду

$$k'_3{}'' = 2^{-1/2}(\omega/v_{T1})\left[(1 \pm \xi_\alpha I_1^{T\omega}/|\xi_\alpha I_1^{T\omega}|)\right.$$

$$\left. + (I_2^{T\omega}/\omega \tau_\xi^T I_1^{T\omega})^2/2\right]^{1/2}, \qquad (31)$$

где $v_{T1}^2(\omega) = v_T^2 I_r^\omega / |\xi_T I_1^{T\omega}|$ — эффективная скорость. В высокочастотной области $\omega \gg |\tau_{1,2}^{T\omega}|^{-1}, (\tau_r^\omega)^{-1}$ и при $\xi_{\alpha 2} < 0$ в окрестности ω_{T2} действительная и мнимая части волнового числа $k'_3 = \omega/v_{T\infty}$ и $k''_3 = |\xi_{\alpha 2}|/2\xi_{\alpha 1} v_{T\infty} \tau^T$, где $v_{T\infty}^2 = v_T^2/\xi_{\alpha 1}$ — перенормированная взаимодействием асимптотическая скорость температурных волн.

Температурная компонента волн связана с компонентой угловой скорости через параметр α_0, которая, в свою очередь, связана с компонентой линейной скорости через параметр λ^v. При $\lambda^v \to 0$ останутся связанными только температурная компонента и компонента угловой скорости, образуя термоспиновые волны. При $\alpha_0 \to 0$ связанные термоспиновые волны переходят в рассмотренные выше несвязанные температурные волны.

Построенные численно зависимости (28) при данных выше постоянных параметрах представлены на рис. 6. Для кривых *1* и *2* условие прозрачности не выполняется и выполняется соответственно. Кривые *1* имеют вид, аналогичный приведенным на рис. 1 кривым.

Дисперсия и затухание связанных волн

В итоге рассмотрим связанные волны линейной и угловой скоростей и температуры. Разделив подкоренное выращение в (17) на действительную и мнимую части, можно записать определяющие дисперсию и затухание соотношения для компоненты линейной скорости (акустоспиновой моды) в виде

$$k_1'{}'' = (1/2)\{[(c'_+)^2 + (c''_+)^2]^{1/2} \pm c'_+\}^{1/2} \tag{32}$$

и для компоненты угловой скорости внутреннего вращения (спин-акустической моды) в виде

$$k_2'{}'' = (1/2)\{[(c'_-)^2 + (c''_-)^2]^{1/2} \pm c'_-\}^{1/2}, \tag{33}$$

где

$$c'_\pm = d'_+ \pm d'_D, \quad c''_\pm = d''_+ \pm d''_D,$$

$$d_D'{}'' = 2^{-1/2}\{[(D')^2 + (D'')^2]^{1/2} \pm D'\}^{1/2},$$

$$D' = (d'_-)^2 - (d''_-)^2 + \Lambda'_d, \quad D'' = 2d'_-d''_- + \Lambda''_d$$

— действительная и мнимая части подкоренного выражения $D = d_-^2 + \Lambda_d$,

$$\Lambda'_d = 4(\Lambda' d_v^{v\prime} - \Lambda'' d_v^{v\prime\prime}), \quad \Lambda''_d = 4(\Lambda'' d_v^{v\prime} + \Lambda' d_v^{v\prime\prime})$$

— действительная и мнимая части параметра, характеризующего взаимодействие полей. Температурная компонента связанных мод определяется выражением (28).

В случае действительных ω действительная и мнимая части коэффициента связи определяются соотношениями

$$\Lambda' = \Lambda_0(F'_\Lambda F'_T - F''_\Lambda F''_T), \quad \Lambda'' = \Lambda_0(F'_\Lambda F''_T + F''_\Lambda F'_T),$$

$\Lambda_0 = \omega_0^2 \lambda_\eta^v v_v^2 / v_{v0}^2 v_{\omega 0}^2$ — асимптотическая ($\omega \to 0$) величина коэффициента связи. Действительная и мнимая части функции, определяющей частотную зависимость параметра связи, имеют вид

$$F'_\Lambda = [I_{2t}^v I_1^{v\omega} I_2^\omega - \omega^2 (\tau_2^{v\omega})^2 I_{\Sigma 1}^{v\omega}]/(I)^3,$$

$$F''_\Lambda = \omega(\tau_r^v - \tau_t^\omega)[I_{\Sigma 2}^{v\omega} - \omega^2(\tau_2^{v\omega})^2]/(I)^3,$$

где $(\tau_{2t}^v)^2 = \tau_t^v \tau_1^v$, $(\tau_1^{v\omega})^2 = \tau_r^v \tau_t^\omega$, $(\tau_2^{v\omega})^2 = (\tau_1^v - \tau_t^v) \times$ $\times (\tau_1^\omega - \tau_r^\omega)$ — характерные времена релаксации, $I_{\Sigma 1}^{v\omega} = I_1^{v\omega} + I_{2t}^v \xi_{vv} + I_2^\omega \xi_{v\omega}$, $\xi_{vv} = (\tau_r^v - \tau_t^\omega)/(\tau_1^v - \tau_t^v)$ и $\xi_{v\omega} = (\tau_r^v - \tau_t^\omega)/(\tau_1^\omega - \tau_r^\omega)$ — отношения времен релаксации, $(I)^3 = I_1^v I_r^v I_1^\omega$, $I_{\Sigma 2}^{v\omega} = I_{2t}^v I_2^\omega + I_1^{v\omega}(I_2^\omega \xi_{vv}^{-1} + I_{2t}^v \xi_{v\omega}^{-1})$.

Проанализируем дисперсию и затухание компонент линейной и угловой скоростей связанных волн. Выражения (32), (33) аналогичны соотношениям несвязанных волн (20) и, следовательно, поведение связанных волн будет подобно поведению несвязанных волн. В частности, в области частот, где $(c'_\pm)^2 \gg (c''_\pm)^2$, возможно распространение связанных волн, а в области частот, где $(c'_\pm)^2 \ll (c''_\pm)^2$, связанные волны затухают на длине волны (скин-эффект). Частоты ω_s и ω_c, на которых $c'_\pm(\omega_s) = 0$ и $c''_\pm(\omega_c) = 0$, определяют особые точки дисперсии и затухания связанных волн. Частоты ω_s определяют точный скин-эффект. Они удовлетворяют уравнению $4d_v^{v\prime} d_\Lambda^{\omega\prime}((d'_+)^2 + (d''_-)^2) = (d'_-)^2\Lambda'_d + d_{-\Lambda}^2 \Lambda''_d$, где $d_{-\Lambda}^2 = d'_- d''_- + \Lambda''_d/4$. Частоты ω_s связанных волн линейной и угловой скоростей лежат в разных частотных диапазонах, где $d'_+ < 0$ и $d'_+ > 0$ соответственно. Частоты ω_c определяют окна прозрачности, в которых волны распространяются без затухания (частотный антирезонанс) при $c'_\pm(\omega_c) > 0$ и частоты „отсечки“ (энергетические щели) при $c'_\pm(\omega_c) < 0$. Частоты ω_c удовлетворяют уравнению $4d_v^{v\prime\prime} d_\Lambda^{\omega\prime\prime}((d''_+)^2 + (d'_-)^2) = -(d''_+)^2\Lambda'_d + d_{-\Lambda}^2 \Lambda''_d$. При $\Lambda_d \to 0$ выражения переходят в уравнения, определяющие ω_s и ω_c волн угловой скорости внутреннего вращения. Частоты ω_c связанных волн линейной и угловой скоростей лежат в разных частотных диапазонах, где $d''_+ < 0$ и $d''_+ > 0$ соответственно. Частотам ω_c, как видно из (28) и (29), соответствуют волновые числа $k_{1,2c}$. Бегущие и стоячие волны (пространственный антирезонанс) с $k_{1,2c}$ не затухают. Возбужденная стоячая волна с частотой ω_c не излучает. Особенности волн обусловлены взаимодействием полей. Если $\lambda^v = 0$, то все особенности исчезают.

Указанные эффекты можно качественно рассмотреть на основе модели в виде цепочки вращательных маятников. Маятники представляют собой шарообразные грузы на невесомых стрежнях, способных вращаться без трения относительно оси подвеса. В поле тяжести грузы маятников расположены по прямой линии в равновесии и могут вращаться в одной плоскости.

Пусть шарообразная частица с массой равной массе груза налетает на цепочку по указанной прямой линии. Тогда груз отклоняется, и частица останавливается. Если кинетическая энергия частицы больше потенциальной энергии маятника в перевернутом положении, то маятник делает оборот и ударяет частицу сзади. В результате этого взаимодействия маятник приходит в равновесное положение, и частица летит к следующему маятнику с прежней энергией. Таким образом, частица проходит через цепочку без потери энергии.

Если энергия частицы меньше, чем максимальная потенциальная энергия, то маятник после отклонения возвращается к положению равновесия и ударяет частицу спереди. В результате частица летит с прежней энергией в противоположном направлении (отражается). Если частице сопоставить волну, а маятнику — волны вихря линейной или угловой скоростей, то в первом случае волна распространяется без затухания и во втором случае волна не проникает в среду.

При слабой связи в области частот, где $(d'_-)^2 - (d''_-)^2 \gg \Lambda'_d$ и $2d'_-d''_- \gg \Lambda''_d$, выражения (32) и (33) переходят в описывающие несвязанные волны соотношения (19) и (21) соответственно. Приближение несвязанных волн пригодно вдали от точек синхронизма (ТС) (k'_r, ω_r), где дисперсионные ветви волн линейной и угловой скоростей пересекаются. В ТС фазовые скорости волн равны и, следовательно, происходит их резонансное взаимодействие. Координаты ТС определяются из уравнения $k'_r = k'_v(\omega_r) = k'_\omega(\omega_r)$. Из (19) и (21) следует, что ветви спектра всегда пересекаются в начале координат $(k'_r, \omega_r = 0)$. Кроме этого, могут существовать ТС, удовлетворяющие уравнению $(d''_+d''_-)^2 = 4d'_-[d_v^{v\prime}(d_\Lambda^{\omega\prime\prime})^2 - (d_v^{v\prime\prime})^2 d_\Lambda^{\omega\prime}]$. При слабом затухании уравнение сводится к соотношению $d_v^{v\prime} = d_\Lambda^{\omega\prime}$, которое в адиабатическом приближении дает уравнение $F_r(\omega_r) = 0$, где $F_r(\omega) = c_3\omega^6 + c_2\omega^4 + c_1\omega^2 - a_0$ — бикубический полином, $c_3 = 1 - c_0$, $c_2 = a_2 - c_0\big((\tau_1^\omega)^{-2} + (\tau_{2\xi}^v)^{-2}\big)$, $c_1 = a_1 - c_0(\tau_1^\omega)^{-2}(\tau_{2\xi}^v)^{-2}$ — коэффициенты, $c_0 = v_{\omega\infty}^2/v_{v\infty}^2$. В случае $v_{\omega\infty} > v_{v\infty}$ уравнение не имеет решений при $c_1 < c_2^2/3c_3 < 0$ (ветви не пересекаются) и имеет два ршения при $F_{rm1} > 0$ (ветви пересекаются в двух точках), где $F_{rm1} = F_r(\omega_{rm1}^2)$ — максимальное значение $F_r(\omega_r)$, $\omega_{rm1,2}^2 = -(c_2/3c_3) \pm [(c_2/3c_3)^2 - (c_1/3c_3)^2]^{1/2}$ — точки экстремумов, существующие при $c_2^2 - 3c_1c_3 > 0$. В случае $v_{\omega\infty} < v_{v\infty}$ уравнение имеет одно решение в отсутствие экстремумов и при наличии экстремумов, если $F_{rm1} > 0$ или $F_{rm2} < 0$ (ветви пересекаются в одной точке) и три решения при $F_{rm1} < 0$ и $F_{rm2} > 0$, где $F_{rm1} = F_r(\omega_{rm1}^2)$ и $F_{rm2} = F_r(\omega_{rm2}^2)$ — минимум и максимум $F_r(\omega_r)$.

В окрестности ТС $d'_- \approx 0$ и, следовательно, d'_D и d''_D определяются параметрами взаимодействия и затухания. Поэтому вблизи ТС при слабом взаимодействии и затухании в линейном приближении по отклонениям от ТС $k'_{1,2}{}^{,\prime\prime} = k'_{1,2}{}^{,\prime\prime} - k'_r{}^{,\prime\prime}$ и $\varpi = \omega - \omega_r$ из (32) и (33) следуют выражения

$$k'_{1,2} = \pm k'_0 + (v'_{r\pm})^{-1}\varpi, \quad k''_{1,2} = k''_{0\pm} + (v''_{r\pm})^{-1}\varpi, \quad (34)$$

где $k'_0 = d'_D(\omega_r)/4k'_r$ — смещение действительной части волнового числа в ТС, $(v'_{r\pm})^{-1} = (d'_{+,\omega} \pm d'_{D,\omega})\big|_r/4k'_r$ — обратная скорость в ТС, причем второе слагаемое определяет поправку за счет взаимодействия и диссипации, $d'_{+,\omega}\big|_r = \partial d'_+/\partial\omega\big|_r$ и $d'_{+,\omega}\big|_r = \partial d'_D/\partial\omega\big|_r$ — производные в точке ω_r, $k''_r = k''(\omega_r)$ и $k''_{0\pm} = (k''_{01} \pm k''_{02})/32k''_r d_{0v}^{v\prime}\big|_r$ — мнимые части волнового числа, определяющие затухание и его смещение в ТС, $k''_{01} = [(d'_D)^2 + (d''_D)^2 + d''_-(d''_- - 4d_v^{v\prime\prime})]\big|_r$ и $k''_{02} = [d''_D(4d_v^{v\prime\prime} - d''_-) - 2d'_D(d_v^{v\prime\prime})^2/d_v^{v\prime}]\big|_r$ — составляющие смещения, $(v''_{r\pm})^{-1} = [(v''_{r\pm})_1^{-1}d_{1\pm} + (v''_{r\pm})_2^{-1}d_{2\pm}]/4d_v^{v\prime}\big|_r$ — эффективная обратная скорость в ТС, $(v''_{r\pm})_1^{-1} = (v'_{r\pm})^{-1}k'_r/k''_r$ и $(v''_{r\pm})_2^{-1} = (d''_{+,\omega} \pm d''_{D,\omega})\big|_r 4k''_r$ — определяемые производными составляющие эффективной скорости в ТС, $d_{1\pm} = \big(\pm d'_D - (d_v^{v\prime\prime})^2/d_v^{v\prime}\big)\big|_r$ и $d_{2\pm} = \big(\pm d''_D + d_v^{v\prime\prime} - d''_-\big)\big|_r$ — коэффициенты в ТС. Из (34) следует, что в ТС зазор между ветвями спектра и разность коэффициентов затухания составляют $2k'_0$ и $k''_{02}/16k''_r d_v^{v\prime}\big|_r$ соответственно. Более детально дисперсия и затухание волн в окрестности ТС рассмотрены в [15].

Численные решения уравнений (32) и (33) приведены на рис. 7 и 8. Дисперсионные зависимости для приведенных выше (в разд. 6) значений параметров в полях линейной скорости и температуры и $\tau^\lambda = 10^{-10}$, $\tau_t^\omega = 0.2 \cdot 10^{-10}$, $\tau_r^\omega = 0.02 \cdot 10^{-10}$ s показаны на рис. 7.

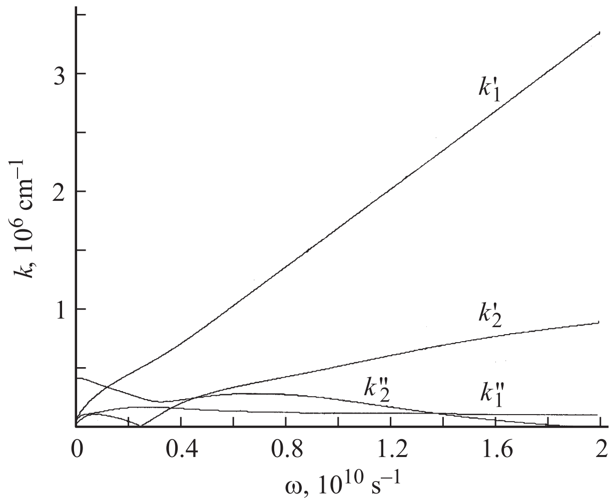

Рис. 7. Дисперсия и затухание связанных волн при наличии частот отсечки и прозрачности ($\tau_t^\omega = 0.2 \cdot 10^{-10}$ и $\tau_r^\omega = 0.02 \cdot 10^{-10}$, $\tau^\lambda = 10^{-10}$ s).

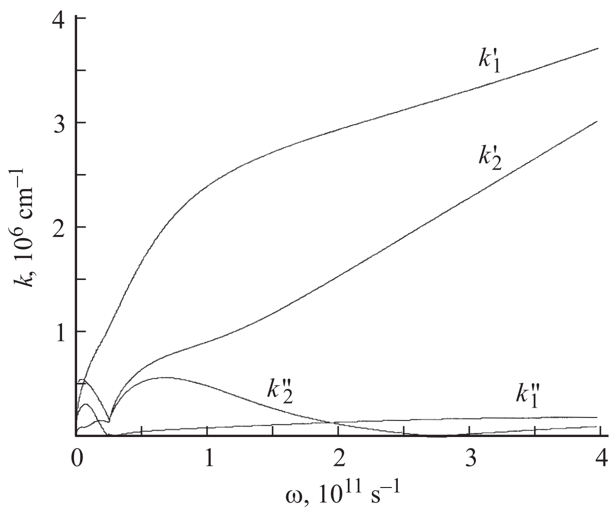

Рис. 8. Спектр связанных волн с особенностью в акустоспиновой ветви.

Видно, что при данных значениях акустоспиновая ветвь не имеет особенностей, но спин-акустическая ветвь имеет частоту отсечки. На рас. 8 показаны дисперсионные зависимости и затухание связанных волн при меньших временах релаксации в поле линейной скорости $\tau_t^v = 10^{-10}$, $\tau_r^v = 1.2 \cdot 10^{-11}$ s, $\lambda_\eta^v = 20$, $\nu^v = 0.01\,\mathrm{cm^2/s}$ и при приведенных выше значениях параметров в полях угловой скорости и температуры. Видно, что акустоспиновая ветвь имеет особенности, подобные сапин-акустической ветви.

В случае действительных k и комплексных $\omega = \omega' + i\omega''$ и (32) и (33) следуют уравнения $k''_1 = 0$ и $k''_2 = 0$, которые определяют связь ω'' и ω'. Если выразить ω'' через ω', то уравнения $k'_1(\omega')$ и $k'_2(\omega')$ будут описывать дисперсию возбуждений линейной и угловой скоростей. При $\omega'' = 0$ уравнения будут определять частоты $\omega'_{c1,2}$ и волновые числа

$k'_{1c} = k'_1(\omega'_{c1})$ и $k'_{2c} = k'_2(\omega'_{c2})$, для которых возбуждения не затухают. Уравнение $k'_2(\omega'_g) = 0$ определяет энергетическую щель. На ненулевых частотах ω'_g происходит однородная „прецессия“ с релаксацией. При $\tau^\lambda \ll \omega^{-1}$ вектор $\boldsymbol{\omega}$ успевает подстраиваться к $\boldsymbol{\Omega}$, а малые колебания $\boldsymbol{\omega}$ относительно $\boldsymbol{\Omega}$ дают энергетическую щель.

Обсуждение результатов

Выше рассматривались плоские бегущие волны в неограниченной однокомпонентной среде в линейном приближении. В ограниченной среде частоты незатухающих стоячих волн будут составлять широкий спектр. Если на этих частотах отсутствует затухание, то и нет излучения. Возбуждение мод может происходить параметрически на разностных частотах. Эти частоты и будут излучаться. В многокомпонентной жидкости спектр частот расширяется. В нелинейном приближении возможны уединенные волны с внутренней динамической структурой.

Волны внутреннего вращения могут возбуждаться вихревым потоком. Амплитуда волн ограничивается нелинейными эффектами. Следовательно, движущаяся жидкость может иметь запас энергии внутреннего вращения. Кроме того, в среде с неоднородными параметрами волны линейной (угловой) скорости могут преобразовываться в волны угловой (линейной) скорости, длина волны которых достигает значительной величины в точках возврата, образуя эффективный диполь угловой (линейной) скорости. Такие диполи могут образовываться в океане и атмосфере, а также при обтекании тел.

На основе подобия волн в жидкости и проводящей среде можно предположить, что в проводящей среде будут наблюдаться эффекты, аналогичные рассмотренным выше.

Автор благодарен Ф.В. Лисовскому за плодотворное обсуждение работы и полезные замечания.

Список литературы

[1] *Бэтчелор Дж.* Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973. 758 с.

[2] *Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.* Теоретическая гидромеханика. М.: Гос. изд-во технико-технич. лит., 1955. 560 с.

[3] *Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П.* Теория волн. М.: Наука, 1990. 432 с.

[4] *Баранский К.Н., Север Г.А., Величкина Т.С.* // Письма в ЖЭТФ. 1971. Т. 13. Вып. 1. С. 52.

[5] *Бердышев А.А., Лежнев Н.Б.* Письма в ЖЭТФ, 1971. Т. 13. Вып. 1. С. 49.

[6] *Френкель Я.И.* Кинетическая теория жидкости. М.: Наука, 1975. 592 с.

[7] *Сорокин В.С.* // ЖЭТФ. 1943. Т. 13. Вып. 7–8. С. 307.

[8] *Де-Гроот С., Мазур П.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1964. 456 с.

[9] *Дьярмати И.* Неравновесная термодинамика. М.: Мир, 1974. 304 с.

[10] *Кабыченков А.Ф.* // Тез. докл. XVI междунар. шк.-семинара. 1998. Ч. 1. С. 185; Сб. тр. XIX междунар. шк.-семинара. М. 2004. С. 376, 379.

[11] *Birss R.R.* Symmetry and Magnetism. 1964. 252 p.

[12] *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1979. 640 с.

[13] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 664 с.

[14] *Тамм И.Е.* Основы теории электричества, М.: Наука, 1976. 616 с.

[15] *Кабыченков А.Ф., Шавров В.Г., Шевченко А.Л.* // ФТТ. 1989. Т. 31. Вып. 7. С. 193.