

## Развитие неустойчивости мейсснеровского состояния в трехмерной упорядоченной джозефсоновской среде

© М.А. Зеликман

Санкт-Петербургский государственный политехнический университет,  
195251 Санкт-Петербург, Россия

(Поступило в Редакцию 4 августа 2008 г.)

Предложен новый подход к расчету проникновения внешнего магнитного поля в трехмерную упорядоченную джозефсоновскую среду, основанный на анализе непрерывного видоизменения конфигурации в направлении уменьшения ее потенциала Гиббса. Найдена конфигурация, в которую в результате развития неустойчивости переходит мейсснеровское состояние при малом превышении внешним полем границы устойчивости мейсснеровского режима. Эта конфигурация содержит периодическую последовательность линейных вихрей с центрами через одну ячейку, расположенную параллельно границе на некотором расстоянии от нее.

При дальнейшем увеличении поля обнаруживается сходство поведения трехмерной среды и длинного периодически модулированного джозефсоновского контакта. Однако критическое значение  $I_C$  для трехмерной среды, находящееся в интервале 0.7–0.8, меньше аналогичного значения для длинного контакта  $I_C = 0.9716$ . Значения  $H_{\max}$  при  $I < I_C$ , а также крутизна спада магнитного поля у границы при  $I > I_C$  в среде больше, чем в длинном контакте. Причиной этих различий является большее значение максимальной силы пиннинга вихрей в трехмерной среде, чем в длинном контакте.

При достаточно больших значениях  $I$  поле проникает в приграничную область не в виде двумерной решетки линейных вихрей, а в виде одномерной последовательности плоских вихрей, математически эквивалентных вихрям в длинном контакте.

PACS: 03.75.Lm, 47.32.-y

### Введение

В массивных сверхпроводниках 2-го рода, помещенных во внешнее магнитное поле  $H_e$ , начиная со значения  $H_e = H_{C1}$  становится энергетически выгодным переход в смешанное состояние, когда магнитное поле частично проникает в толщу сверхпроводника в виде вихревых нитей. В то же время уравнения электродинамики формально допускают вплоть до тремодинамического критического поля  $H_C$  равновесные решения мейсснеровского типа с проникновением поля в тонкую приповерхностную область. Таким образом, существует возможность задержки проникновения вихрей в сверхпроводник для полей  $H_e > H_{C1}$ . С точки зрения термодинамики это явление представляет собой „перегрев“ мейсснеровского состояния. Максимальное поле  $H_{S1}$ , до которого возможен этот „перегрев“, определяется как граница устойчивости метастабильного мейсснеровского состояния по отношению к малым флуктуациям. В работе [1] на базе горьковского формализма показано, что для материалов с большим значением параметра Гинзбурга–Ландау  $\kappa$  поле перегрева  $H_{S1} \approx 0.75H_C$  при  $T = T_C$  и  $H_{S1} \approx 0.8H_C$  при  $T = 0$ . В работе [2] найдены границы существования метастабильного мейсснеровского состояния на базе анализа второй вариации потенциала Гиббса для модели Гинзбурга–Ландау. Показано, что при  $\kappa > 0.5$  нестабильность возникает при некотором  $H_{S1} < H_{S2}$ , где  $H_{S2}$  — поле, до которого существует мейсснеров-

ское решение уравнений Гинзбурга–Ландау. Для  $\kappa \gg 1$   $H_{S1} \approx 0.745H_C$ , что соответствует результатам [1].

Пока не получен окончательный ответ на вопрос, как происходит проникновение вихрей в сверхпроводник второго рода. В [1] предполагается, что при  $H_e > H_{S1}$  флуктуации непосредственно перерастают в вихревые нити. Однако в [2] предлагается иной механизм. Рост флуктуаций при  $H_e > H_{S1}$  может приводить к новому метастабильному состоянию, в котором к экранирующим токам добавляется слой поверхностных вихрей чередующейся ориентации, каждый из которых, в отличие от абрикосовских, обладает нулевым флюксоидом. Это новое метастабильное состояние может существовать до поля  $H_{S3}$ , по порядку величины равного  $H_{S2}$  (при  $\kappa \gg 1$  оказывается  $H_{S2} = H_{S3} = H_C$ ). При  $H_e > H_{S3}$  в образце появляются области нормальной фазы, в которых спонтанно возникают абрикосовские вихри, в результате чего образец переходит в смешанное состояние.

Представляет несомненный интерес проведение аналогичных исследований для высокотемпературных сверхпроводников (ВТСП). Физика происходящих в них процессов заметно отличается от того, что происходит в обычных сверхпроводниках. Важнейшую роль играет тот факт, что ВТСП состоят из сверхпроводящих гранул, в точках соприкосновения которых друг с другом возникают джозефсоновские контакты. Поэтому иной вид имеют вихри, иной физике соответствуют критические поля. В частности, характерные значения полей столь малы, что речь не может идти о переходе гранул в нормальное

состояние (поэтому поле  $H_{S2}$ , до которого существует мейсснеровское решение, отличается от термодинамического поля  $H_C$ ). Вихри располагаются не в отдельных гранулах, а вовлекают в себя большое количество их, при этом токи проходят через джозефсоновские контакты между гранулами. Достаточно вспомнить, что такой контакт является существенно нелинейным элементом, чтобы представить себе сложность возникающей картины. Добавим к этому зацепление (пиннинг) вихрей на пустотах между гранулами. Все эти моменты делают исследование поведения ВТСП во внешнем магнитном поле достаточно сложной задачей, требующей специального подхода.

В работах [3,4] предложена простая модель гранулированного ВТСП, представляющая собой кубическую решетку, состоящую из сверхпроводящих проводов, каждый из которых содержит один джозефсоновский контакт. На базе условий квантования флюксоида в ячейках этой среды получена система уравнений для расчета структуры возможных токовых состояний. Как показали расчеты [3–5], такой модели, которую принято называть трехмерной упорядоченной джозефсоновской средой, присущи все свойства, характерные для сверхпроводников во внешнем магнитном поле: мейсснеровские экранирующие токи, взаимодействующие друг с другом вихри, набор характерных магнитных полей и т.п., причем даже количественные соотношения аналогичны имеющим место в обычных и высокотемпературных сверхпроводниках. Поэтому использование этой модели целесообразно при анализе процессов, происходящих в реальных ВТСП.

В работе [5] рассмотрена устойчивость мейсснеровского состояния трехмерной джозефсоновской среды относительно малых флуктуаций скачков фазы на контактах. Показано, что значение  $H_{S1}/H_{S2}$  растет с увеличением параметра пиннинга  $I$  и находится в пределах от 0.84 до 1, что согласуется с результатами, полученными в [1,2] для обычных сверхпроводников 2-го рода. Анализ формы критических флуктуаций, проведенный в [5], показывает, что при всех значениях параметра пиннинга  $I$  они представляют собой быстро затухающие вглубь (на нескольких слоях) периодически повторяющиеся знакопеременные структуры шириной в одну ячейку.

Возникает целый ряд вопросов. Как развиваются флуктуации? К чему приводит возникающая неустойчивость? В сверхпроводниках первого рода предел мейсснеровского состояния определяется равенством энергий нормального и сверхпроводящего состояний с учетом энергии экранирующих токов и равен  $H_C$ . Если внешнее поле больше  $H_C$ , то образец переходит в нормальное состояние. В рассматриваемом случае джозефсоновской среды эти соображения неприменимы. Что же будет происходить, когда внешнее поле превысит значение  $H_{S2}$ ? Как известно, в сверхпроводнике 2-го рода установилась бы периодическая решетка абрикосовских вихрей, поскольку при отсутствии пиннинга, как бы ни были малы силы взаимодействия вихрей друг с другом, они

заставляют вихри заполнить все сечение образца. Как влияет на ситуацию существование пиннинга, который препятствует прохождению вихрей внутрь? За счет чего в глубине образца произойдет компенсация внешнего поля, большего  $H_{S2}$ ? Обычно в этом случае дается ответ, что проникновение вихрей в приповерхностную область увеличивает толщину слоя, в котором могут протекать экранирующие токи, в результате чего может быть скомпенсировано большее внешнее поле. Было бы интересно получить количественное подтверждение этого положения.

Кроме того, понятно, что должно существовать некое критическое значение пиннинга, разделяющее два возможных режима. Для большей ясности рассмотрим похожую ситуацию, имеющую место в длинном периодически модулированном джозефсоновском контакте [6,7]. В [6] показано, что существует некоторое критическое значение параметра пиннинга  $I_C = 0.9716$ . При  $I < I_C$  ситуация такая же, как при отсутствии пиннинга, т.е. при превышении внешним полем некоторого значения  $H_{\max}$ , зависящего от  $I$ , вихри заполняют сразу весь контакт от его границы до бесконечности. Это напоминает ситуацию в сверхпроводниках 2-го рода. При  $I > I_C$  вихри с ростом поля постепенно продвигаются от границы внутрь контакта, а магнитное поле в глубине контакта остается равным нулю, т.е. ситуация аналогична сверхпроводнику 3-го рода.

Что-то похожее должно иметь место и в рассматриваемом случае трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды. Определенное сходство этих двух задач позволяет использовать одни и те же идеи для их решения. В работе [7] предложен подход к расчету профиля магнитного поля внутри длинного периодически модулированного джозефсоновского контакта, основанный на анализе непрерывного видоизменения токовой структуры, ведущего к уменьшению ее потенциала Гиббса. Этот подход позволяет найти ту конфигурацию, в которую переходит мейсснеровское состояние при малом превышении внешним полем верхней границы устойчивости, и проследить ее развитие при дальнейшем увеличении поля. Расчет [7] подтвердил существование критического значения параметра пиннинга  $I_C$  в интервале 0.95–1, разделяющего два возможных режима проникновения в контакт магнитного поля. При  $I < I_C$  были найдены значения магнитного поля  $H_{\max}(I)$ , при превышении которых в контакте устанавливается бесконечная цепочка вихрей. При  $I > I_C$  расчет показал, что магнитное поле в приграничных структурах уменьшается с глубиной почти линейно. Значения коэффициента наклона  $k$  представляют собой рациональные числа и остаются постоянными в конечных интервалах  $I$ . При выходе  $I$  за верхнюю границу такого интервала  $k$  скачком увеличивается и принимает значение другого рационального числа.

В настоящей работе предлагается модификация предложенного в [7] подхода для решения аналогичной задачи внутри трехмерной упорядоченной джозефсоновской

среды. Такой подход адекватно описывает происходящий процесс, который рассматривается как непрерывная трансформация устанавливающегося распределения токов. При этом в каких-то областях конфигурации токи убывают, в каких-то возрастают, т. е. вихри не ведут себя как заталкиваемые полем внутрь жесткие частицы, а как бы „втекают“ внутрь среды.

Целью настоящей работы является нахождение конфигурации, в которую переходит мейсснеровское состояние трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды при малом превышении внешним полем значения  $H_{S1}$ , анализ ее развития при дальнейшем увеличении поля, а также вычисление критического значения параметра пиннинга  $I_C$ , разделяющего различные режимы проникновения магнитного поля. Кроме того, при  $I < I_C$  будут рассчитаны значения магнитного поля  $H_{\max}(I)$ , а при  $I > I_C$  — крутизна спада магнитного поля у границы образца.

Рассмотрение будет, как и в [3–5], производиться на модели, представляющей собой кубическую решетку с периодом  $a$ , состоящую из сверхпроводящих проводов диаметром  $\delta$ , каждая связь которой содержит один джозефсоновский контакт, причем все контакты имеют малые размеры и обладают одной и той же величиной критического тока  $J_C$ . Внешнее магнитное поле  $\mathbf{H}_e$  направлено вдоль главной оси решетки. Токовое распределение имеет плоскую структуру, т. е. во всех параллельных плоскостях, перпендикулярных полю  $\mathbf{H}_e$  и расположенных на расстоянии  $a$  друг от друга, токи распределены идентично.

### Мейсснеровская конфигурация

Рассмотрим сначала токовую конфигурацию мейсснеровского типа, т. е. когда вдоль поверхности образца протекают параллельные ей токи, замыкающиеся на бесконечности (рис. 1). Сила тока, протекающего в граничном слое, равна  $J_1 = J_C \sin \varphi_1$ . По мере углубления в образец имеем  $J_m = J_C \sin \varphi_m$  для  $m = 2, 3, \dots$ . В глубине образца токи равны нулю, что является одним из граничных условий.

В каждой из ячеек выполняется условие квантования флюксоида [3], согласно которому сумма скачков фазы по замкнутому контуру с джозефсоновскими контактами должна равняться нормированному магнитному потоку

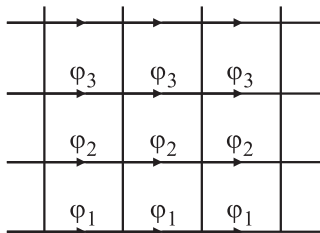


Рис. 1. Конфигурация мейсснеровского типа.

через контур, т. е.

$$2\pi\Phi_m/\Phi_0 + \sum_k \varphi_k^{(m)} = 0, \quad (1)$$

где  $\sum_k \varphi_k^{(m)}$  — сумма скачков фазы на джозефсоновских контактах  $m$ -й ячейки с учетом знака;  $\Phi_0$  — квант магнитного потока;  $\Phi_m$  — полный магнитный поток через  $m$ -ю ячейку. Обычно в правой части условия квантования флюксоида пишется член  $2\pi N_m$ , где  $N_m$  — целое число, равное величине флюксоида в  $m$ -й ячейке. При этом скачки фазы по модулю не должны превышать величины  $\pi$ . Не будем накладывать на них никаких ограничений. Найдя решение, можно вычислить  $N_m$ , пересчитав фазы, как будет показано далее.

Для рассматриваемой мейсснеровской конфигурации (1) принимает вид

$$2\pi\Phi_m/\Phi_0 + \varphi_m - \varphi_{m+1} = 0, \quad (2)$$

а магнитный поток  $\Phi_m$  описывается выражением [3]

$$\begin{aligned} \Phi_m &= \mu_0 \int_{\delta}^{a-\delta} H(r) dr \\ &= \mu_0 (a - 2\delta)^2 \left( \sum_{k=1}^m \frac{J_k}{a} + \frac{b}{a} (J_{m-1} - J_m) - H_e \right), \quad (3) \end{aligned}$$

где параметр

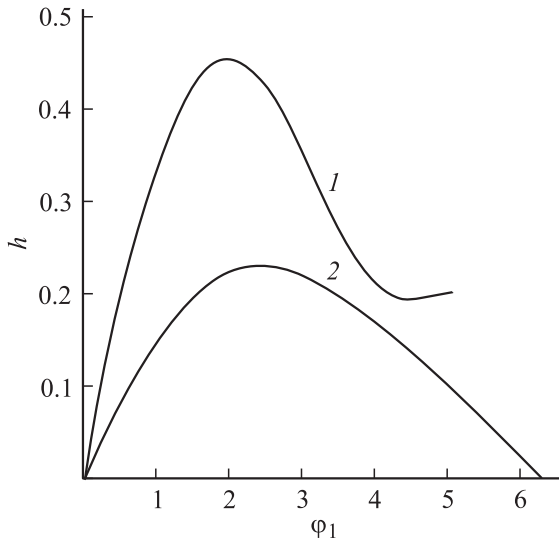
$$b = \frac{1}{2\pi(1 - 2\delta/a)} \ln \frac{1 - \exp(-2\pi(1 - \delta/a))}{1 - \exp(-2\pi\delta/a)}.$$

Следует сказать, что выражение для  $b$  уточнено и отличается от полученного в [3]. Далее будем рассматривать такие значения  $I$  и  $b$ , что  $Ib \ll 1$ , где  $I$  — параметр пиннинга, определяемый выражением (4). Тогда после подстановки (3) в (1) появляется возможность пренебречь вторым членом в (3). Отметим, что такое рассмотрение справедливо также для искусственной структуры, созданной из сверхпроводящих нитей, склеенных друг с другом по всей длине, так что джозефсоновскими контактами являются поверхности соединения нитей. Внешнее поле направлено вдоль нитей. Поперечное сечение структуры должно представлять собой квадратную решетку, при этом форма ячейки не обязана быть квадратной, в частности, она может быть образована нитями круглого сечения. Легко показать, что в этой ситуации поле в ячейках однородно и  $b = 0$ .

Подставив (3) в (2) для различных  $m$  и вычтя из уравнения для  $(m - 1)$ -й ячейки уравнение для  $m$ -й, получаем следующую систему разностных уравнений:

$$\varphi_{m+1} - 2\varphi_m + \varphi_{m-1} = I \sin \varphi_m \quad (m \geq 2), \quad (4)$$

где  $I = 2\pi\mu_0(a - 2\delta)^2 J_C / a\Phi_0$  — так называемый параметр пиннинга.



**Рис. 2.** Зависимость нормированной напряженности внешнего магнитного поля от скачка фазы на участке, ближайшем к границе, для  $I = 1.6$  — кривая 1 и  $0.5$  — 2.

В качестве граничных условий к (3) используем стремление к нулю  $\varphi_m$  при стремлении  $m$  к бесконечности, а также условие (1) для  $m = 1$

$$\varphi_1 - \varphi_2 = -I \sin \varphi_1 + 2\pi h, \quad (5)$$

где  $h = H_e/H_0$  — нормированная напряженность внешнего поля,  $H_0 = \Phi_0/\mu_0 S$  — значение внешнего поля, при котором через каждую ячейку площадью  $S = (a - 2\delta)^2$  проходит один квант магнитного потока  $\Phi_0$ .

Найдем точное решение системы (4). Представим ее в виде рекуррентного закона

$$\varphi_{m+1} = 2\varphi_m - \varphi_{m-1} + I \sin \varphi_m \quad (m \geq 2). \quad (6)$$

Задавая значения  $\varphi_1$ , будем численно искать соответствующие им возможные значения  $\varphi_2$ , при которых существует решение в виде монотонно убывающей с ростом  $m$  комбинации значений  $\varphi_m$ . Из уравнения (5) найдем соответствующее полученному решению значение нормированной напряженности внешнего магнитного поля  $h$ .

На рис. 2 приведены полученные графики зависимости  $h(\varphi_1)$  для некоторых значений  $I$ . Начальный участок кривой до максимума соответствует мейсснеровскому режиму. Максимально возможное значение  $h_{S2}$  соответствует величине магнитного поля  $H_{S2}$ , выше которой мейсснеровское решение отсутствует. Развитие ситуации при дальнейшем увеличении поля будем исследовать на базе анализа потенциала Гиббса системы.

## Методика вычислений

В работе [5] показано, что флуктуации, относительно которых мейсснеровская конфигурация неустойчива,

представляют собой быстро затухающие вглубь (на нескольких слоях) периодически повторяющиеся знакопеременные структуры шириной в одну ячейку. Это дает основания предположить, что в процессе развития неустойчивости распределение скачков фазы будет сохранять такую же геометрию (рис. 3). Равенство модулей и противоположность знаков скачков фазы в соседних вертикальных участках следует из периодичности конфигурации и условия непрерывности токов в узлах.

Будем считать, что скачки фазы  $\psi_m$  в контактах с  $m > N + 1$  равны нулю. (Обозначение  $\psi_m$  введено для любого скачка фазы с индексом  $m$ ). По мере роста внешнего поля и увеличения толщины приграничного слоя значение  $N$  может выбираться сколь угодно большим, поэтому это условие не ограничивает общность задачи. Потенциал Гиббса такой конфигурации высотой в 1 m записывается в виде [5]

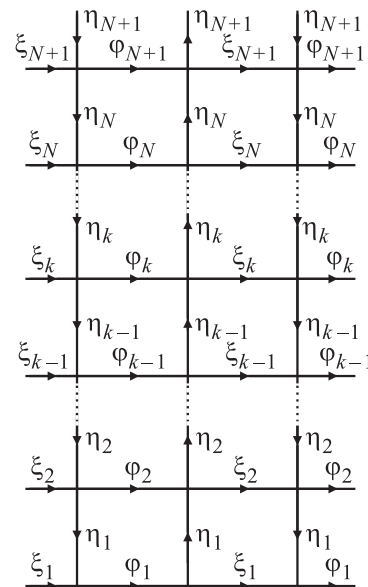
$$G = E_J + E_H - \int BHdV, \quad (7)$$

где  $E_J$  и  $E_H$  — джозефсоновская и магнитная энергии единицы длины (вдоль  $\mathbf{H}_e$ ), равные

$$E_J = \frac{E_C}{a} \sum_k (1 - \cos \psi_k) = IE_0 \sum_k (1 - \cos \psi_k), \quad (8)$$

$$E_H = \sum_i \frac{B_i^2}{2\mu_0} V_i = E_0 \frac{1}{2} \sum_i \left( \sum_l \psi_{il} \right)^2, \quad (9)$$

где  $E_C = \Phi_0 J_C / 2\pi$  — энергия джозефсоновского контакта;  $B_i = \Phi_i / S$  — магнитная индукция в  $i$ -й ячейке;  $B_i^2 / 2\mu_0$  — плотность магнитной энергии в  $i$ -й ячейке;  $V_i = S$  — объем единицы длины;  $E_0 = \Phi_0^2 / 4\pi^2 \mu_0 S$  —



**Рис. 3.** Распределение скачков фазы в рассматриваемой конфигурации.

нормировочная постоянная. Суммирование по  $k$  в (8) ведется по всем джозефсоновским контактам, по  $i$  в (9) — по всем ячейкам, по  $l$  во внутренней сумме в (9) — по всем 4 контактам  $i$ -й ячейки (с учетом знака). При выводе (9) было использовано условие квантования флюксоида (1).

Как известно, в рассматриваемой геометрии термодинамическая напряженность магнитного поля  $H$  во всех точках одна и та же, она равна напряженности внешнего поля  $H_e$ , поэтому последний член в (9) можно записать в виде

$$H_e \sum_i \Phi_i = \frac{H_e \Phi_0}{2\pi} \sum_i \sum_l \psi_{il} = \frac{H_e \Phi_0}{2\pi} \sum_n \psi_{1n}, \quad (10)$$

где  $\psi_{il}$  — скачок фазы в  $l$ -м контакте  $i$ -й ячейки, а сумма по  $n$  берется по всем контактам граничного ряда. При выводе (10) было учтено, что при суммировании по всем ячейкам все значения  $\psi_{il}$  для контактов внутри конфигурации входят в сумму дважды, причем с разными знаками, поэтому остается только суммирование по граничным контактам.

С учетом вышесказанного выражение для потенциала Гиббса принимает вид

$$\begin{aligned} G = E_0 & \left( 0.5 \sum_{k=1}^N (\varphi_k - \varphi_{k+1} + 2\eta_k)^2 \right. \\ & + 0.5 \sum_{k=1}^N (\xi_k - \xi_{k+1} - 2\eta_k)^2 \\ & \left. + I \sum_{k=1}^{N+1} (4 - \cos \varphi_k - \cos \xi_k - 2 \cos \eta_k) - 2\pi h (\varphi_1 + \xi_1) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Далее будем измерять  $G$  в единицах  $E_0$  и трактовать величину  $G$  как высоту (или потенциальную энергию) горного рельефа, заданного на многомерном множестве координат  $\varphi_i, \xi_i$ . Такой подход предложен в [7] для длинного джозефсоновского контакта. Однако в [7]  $h_{S1} = h_{S2}$ , и неустойчивость при  $h > h_{S1}$  возникает автоматически, поскольку никакого возможного мейсснеровского состояния при таком поле не существует. В рассматриваемом случае при  $h > h_{S1}$  мейсснеровская конфигурация возможна, но энергетически не выгодна. Для перехода в более выгодную конфигурацию надо задать системе нужную флуктуацию, в связи с чем ситуация слегка изменяется.

Установившаяся при каком-либо значении внешнего поля  $h$  мейсснеровская конфигурация (набор координат) соответствует минимуму энергии (впадине) в рельефе. С ростом  $h$  рельеф постепенно изменяется, мейсснеровская конфигурация слегка смещается, но ей продолжает соответствовать локальный минимум. При достижении магнитным полем значения  $h_{S1}$  этот минимум становится седловой точкой. Если теперь система „сделает шаг“ в соответствующем направлении, т.е. получит

нужную флуктуацию, то она окажется на склоне рельефа. Дальнейшее изменение формы этой конфигурации можно рассматривать как „скатывание“ по рельефу с уменьшением „потенциальной энергии“, в результате которого система окажется в другом минимуме, в котором конфигурация уже не будет мейсснеровской. Пусть этот процесс происходит как результат большого количества маленьких шагов. Логично предположить, что в каждой „точке“ скатывание происходит вдоль линии наискорейшего спуска, т.е. вдоль градиента функции  $G$ . Это значит, что при каждом шаге все „координаты“  $\psi_i$  (т.е.  $\varphi_i, \xi_i$ ) получают приращения, пропорциональные соответствующей проекции градиента:

$$\Delta \varphi_i = - \frac{\partial G}{\partial \psi_i} \delta,$$

где  $\delta > 0$  — малый постоянный множитель, задающий величину шага. Далее вычисляем все  $\frac{\partial G}{\partial \psi_i}$  в новой точке, т.е. при новых значениях  $\psi_i$ , и производим следующий шаг. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не придем к новой устойчивой конфигурации, находящейся в минимуме рельефа. Этим завершается первый этап расчета.

На втором этапе анализируется развитие ситуации при дальнейшем увеличении магнитного поля. Если  $h$  увеличится на какое-то малое значение, это приведет к некоторому видоизменению рельефа, в результате чего конфигурация, соответствовавшая минимуму прежнего рельефа, теперь окажется на склоне нового и „скатится“ в новый минимум. Последовательно увеличивая  $h$ , можно исследовать распределение скачков фазы  $\varphi_i, \xi_i$ , а значит, токов и магнитных полей, во всем диапазоне изменения внешнего поля.

Перед тем как записать выражения для  $\frac{\partial G}{\partial \psi_i}$ , учтем условия непрерывности токов в узлах. Последовательно записывая эти условия в узлах каждого ряда, начиная от граничного, получим

$$\sin \eta_k = \sum_{i=1}^k (\sin \varphi_i - \sin \xi_i) \quad (k = 1, 2, \dots, N+1), \quad (12)$$

откуда можно выразить значения  $\eta_k$  в виде функций от  $\varphi_i$  и  $\xi_i$

$$\eta_k = \arcsin \sum_{i=1}^k (\sin \varphi_i - \sin \xi_i). \quad (13)$$

Кроме того, надо наложить граничные условия равенства нулю магнитного поля вдали от границы. Их можно записать в виде

$$I \sum_{k=1}^{N+1} \sin \varphi_k = 2\pi h, \quad I \sum_{k=1}^{N+1} \sin \xi_k = 2\pi h,$$

откуда следует, что  $\varphi_{N+1}$  и  $\xi_{N+1}$  являются функциями всех остальных  $\varphi_i, \xi_i$ :

$$\varphi_{N+1} = \arcsin\left(2\pi h/I - \sum_{i=1}^N \sin \varphi_i\right);$$

$$\xi_{N+1} = \arcsin\left(2\pi h/I - \sum_{i=1}^N \sin \xi_i\right), \quad (14)$$

что следует учитывать при вычислении производных  $\partial G/\partial \psi_i$ .

Тогда выражения для „проекции градиента“  $G$  по осям  $\varphi_i$  принимают вид

$$\begin{aligned} \partial G/\partial \varphi_i &= 2\varphi_i - \varphi_{i-1} - \varphi_{i+1} + 2(\eta_i - \eta_{i-1}) + I \sin \varphi_i \\ &+ 2 \cos \varphi_i \sum_{k=1}^N \frac{\varphi_k - \varphi_{k+1} - \xi_k + \xi_{k+1} + 4\eta_k + I \sin \eta_k}{\cos \eta_k} \\ &+ 2I \cos \varphi_i \operatorname{tg} \eta_{N+1} - \partial G/\partial \eta_{N+1} \cos \varphi_i / \cos \varphi_{N+1} \end{aligned}$$

$$(2 \leq i \leq N), \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \partial G/\partial \varphi_1 &= -2\pi h + \varphi_1 - \varphi_2 + 2\eta_1 + I \sin \varphi_1 \\ &+ 2 \cos \varphi_1 \sum_{k=1}^N \frac{\varphi_k - \varphi_{k+1} - \xi_k + \xi_{k+1} + 4\eta_k + I \sin \eta_k}{\cos \eta_k} \\ &+ 2I \cos \varphi_1 \operatorname{tg} \eta_{N+1} - \partial G/\partial \eta_{N+1} \cos \varphi_1 / \cos \varphi_{N+1}, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \partial G/\partial \varphi_{N+1} &= \varphi_{N+1} - \varphi_N - 2\eta_N \\ &+ I \sin \varphi_{N+1} + 2I \cos \varphi_{N+1} \operatorname{tg} \eta_{N+1}. \end{aligned} \quad (17)$$

Производные по  $\xi_i$  можно получить из выражений (15)–(17), меняя местами все  $\varphi_i$  и  $\xi_i$  и поменяв везде знак у  $\eta_i$  на обратный.

На рис. 4 приведены полученные в [5] графики зависимостей от  $I$  величины  $h_{S1}/h_{S2}$ , а также  $\varphi_{\min}$ , соответствующей значению  $h_{S1}$ . В качестве начальной

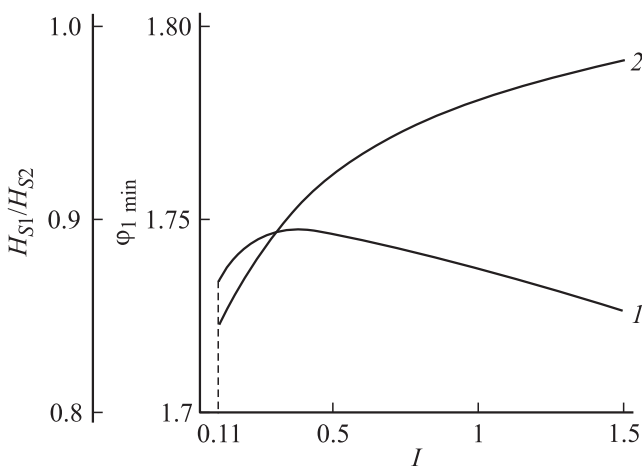


Рис. 4. Зависимости величин  $\varphi_{\min}$  (кривая 1) и  $H_{S1}/H_{S2}$  (2) от параметра  $I$ .

точки алгоритма возьмем мейсснеровскую конфигурацию при внешнем поле, немного превышающем  $h_{S1}$ . Для этого рассчитаем мейсснеровскую конфигурацию по алгоритму (6) для начального значения, чуть большего  $\varphi_{1 \min}$  для выбранного  $I$ . Далее дадим величинам  $\varphi_k$  и  $\xi_k$  для малых  $k$  небольшие приращения, соответствующие неустойчивой флуктуации [5] при внешнем поле, равном  $h_{S1}$ . Например, в табл. 2b в [5] приведены рассчитанные для  $I = 1$  величины таких приращений, нормированные на „амплитуду“ флуктуации: в одном вертикальном ряду, начиная от границы, 0.402; 0.070; 0.010; 0.001, и в соседнем — те же значения с обратным знаком. Умножим эти числа на какую-то малую „амплитуду“, например 0.001, добавим полученные значения к соответствующим  $\varphi_k$  и  $\xi_k$  и предоставим возможность „точке“ двигаться по „линии наискорейшего спуска“, как это объяснялось выше. В смысле программирования это означает задать цикл, в каждом шаге которого новые значения  $\varphi_m$  и  $\xi_m$  при  $1 \leq m \leq N$  вычисляются по формуле  $\psi_m = \psi_m - \frac{\partial G}{\partial \psi_m} \delta$  с учетом (15)–(17), а  $\varphi_{N+1}$  и  $\xi_{N+1}$  — по (14). В конце концов придем к конфигурации, в которой все производные  $\partial G/\partial \psi_i$  обратятся в нуль, т.е. будут выполнены условия (1). Это и есть искомая равновесная конфигурация, отличающаяся от исходной мейсснеровской. Она является итогом первого этапа расчета. Начиная от нее, как говорилось выше, можно дать приращение  $\Delta h$  магнитному полю, проследить переход системы в новое равновесное состояние и т.д.

Выполнение условий (1) будем проверять, вычисляя магнитное поле  $h_m$  внутри  $m$ -й ячейки по формуле

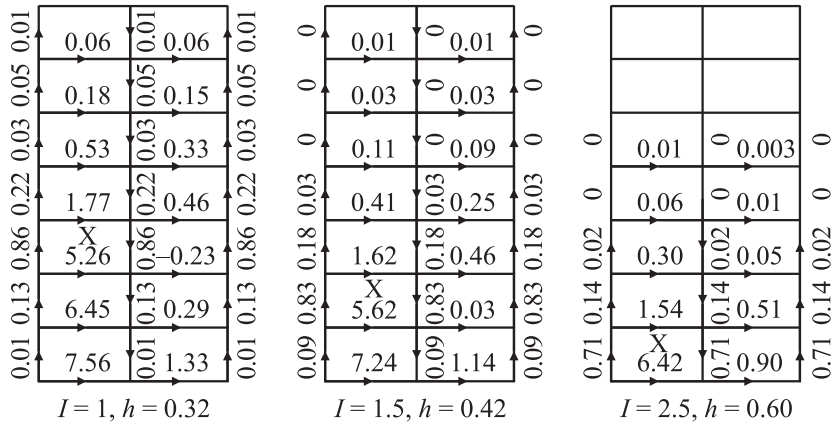
$$2\pi h_m = -2\pi h + I \sum_{i=1}^m \sin \psi_i. \quad (18)$$

Такая проверка показывает, что условия (1) с высокой точностью выполняются в конце как первого этапа, так и каждого цикла расчетов (при новом значении  $h$ ) на втором этапе.

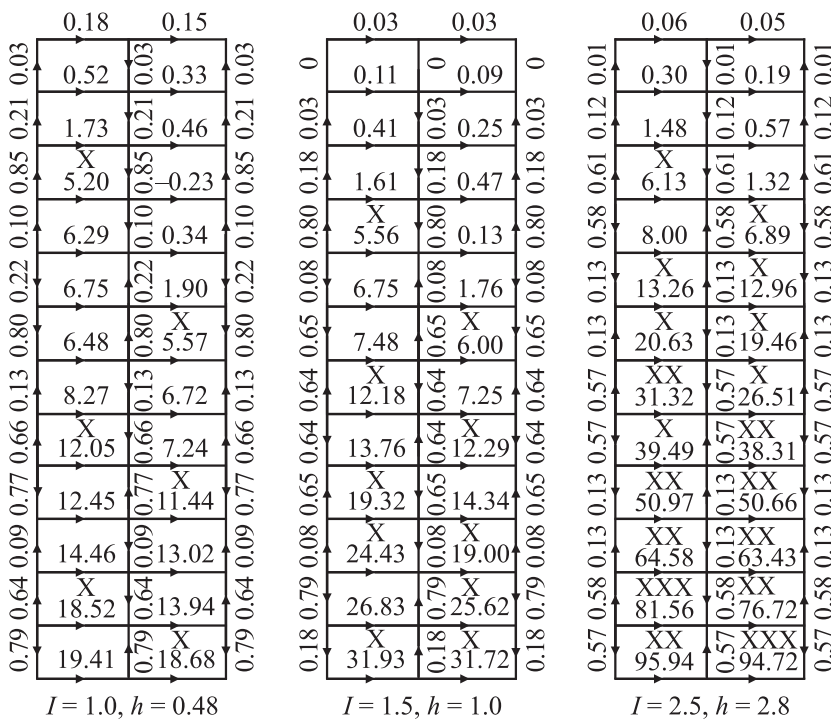
## Результаты расчетов, их интерпретация и анализ

Компьютерные расчеты полностью подтвердили возможность использования предложенного алгоритма для расчета проникновения поля в среду. Каждый этап расчета в итоге приводит к равновесной конфигурации, удовлетворяющей уравнениям (1). Получающиеся решения имеют период вдоль границы, равный двум ячейкам (см. рис. 3). Для простоты будем далее называть конфигурацию шириной в две ячейки, периодическое повторение которой дает искомые токовые распределения, основой. Основа состоит из двух столбцов. На рис. 5 приведены результаты, полученные на базе предложенного алгоритма при  $h = h_{S1}$  для нескольких значений  $I$ .





**Рис. 5.** Распределения скачков фазы в основе при  $h = h_{S1}$  для разных значений  $I$ :  $a - I = 1, h = h_{S1} = 0.32$ ;  $b - I = 1.5, h = h_{S1} = 0.42$ ;  $c - I = 2.5, h = h_{S1} = 0.6$ .



**Рис. 6.** Распределения скачков фазы в основе, получающиеся на втором этапе при дальнейшем увеличении внешнего поля:  $a - I = 1, h = 0.48$ ;  $b - I = 1.5, h = 1.0$ ;  $c - I = 2.5, h = 2.8$ .

При анализе полученной конфигурации оказывается удобной интерпретация ее как последовательности вихрей, проникших в контакт. Из аналогии с вихрями в длинном джозефсоновском контакте [3] следует, что центры вихрей на рис. 5 находятся в ячейках с максимальными значениями  $h_m$ . При этом анализ распределения скачков фазы показывает, что это те ячейки, в которых  $\psi_m$  (т.е.  $\varphi_m$  или  $\xi_m$ ) впервые (если двигаться из глубины превосходят значения  $2\pi K + \pi$  ( $K$  — целое число). Отсюда следует, что для трактовки картины как последовательности вихрей нужно каждый раз, как только  $\psi_m$  превосходит  $\pi$ , вычитать из него целое число

раз по  $2\pi$ , так чтобы все  $|\psi_m| < \pi$ . При этом количество вычитенных  $2\pi$  минус аналогичная величина на предыдущем шаге даст значение флюксоида в соответствующей ячейке.

На рис. 5 ячейки с флюксоидом, равным единице, обозначены крестами. Видно, что при достижении полем значения  $h_{S1}$  в одном из столбцов основы на некотором расстоянии от границы образуется вихрь. С увеличением  $I$  центр вихря находится все ближе к границе. Обратим внимание на то, что величины скачков фазы в вертикальных участках в точности соответствуют такому расположению вихрей.

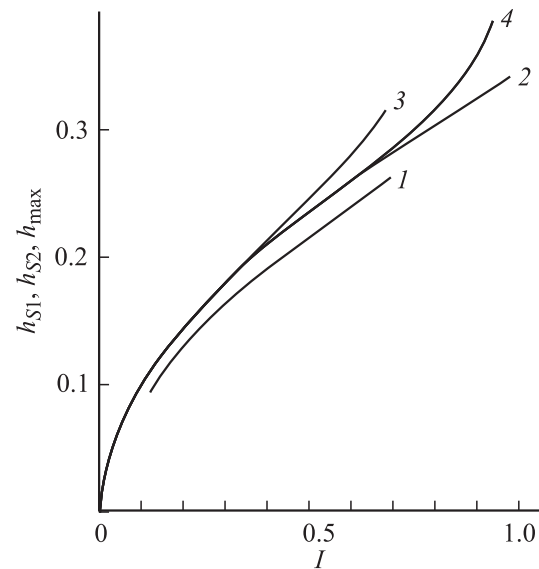
Говоря о вихрях, необходимо учитывать следующее важное замечание. Вихрем обычно называют самоподдерживающуюся токовую структуру, центральная ячейка которой содержит флюксoid, отличный от нуля [3,4]. При этом имеется в виду, что внешнее поле отсутствует или скомпенсировано за счет экранирующих поверхностных токов, как это имеет место в мейсснеровском состоянии. Тогда соответствующий флюксoid создается самими токами вихря. Если внешнее магнитное поле не равно нулю, то флюксoid создается и внешним полем, и полем токов. При этом флюксoid, создаваемый самими токами, может иметь любое значение, в зависимости от величины внешнего поля, и по направлению может как совпадать, так и быть противоположным внешнему, лишь бы доводить суммарный флюксoid до целого числа. Из сказанного ясно, что такие объекты не вполне правильно называть вихрями. Было бы точнее говорить о флюксoidах, содержащихся в ячейках. Однако, имея в виду отмеченные выше отличия, все же будем и далее использовать термин „вихрь“.

На рис. 6 изображены основы, возникающие на втором этапе при дальнейшем увеличении внешнего поля для тех же значений  $I$ . Видно, что в обоих столбцах основы от границы вглубь выстраиваются две различные последовательности вихрей, длина которых растет с увеличением поля. При достаточно больших значениях поля при движении из глубины сначала обнаруживаются вихри с флюксoidом, равным единице, затем — двум, а далее — и с большими количествами. Число крестов в ячейке обозначает величину флюксoidа в ней.

Постепенно увеличивая значение  $h$ , можно проследить последовательное изменение профиля проникающего в контакт магнитного поля при различных значениях параметра пиннинга. Полученные результаты подтверждают соображения о существовании критического значения пиннинга, разделяющего два возможных режима проникновения поля в среду. При  $I$ , превышающем критическое значение  $I_C$ , расчет при любом значении внешнего поля  $h$  приводит к приграничной конфигурации конечной длины, удовлетворяющей условиям (1). Глубина проникновения увеличивается с ростом поля  $h$ . Если  $I < I_C$ , то такая картина имеет место лишь до некоторого значения  $h = h_{\max}$ . При больших значениях поля длина приграничной конфигурации по ходу расчета все время увеличивается, при этом потенциал Гиббса монотонно убывает, но условия (1) не выполняются. Это означает, что расчет может продолжаться бесконечно, а поле проникает в среду на бесконечную глубину.

#### а. Случай $I < I_C$

Расчет показывает, что при  $I = 0.7$  еще существует максимальное значение  $h_{\max}$ , но при  $I = 0.8$  решение есть при любом значении  $h$ . Это означает, что критическое значение  $I_C$  находится между 0.7 и 0.8. Найденное значение заметно меньше величины  $I_C = 0.9716$ , полученной в [6] для длинного джозефсоновского контакта.



**Рис. 7.** Зависимости величин  $h_{S1} — I$ ,  $h_{S2} — 2$  и  $h_{\max} — 3$  при  $I < I_C$ , а также  $h_{\max}$  для длинного джозефсоновского контакта 4 от  $I$ .

На рис. 7 приведены зависимости от  $I$  величин  $h_{S1}(I)$ ,  $h_{S2}(2)$  и  $h_{\max}(3)$  в области  $I < I_C$ , а также кривая  $h_{\max}(I)$  (4) для длинного джозефсоновского контакта [7].

Отметим, что поскольку система уравнений, описывающих длинный периодически модулированный джозефсоновский контакт [6,7], совпадает с системой (4), то кривая 2 представляет собой зависимость  $h_{S2}(I)$  и для такого контакта, а поскольку в нем  $h_{S1} = h_{S2}$  [7], то и  $h_{S1}(I)$  для него.

Отметим, что зависимость  $h_{\max}(I)$  для трехмерной среды проходит выше аналогичной кривой для длинного джозефсоновского контакта. Этот факт можно объяснить следующим образом.  $h_{\max}$  — это максимальное внешнее поле, при котором еще может находиться в равновесии наиболее удаленный от границы вихрь. Имея в виду приведенные ранее замечания о смысле понятия „вихрь“, отметим, что этот вихрь можно считать таковым в привычном понимании, так как в месте его расположения поле почти отсутствует. Вихри в длинном контакте описываются теми же уравнениями, что плоские вихри в трехмерной среде [3,4]. Плоский вихрь можно рассматривать как набор линейных вихрей с центрами в соседних ячейках. Рассматриваемая в настоящей статье ситуация соответствует последовательности линейных вихрей с центрами через одну ячейку. В [8] показано, что существование близких вихрей той же ориентации уменьшает максимальную силу пиннинга линейного вихря. Отсюда можно сделать вывод, что пиннинг вихрей в длинном контакте меньше, чем в рассматриваемой конфигурации. Поэтому  $h_{\max}$  для среды больше, чем  $h_{\max}$  для длинного контакта при том же значении  $I$ . Теми же соображениями объясняется отмеченный выше факт, что критическое значение  $I_C = 0.7–0.8$  для трехмерной



среды меньше значения  $I_C = 0.9716$  для длинного джозефсоновского контакта.

Приведенные выше рассуждения позволяют сделать важный вывод о проникновении магнитного поля в рассматриваемую среду при  $I < I_C$ . Что происходит при адиабатическом увеличении поля? Пока  $h < h_{S1}$ , экранирующие токи обеспечивают мейсснеровский режим. При  $h = h_{S1}$  возникает неустойчивость, приводящая к проникновению вихрей в приповерхностную область, с ростом  $h$  толщина слоя проникновения вихрей увеличивается, при этом поле в глубине образца остается равным нулю. При превышении значения  $h_{\max}$  поле должно проникнуть внутрь на бесконечную глубину. Если бы при этом устанавливалась двумерная решетка линейных вихрей, то поле между вихрями должно было бы равняться нулю, т.е. внешнее поле должно было бы компенсироваться полем приповерхностных токов.

Если бы  $h_{\max}$  было меньше максимального поля мейсснеровского режима  $h_{S2}$ , такое могло бы произойти. Однако из сказанного ранее следует, что ситуация обратная, так как  $h_{\max}$  для трехмерной среды больше  $h_{\max}$  для длинного контакта, которое равно  $h_{S2}$ . Это подтверждается и графиками рис. 7. Поэтому компенсация невозможна. Это означает, что предполагаемый вариант двумерной решетки линейных вихрей не может реализоваться. Скорее всего, поле будет проникать внутрь в виде одномерной последовательности плоских вихрей, как это происходит в случае длинного джозефсоновского контакта. Этот вопрос заслуживает дополнительного исследования.

## в. Случай $I > I_C$

Формула (18) позволяет найти магнитное поле в любой ячейке. На рис. 8 сплошной и пунктирной кривыми изображены зависимости магнитного поля в ячейке от расстояния до границы (в количестве ячеек) и двух столбцов основы для случаев  $I = 0.9$  (1) и  $I = 2.5$  (2). При  $I = 0.9$  на кривых имеются осцилляции, поскольку между вихрями в столбцах есть промежутки. В этом случае центры вихрей находятся в ячейках с максимальными значениями  $h_m$ . При  $I = 2.5$  центры вихрей находятся в соседних ячейках столбца и содержат увеличивающиеся по мере приближения к границе флюксоиды (см. рис. 6), поэтому осцилляции отсутствуют.

Как видно из рис. 8, проникающее в контакт магнитное поле зависит от глубины почти линейно, с некоторыми более или менее выраженными осцилляциями. Крутизна убывания поля внутрь увеличивается с ростом параметра пиннинга. В таблице приведены значения крутизны  $k$  (т.е. усредненного изменения величины  $h$  на длине одной ячейки) при разных  $I$  для рассматриваемого случая трехмерной среды ( $k_{3D}$ ), а также для длинного джозефсоновского контакта ( $k_C$ ) [8]. В обоих случаях значения коэффициента наклона  $k$  представляют собой рациональные дроби, однако значения  $k$  при тех же  $I$  для

$I$	0.9	1	1.5	2	2.5
$k_{3D}$	1/47	1/31	1/11	1/7	1/4
$k_C$	—	< 0.001	1/41	1/13	1/5

трехмерной среды больше. Причиной этого, как и некоторых уже рассмотренных закономерностей, является большее значение максимальной силы пиннинга вихрей в среде, чем в длинном контакте.

Из таблицы видно, что с ростом  $I$  разница величин  $k$  для среды и контакта уменьшается. Можно ожидать, что при достаточно больших  $I$  значения  $k$  совпадут. Это действительно так. Для достаточно больших значений  $I$  (в частности, уже для  $I = 3$ ) при увеличении поля от  $h_{S1}$  на втором этапе, т.е. от конфигурации с одним вихрем в основе, при некотором  $h$  расчет дает в качестве равновесной плоскую конфигурацию, в которой оба столбца основы идентичны (все  $\varphi_i = \xi_i$ ), совпадающую с решением для длинного контакта [8] при том же значении поля. Это означает, что с увеличением поля во втором столбце основы появляется вихрь с центром в том же ряду, что и в первом столбце. При дальнейшем увеличении поля должна снова возникнуть неплоская конфигурация, в которой только в одном из столбцов появляется еще один вихрь. Чтобы прийти к этой конфигурации, следует постепенно увеличивать поле и при каждом новом значении  $h$  проверять устойчивость плоской конфигурации по алгоритму, предложенному в [5]. При некотором значении  $h$  проверка покажет неустойчивость к флуктуации, форма которой рассчитывается по тому же алгоритму. Теперь нужно снова провести расчет, аналогичный первому этапу, т.е. при найденном  $h$  дать величинам  $\varphi_k$  и  $\xi_k$  для малых  $k$  небольшие приращения, соответствующие найденной

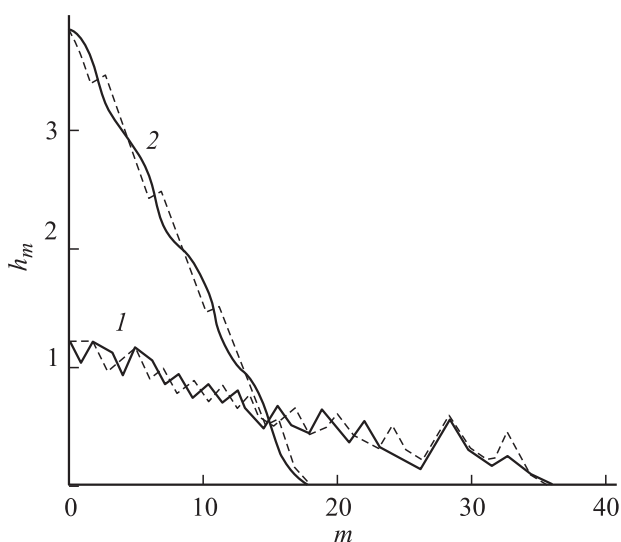
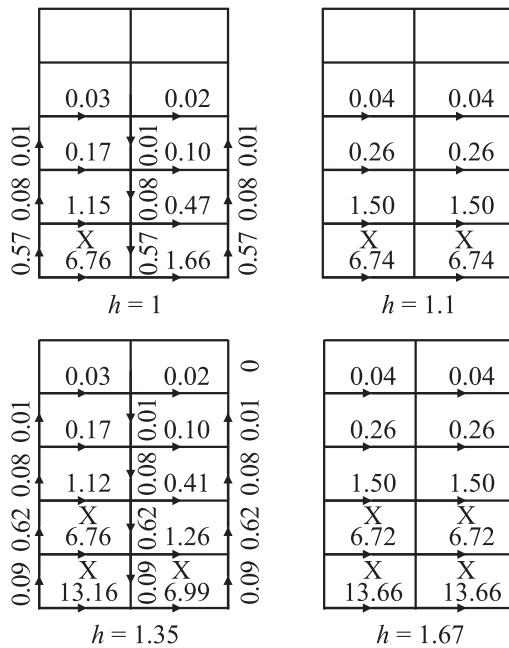


Рис. 8. Зависимости магнитного поля в ячейке от расстояния до границы (в количестве ячеек) в двух столбцах основы для случаев  $I = 0.9$  (кривые 1) и  $I = 2.5$  (2).



**Рис. 9.** Развитие конфигурации для случая  $I = 4$  с ростом магнитного поля.

флуктуации. В результате получим искомую неплоскую конфигурацию. Но дальнейшее увеличение поля снова приведет нас к плоской конфигурации уже с двумя вихрями в каждом столбце основного элемента. После этого снова ищем неустойчивость и т. д.

На рис. 9 иллюстрируется развитие конфигурации с ростом магнитного поля для случая  $I = 4$ . Можно отметить тот факт, что с ростом  $I$  диапазон полей, в которых существует неплоская конфигурация, уменьшается. Из сказанного понятно, что при таких значениях  $I$  можно с приемлемой степенью точности считать, что поле проникает в приповерхностную область не в виде двумерной решетки линейных вихрей, а в виде последовательности плоских вихрей, рассмотренных в [3,4]. Вследствие идентичности математических описаний крутизна спада магнитного поля в такой структуре совпадает с крутизной спада в длинном периодически модулированном джозефсоновском контакте [6,7].

## Заключение

Предложен новый подход к расчету проникновения внешнего магнитного поля внутрь трехмерной упорядоченной джозефсоновской среды, основанный на анализе непрерывного видоизменения конфигурации, протекающего в направлении уменьшения ее потенциала Гиббса. Процесс проникновения магнитного поля в среду при его адиабатическом увеличении рассматривается как непрерывная трансформация устанавливающегося распределения токов. При этом в каких-то участках конфигурации токи убывают, в каких-то возрастают, т. е.

вихри не ведут себя как заталкиваемые полем внутрь жесткие частицы, они как бы „втекают“ внутрь контакта.

Предложенный алгоритм позволяет найти ту конфигурацию, в которую в результате развития неустойчивости переходит мейсснеровское состояние при малом превышении внешним полем значения  $h_{S1}$ . Она представляет собой приграничное распределение экранирующих токов, содержащее периодическую последовательность линейных вихрей с центрами через одну ячейку, расположенную параллельно границе на некотором расстоянии от нее. Это расстояние уменьшается с ростом параметра пиннинга  $I$ . При  $I > 2$  центры вихрей располагаются в крайнем ряду. В глубине среды магнитное поле отсутствует.

Анализ развития ситуации при дальнейшем увеличении поля показал качественное сходство свойств трехмерной среды и длинного периодически модулированного джозефсоновского контакта. В обоих случаях существует критическое значение  $I_C$ , разделяющее два возможных режима проникновения в среду внешнего магнитного поля. При  $I > I_C$  расчет при любом значении внешнего поля  $H_e$  приводит к приграничной токовой конфигурации конечной длины, полностью компенсирующей внешнее поле в глубине контакта. Если  $I < I_C$ , то такая ситуация реализуется лишь до некоторого значения внешнего поля  $H_{max}$ . При больших значениях поля оно проникает внутрь среды или контакта на бесконечную глубину.

В тех случаях, когда в глубине магнитное поле равно нулю, у границы оно уменьшается с глубиной почти линейно, с некоторыми более или менее выраженными осцилляциями. Значения коэффициента наклона представляют собой рациональные дроби и остаются постоянными в конечных интервалах  $I$ . При выходе значения  $I$  за верхнюю границу такого интервала коэффициент наклона скачком увеличивается и принимает значение другой рациональной дроби.

Однако при качественном сходстве имеются заметные количественные различия. Критическое значение  $I_C$  для трехмерной среды, находящееся в интервале 0.7–0.8, существенно меньше аналогичного значения для длинного контакта  $I_C = 0.9716$ . Значения  $H_{max}$  для среды больше, чем  $H_{max}$  для длинного контакта при том же  $I$ . Крутизна спада магнитного поля у границы при том же значении  $I$  в среде больше. Причиной всех этих различий является большее значение максимальной силы пиннинга вихрей в трехмерной среде, чем в длинном контакте.

С ростом  $I$  разница величин  $k$  для среды и контакта уменьшается, и при достаточно больших  $I$  (в частности, уже для  $I = 3$ ) значения  $k$  совпадают. При таких  $I$  поле проникает в приграничную область не в виде двумерной решетки линейных вихрей, а в виде одномерной последовательности плоских вихрей, математически эквивалентных вихрям в длинном периодически модулированном джозефсоновском контакте.

## Список литературы

- [1] *Галайко В.П.* // ЖЭТФ. 1966. Т. 50. С. 717.
- [2] *Kramer L.* // Phys. Rev. 1968. Vol. 170. P. 475.
- [3] *Zelikman M.A.* // Superconductor Sci. & Techn. 1997. Vol. 10. N 7. P. 469–474.
- [4] *Zelikman M.A.* // Superconductor Sci. & Techn. 1997. Vol. 10. N 11. P. 795–800.
- [5] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 8. С. 14–21.
- [6] *Dorogovtzev S.N., Samuhin A.N.* // Europhys. Lett. 1994. Vol. 25. P. 693–698.
- [7] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 36–42.
- [8] *Зеликман М.А.* // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 9. С. 65–73.