01;03

О влиянии магнитного поля с круговыми силовыми линиями на гравитационное стекание пленки магнитной жидкости по тонкому цилиндру

© В.М. Коровин

Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
Научно-исследовательский институт механики,
119192 Москва, Россия
e-mail: l111@imec.msu.ru

(Поступило в Редакцию 12 января 2009 г.)

Рассматривается вызываемое силой тяжести течение пленки магнитной жидкости по вертикальному токонесущему тонкому проводнику цилиндрической формы. Относительная толщина пленки мала. В рамках системы уравнений феррогидродинамики получены нелинейное уравнение, описывающее эволюцию во времени осесимметричной формы свободной поверхности пленки, заданной в начальный момент. С его помощью в линейной постановке изучено развитие возмущений гидродинамического поля, соответстствующего стационарному течению магнитной жидкости в виде цилиндрической пленки. Установлено, что при достаточно большой силе электрического тока, проходящего по проводнику, такое течение устойчиво.

PACS: 47.65.-d, 75.50.Mm

Введение

В технических устройствах, содержащих в качестве элементов своих конструкций магнитные жидкости, используется эффект воздействия объемных магнитных сил, испытываемых магнитной жидкостью, находящейся в неоднородном магнитном поле. Кроме того, при наличии поверхностей раздела жидкостей, обладающих различными магнитными свойствами, в зависимости от ориентации магнитного поля по отношению к этим поверхностям могут также появляться магнитные силы, локализованные на поверхностях раздела.

В имещихся публикациях — см. монографию [1] и библиографию в ней — приведены результаты теоретических и экспериментальных исследований, свидетельствующие об эффективности использования тонких слоев магнитных жидкостей, удерживаемых на стенках плоских и цилиндрических каналов с помощью магнитных сил, для снижения гидравлического сопротивления. В [1] приведены также результаты исследования вызываемых газовыми потоками пленочных течений магнитных жидкостей. Такие течения имеют практический и теоретический интерес вследствие того, что являются основой ряда теплофизических и химико-технологических процессов.

В работах [2,3] путем решения задачи Орра–Зоммерфельда, записанной с учетом магнитных сил, исследовано воздействие тангенциального к свободной поверхности магнитного поля на гравитационное течение пленки и показана возможность (подтвержденная экспериментом) управления течением с помощью магнитного поля. В [4] предложен способ автоматического подавления конвективной неустойчивости гравитационного течения пленки магнитной жидкости на вертикальной стенке путем управления объемной магнитной силой по принципу обратной связи. В работе [5] изучены нелинейные волны на поверхности осесимметричной пленки вязкой магнитной жидкости, стекающей по вертикальному токонесущему цилиндру.

В [6] теоретически и эксперитетально изучено влияние магнитного поля, индуцируемого протекающим по длинному цилиндрическому проводнику электрическим током, на поведение статической осесимметричной конфигурации магнитной жидкости, покрывающей поверхность проводника. В этой работе полученное теоретическое в рамках модели невязкой магнитной жидкости условие устойчивости слоя постоянной толщины подтверждено экспериментально для вязкой магнитной жидкости. В эксперименте использовался охлаждаемый прокачкой воды полый проводник с внешним радиусом 1 mm. Максмальная сила тока, пропускаемого по проводнику, составляла 30 A. Для предотвращения влияния силы тяжести на форму внешней границы области, занятой магнитной жидкостью, токонесущий проводник, окруженный магнитной жидкостью, помещался в сильно вязкую немагнитную жидкость, имеющую одинаковую с магнитной жидкостью плотность.

В работе [7] изучены нелинейные волны на цилиндрической поверхности раздела невязких магнитных жидкостей одинаковой плотности, окружающих цилиндрический токонесущий проводник. Рассмотрен случай, когда граничащая с проводником жидкость имеет бо́льшую магнитную восприимчивость, чем внешняя жидкость. В [8] проведен анализ влияния продольного магнитного поля на рэлеевскую неустойчивость тонкого цилиндра вязкой магнитной жидкости, окруженного несмешивающейся жидкостью с другой магнитной восприимчивостью и другим коэффициентом вязкости.

В настоящей работе изучено гравитационное стекание цилиндрической намагничивающейся пленки по вертикальному токонесущему проводнику. В отличие от имеющихся публикаций влияние магнитных сил на устойчивость такой пленки исследовано аналитически. С этой целью выведено эволюционое уравнение, описывающее изменение с течением времени формы свободной поверхности пленки малой относительной толщины, и с его помощью изучено развитие малых возмущений одномерного установившегося течения с цилиндрической свободной поверхностью и квадратичным профилем скорости.

Математическое описание пленочного течения магнитной жидкости по вертикальному токонесущему цилиндру

Рассматривается вызываемое силой тяжести осесимметричное течение пленки магнитной жидкости по вертикальному длинному цилиндру, вдоль которого проходит постоянный электрический ток. Введем цилиндрическую систему координат r, φ, z с направленной вниз осью z и обозначим через $\mathbf{a}_r, \mathbf{a}_\varphi, \mathbf{a}_z$ единичные векторы этой системы координат. Пусть поверхность вращения $r = R(z,t)$, где t — время, представляет границу движущейся жидкости с окружающим ее покоящимся газом.

Из решения краевой задачи для стационарных уравнений Максвелла следует, что магнитное поле $\mathbf{H}$, индуцируемое электрическим током, описывается выражением

$$\mathbf{H}(r) = \begin{cases} \dfrac{rI}{2\pi c^2}\,\mathbf{a}_\varphi & \text{при } 0 \le r \le c, \\ \dfrac{I}{2\pi r}\,\mathbf{a}_\varphi & \text{при } r \ge c, \end{cases}$$

где I — сила тока, а c — радиус цилиндра. При записи этого выражения считается, что электрический ток направлен вдоль оси z.

Рассматриваются поля умеренной интенсивности, что позволяет принять линейный закон намагничивания жидкости $\mathbf{M} = \chi\mathbf{H}$, где $\mathbf{M}$ — вектор намагниченности, а χ — магнитная восприимчивость жидкости.

В приближении феррогидродинамики [1,9] выражение для плотности объемной магнитной силы $\mathbf{f}_m$ записывается следующим образом:

$$\mathbf{f}_m = \mu_0 M \operatorname{grad} H = -\frac{\mu_0\chi}{r^3}\left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 \mathbf{a}_r,$$

где $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m — магнитная постоянная. Таким образом, в рассматриваемом случае на жидкость действует внешняя объемная сила плотности

$$\mathbf{f}(r) = -\frac{\mu_0\chi}{r^3}\left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 \mathbf{a}_r + \rho g\,\mathbf{a}_z, \tag{1}$$

где ρ — плотность жидкости, а g — ускорение свободного падения.

Движение магнитной жидкости описывается системой уравнений

$$\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{2}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + w\frac{\partial u}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$+\eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - \frac{u}{r^2}\right) - \frac{\mu_0\chi}{r^3}\left(\frac{I}{2\pi}\right)^2,$$

$$\rho\left(\frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial r} + w\frac{\partial w}{\partial z}\right) = -\frac{\partial p}{\partial z}$$

$$+\eta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}\right) + pg,$$

где $u(r,z,t)$, $w(r,z,t)$ — проекции вектора скорости на координатные линии r и z, $p(r,z,t)$ — давление, а η — коэффициент динамической вязкости жидкости.

На свободной поверхности пленки должны выполняться кинематическое и динамическое условия, а на поверхности цилиндра — условие прилипания:

$$\text{при} \quad r = R(z,t): \qquad \frac{\partial R}{\partial t} + w\frac{R}{\partial z} = u,$$

$$p - p_a = \alpha\left\{\frac{1}{R\left[1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2\right]^{1/2}} - \frac{\frac{\partial^2 R}{\partial z^2}}{\left[1 + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2\right]^{3/2}}\right\}$$

$$+\frac{2\eta}{1+\left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2}\left[\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial R}{\partial z}\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial R}{\partial z}\right)^2\frac{\partial w}{\partial z}\right], \tag{3}$$

$$\left[1 - \frac{\partial R}{\partial z}^2\right]\left(\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) + 2\frac{\partial R}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{\partial w}{\partial z}\right) = 0;$$

$$\text{при} \quad r = c: \qquad u = 0, \quad w = 0,$$

где p_a — постоянное давление в газе, а α — коэффициент поверхностного натяжения.

Помимо краевых условий требуется также задать форму свободной поверхности жидкости и поле скоростей в начальный момент времени. При заданном радиусе c цилиндра, по которому стекает пленка, эти условия фиксируют секундный расход жидкости. В случае стационарной задачи расход жидкости требуется задавать.

Задача (2), (3) имеет точное решение, описывающее одномерное установившееся движение магнитной жидкости в виде цилиндрического слоя толщины δ

$$R = c + \delta, \quad u = 0,$$

$$w = \frac{\rho g}{4\eta}\left[c^2 - r^2 + 2(c+\delta)^2 \ln\frac{r}{c}\right], \tag{4}$$

$$p = p_a + \frac{\alpha}{c+\delta} + \frac{\mu_0\chi}{8}\left(\frac{I}{\pi r}\right)^2\left[1 - \frac{r^2}{(c+\delta)^2}\right].$$

Толщина слоя определяется из интегрального условия

$$\frac{1}{2\pi}Q = \int\limits_{c}^{c+\delta} wrdr = \frac{\rho g}{4\eta}\Bigg[(c+\delta)^4 \ln\left(1+\frac{\delta}{c}\right) - \frac{\delta}{4}(2c+\delta)\left(2c^2+6c\delta+3\delta^2\right)\Bigg], \qquad (5)$$

где Q — заданный секундный объемный расход жидкости.

Асимптотический анализ уравнений в случае тонкой пленки

Считая расход жидкости столь малым, что $\gamma = \delta/c \ll 1$, разложим правую часть выражения (5) по малому параметру γ. Удерживая лишь главный член разложения (имеющий порядок γ^3), находим

$$\delta = \left(\frac{3\eta}{2\pi\rho g c} Q\right)^{1/3}. \qquad (6)$$

В этом приближении средняя по сечению цилиндрической пленки скорость определяется выражением

$$w_a = \frac{Q}{2\pi c\delta} = \frac{pg\delta^2}{3\eta}. \qquad (7)$$

Формулы (6), (7) применимы только лишь при выполнении условия $Q \ll 2\pi\rho g c^4/(3\eta)$.

Среди параметров, характеризующих течение пленки, наряюу с δ имеется второй масштаб длины — характерный радиус кривизны свободной поверхности жидкости $a = c + \delta$, поскольку при известной величине α именно значение a определяет величину характерного капиллярного давления α/a, вызывающего развитие неустойчивости тонкой цилиндрической пленки. Наличие малого параметра $\varepsilon = \delta/a \ll 1$ позволяет существенно упростить задачу (2), (3) за счет пренебрежения малыми величинами.

При проведении асимптотических оценок с целью выявления доминирующих членов в уравнениях (2) и краевых условиях (3) вместо цилиндрической системы координат r, φ, z удобнее использовать связанную с координатной поверхностью $r = a$ ортогональную систему координат x, φ, z, где $x = r - a$. В этой системе координат распределения осевой скорости и давления, соответствующие случаю цилиндрического слоя (4), с точностью до малых порядка ε имеют следующий вид:

$$w(x) = \frac{\rho g\delta^2}{2\eta}\left[1-\left(\frac{x}{\delta}\right)^2\right],$$

$$p(x) = p_a + \frac{\alpha}{a} - \frac{\mu_0\chi}{a^3}\left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 x. \qquad (8)$$

Естественно, на поверхности пленки скорость принимает максимальное значение w_m, причем, как и в случае течения в широком лотке [10], имеем $w_m = \frac{3}{2} w_a$.

Положим

$$p(r,z,t) = p_a + \frac{\alpha}{a} + p_1(x,z,t), \quad R(z,t) = a + \xi(z,t).$$

В системе координат x, φ, z уравнение свободной поверхности пленки принимает вид $x = \xi(z,t)$, а области, занимаемой жидкостью, соответствует область $(-\delta \le x \le \xi(z,t),\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\ -\infty < z < +\infty)$.

Выберем величины a, $w_0 = \varepsilon^2 a^2 \rho g/\eta$, a/w_0 в качестве характерных масштабов соответственно длины, скорости и времени. Полагая, что осевая компонента давления и вязкие силы имеют одинаковый порядок, примем $\eta w_0/(\varepsilon^2 a)$ в качестве масштаба давления. Введем безразмерные переменные (со звездочками):

$$x_* = \frac{r-a}{\varepsilon a}, \quad z_* = \frac{z}{a}, \quad t_* = \frac{w_0}{a}t, \quad u_* = \frac{u}{\varepsilon w_0},$$

$$w_* = \frac{w}{w_0}, \quad p_1^* = \frac{\varepsilon^2 a}{\eta w_0} p_1, \quad \xi_* = \frac{\xi}{\varepsilon a}.$$

Перейдя в уравнениях (2) и краевых условиях (3) к безразмерным переменным, получим

$$\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\varepsilon u_*}{1+\varepsilon x_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0, \qquad (9)$$

$$\varepsilon^3 \mathrm{Re}\left(\frac{\partial u_*}{\partial t_*} + u_*\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + w_*\frac{\partial u_*}{\partial z_*}\right) = -\frac{\partial p_1^*}{\partial x_*} + \varepsilon^2\left[\frac{\partial^2 u_*}{\partial x_*^2} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x_*}\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \varepsilon^2\left(\frac{\partial^2 u_*}{\partial z_*^2} - \frac{u_*}{(1+\varepsilon x_*)^2}\right)\right] - \frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon x_*)^3} Gm,$$

$$\varepsilon \mathrm{Re}\left(\frac{\partial w_*}{\partial t_*} + u_*\frac{\partial w_*}{\partial x_*} + w_*\frac{\partial w_*}{\partial z_*}\right) = -\frac{\partial p_1^*}{\partial z_*} + \frac{\partial^2 w_*}{\partial x_*^2} + \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon x_*}\frac{\partial w_*}{\partial x_*} + \varepsilon^2\frac{\partial^2 w_*}{\partial x_*^2} + 1.$$

Здесь $\mathrm{Re} = \rho w_0 \delta/\eta$ — число Рейнольдса, а

$$Gm = \frac{\mu_0 x}{\rho g a^3}\left(\frac{I}{2\pi}\right)^2 = \frac{f_r(a)}{f_z}$$

— характерное отношение компонент вектора плотности внешней объемной силы (1), действующей на магнитную жидкость, или отношение „магнитного ускорения“ (по терминологии [1]) к ускорению свободного падения. В технических устройствах с использованием магнитных жидкостей реализуются условия, при которых этот безразмерный критерий может достигать значений порядка 10^4 [1]. Отметим, что эксперименты [6], согласно приведенным в этой работе данным, проводились при $Gm \sim 10^2$.

В безразмерных переменных кинематическое и динамические условия (3) записываются следующим образом:

при $\quad x_* = \xi_*(z_*, t_*):\quad \dfrac{\partial \xi_*}{\partial t_*} + w_*\dfrac{\partial \xi_*}{\partial z_*} = u_*, \qquad (10)$

$$p_1^* = \frac{1}{\mathrm{Bo}}\left\{\frac{1}{(1+\varepsilon\xi_*)\left[1+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\xi_*}{\partial z_*}\right)^2\right]^{1/2}}\right.$$

$$\left.-\frac{\varepsilon\,\frac{\partial^2\xi_*}{\partial z_*^2}}{\left[1+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\xi_*}{\partial z_*}\right)^2\right]}-1\right\}+\frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\xi_*}{\partial z_*}\right)^2}$$

$$\times\left[\frac{\partial u_*}{\partial x_*}+\frac{\partial\xi_*}{\partial z_*}\left(\frac{\partial w_*}{\partial x_*}+\varepsilon^2\frac{\partial u_*}{\partial z_*}\right)+\varepsilon^2\left(\frac{\partial\xi_*}{\partial z_*}\right)^2\frac{\partial w_*}{\partial z_*}\right],$$

$$\left[1-\varepsilon^2\left(\frac{\partial\xi_*}{\partial z_*}\right)^2\right]\left(\frac{\partial w_*}{\partial x_*}+\varepsilon^2\frac{\partial u_*}{\partial z_*}\right)$$

$$+2\varepsilon^2\frac{\partial\xi_*}{\partial z_*}\left(\frac{\partial u_*}{\partial x_*}-\frac{\partial w_*}{\partial z_*}\right)=0,$$

где $\mathrm{Bo}=\left(\frac{a}{l_c}\right)^2$ — число Бонда, $l_c=\sqrt{\frac{\alpha}{\rho g}}$ — капиллярная длина.

На поверхности цилиндра имеем

$$\text{при}\quad x_*=-1:\quad u_*=0,\quad w_*=0. \tag{11}$$

Далее рассматривается случай $\varepsilon\mathrm{Re}\ll 1$, $\mathrm{Bo}\sim\varepsilon$, $Gm\sim\varepsilon^{-1}$. Пренебрегая в (9), (10) малыми порядка ε и выше получим

$$\frac{\partial u_*}{\partial x_*}+\frac{\partial w_*}{\partial z_{+*}}=0,\qquad \frac{\partial p_1^*}{\partial x_*}=-\varepsilon Gm,$$

$$\frac{\partial^2 w_*}{\partial x_*^2}=\frac{\partial p_1^\partial}{\partial z_*}-1, \tag{12}$$

$$\text{при}\quad x_*=\xi_*(z_*,t_*):\quad \frac{\partial\xi_*}{\partial t_*}+w_*\frac{\partial\xi_*}{\partial z_*}=u_*,$$

$$p_1^*=-\frac{\varepsilon}{\mathrm{Bo}}\left(\xi_*+\frac{\partial^2\xi_*}{\partial z_*^2}\right),\qquad \frac{\partial w_*}{\partial x_*}=0. \tag{13}$$

Возвращаясь в (11)–(13) к размерным переменным, имеем

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial p_1}{\partial x}=-\frac{\mu_0\chi}{a^3}\left(\frac{I}{2\pi}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=\frac{1}{\eta}\left[\frac{\partial p_1}{\partial z}-pg\right], \tag{14}$$

$$\text{при}\quad x=\xi(z,t):\quad \frac{\partial\xi}{\partial t}+w\frac{\partial\xi}{\partial z}=u, \tag{15}$$

$$p_1=-\alpha\left(\frac{\xi}{a^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right),\qquad \frac{\partial w}{\partial x}=0; \tag{16}$$

$$\text{при}\quad x=-\delta:\quad u=0,\quad w=0. \tag{17}$$

Отметим, что выражения (8) представляют одномерное стационарное решение задачи (14)–(17), причем в этом случае $\xi=0$.

Таким образом, течение тонкой магнитной жидкости описывается линейной системой уравнений, в то время как краевые условия на свободной поверхности (15), (16) нелинейны. В рассматриваемом приближении постановка задачи включает также задание формы свободной поверхности пленки в начальный момент времени.

Исследование устойчивости течения тонкой цилиндрической пленки

Нелинейная задача (14)–(17) допускает более простую формулировку. Обращаясь к уравнению неразрывности (14) и учитывая краевое условие для функции $u(x,z,t)$ на твердой поверхности (17), находим

$$u(x,z,t)=-\int_{-\delta}^{x}\frac{\partial w}{\partial z}\,dx,$$

ввиду чего

$$u\big|_{x=\xi(z,t)}=-\int_{-\delta}^{\xi(z,t)}\frac{\partial w}{\partial z}\,dx. \tag{18}$$

Подставив второе выражение (18) в кинематическое условие на свободной поверхности (15), имеем

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+w\big|_{x=\xi(z,t)}\frac{\partial\xi}{\partial z}+\int_{-\delta}^{\xi(z,t)}\frac{\partial w}{\partial z}\,dx=0$$

или в дивергентном виде

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial z}\int_{-\delta}^{\xi(z,t)}w(x,z,t)=0. \tag{19}$$

Нетрудно видеть, что в рассматриваемом приближении легко провести последовательное (одного за другим) интегрирование проекций уравнения движения (14). В самом деле, из проекции уравнения движения (14) на ось x с учетом краевого условия для функции $p_1(x,z,t)$ на свободной поверхности пленки (16) находим

$$p_1(x,z,t)=\frac{\mu_0\chi}{a^3}\left(\frac{I}{2\pi}\right)^2\left[\xi(z,t)-x\right]$$

$$-\alpha\left(\frac{\xi(z,t)}{a^2}+\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}\right). \tag{20}$$

Поскольку переменная x входит в правую часть этого выражения линейно, то производная

$$\frac{\partial p_1}{\partial z}=\frac{\partial\xi}{\partial z}\left[\frac{\mu_0\chi}{a^3}\left(\frac{I}{2\pi}\right)^2-\frac{\alpha}{a^2}\right]-\alpha\frac{\partial^3\xi}{\partial z^3} \tag{21}$$

не зависит от x. Ввиду этого проекция уравнения движения на ось z (последнее уравнение (14)) легко интегрируется. В результате с учетом краевых условий для функции $w(x,z,t)$ на свободной поверхности (16) и на твердой стенке (17) получаем

$$w(x,z,t)=\frac{1}{\eta}\left(\frac{\partial p_1}{\partial z}-pg\right)(x+\delta)\left[\frac{x-\delta}{2}-\xi(z,t)\right]. \tag{22}$$

После подстановки этого выражения в (19) с учетом (21) получаем нелинейное уравнение, описывающее эволюцию заданной в начальный момент формы свободной поверхности пленки

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+\frac{\rho g}{\eta}(\xi+\delta)^2\frac{\partial\xi}{\partial z}$$
$$+\frac{1}{3\eta}\frac{\partial}{\partial z}\left\{(\xi+\delta)^3\left[\left(\frac{\alpha}{a^2}-\frac{\mu_0\chi I^2}{4\pi^2a^3}\right)\frac{\partial\xi}{\partial z}+\alpha\frac{\partial^3\xi}{\partial z^3}\right]\right\}=0. \tag{23}$$

Из (23) следует, что включение электрического тока и увеличение его силы влекут за собой изменение знака коэффициента перед производной $\partial\xi/\partial z$, фигурирующей в выражении, заключенном в квадратные скобки.

После нахождения решения этого уравнения профили давления (20) и осевой компоненты скорости (22) выражаются в явном виде. Что касается радиальной компоненты скорости, то, согласно (18), (21), (22), имеем

$$u(x,z,t)=\frac{x+\delta}{6\eta}\left\{\left[x(\delta+3\xi)+\delta(2\delta+3\xi)\right]\frac{\partial^2p_1}{\partial z^2}\right.$$
$$\left.+3(x+\delta)\left(\frac{\partial p_1}{\partial z}-\rho g\right)\frac{\partial\xi}{\partial z}\right\}.$$

Ограничимся исследованием поведения малого ($|\xi|/\delta\ll 1$) возмущения формы свободной поверхности цилиндрической пленки толщины δ, локализованного в начальный момент в некоторой конечной области. Линеаризуя эволюционное уравнение (23), получаем

$$\frac{\partial\xi}{\partial t}+2w_m\frac{\partial\xi}{\partial z}+\frac{\alpha\delta^3}{3\eta a^2}\left[(1-\mathrm{Bo}_m)\frac{\partial^2\xi}{\partial z^2}+a^2\frac{\partial^4\xi}{\partial z^4}\right]=0, \tag{24}$$

где w_m — введенная ранее скорость жидких частиц, образующих свободную поверхность пленки, а $\mathrm{Bo}_m = GmBo = \mu_o\chi I^2/(4\pi^2\alpha a)$ — магнитное число Бонда [1].

Разыскивая решение уравнения (24) в виде суперпозиции нормальных мод вида $\hat{\xi}(k)\exp[i(kz-\omega t)]$, где i — мнимая единица, а k — действительный параметр (волновое число), приходим к дисперсионному уравнению

$$\omega=2w_mk+i\,\frac{\alpha\delta^3}{3\eta a^2}\,k^2[1-\mathrm{Bo}_m-(ka)^2]. \tag{25}$$

Таким образом, групповая скорость нормальных мод равна $2w_m$.

Легко видеть, что при наличии достаточно сильного электрического тока, обеспечивающего выполнение условия $\mathrm{Bo}_m>1$, все нормальные моды затухают с течением времени, поскольку при $\mathrm{Bo}_m>1$ имеем $\mathrm{Im}\,\omega(k)<0$. В противном случае моды с волновыми числами $0<k<a^{-1}\sqrt{1-\mathrm{Bo}_m}$ экспоненциально возрастают. Таким образом, при $\mathrm{Bo}_m>1$ гравитационное течение цилиндрической пленки устойчиво. Равенство $\mathrm{Bo}_m=1$ определяет критическое значение

$$I_c=2\pi\sqrt{\frac{\alpha a}{\mu_0\chi}}$$

силы тока, разделяющее области неустойчивости и устойчивости. Следует отметить, что в рассматриваемом приближении условие устойчивости $\mathrm{Bo}_m>1$ не зависит от коэффициента вязкости жидкости.

Вывод об устойчивости при $\mathrm{Bo}_m>1$ пленочного течения вязкости магнитной жидкости согласуется с результатом проведенного в рамках теории потенциальных течений линейного анализа устойчивости, находящегося в состоянии гидроневесомости неподвижного в начальный момент цилиндрического слоя магнитной жидкости, окружающего токонесущий проводник [6]. Следует отметить, что найденная частота (25) является однозначной функцией волнового числа k, тода как полученное в работе [6] дисперсионное уравнение определяет двузначную функцию $\omega(k)$, которая при $\mathrm{Bo}_m>1$ принимает действительные значения разных знаков, а при $\mathrm{Bo}_m<1$ — чисто мнимые комплексно-сопряженные значения.

Заключение

Исследовано гравитационное течение осесимметричной пленки магнитной жидкости по вертикальному токонесущему цилиндрическому проводнику. По сравнению с аналогичным течением немагнитной жидкости в рассматриваемом случае жидкая пленка подвержена воздействию объемной магнитной силы, порождаемой собственным магнитным полем электрического тока, проходящего по проводнику.

Применительно к пленке малой относительной толщины, стекающей по проводнику, радиус которого мал по сравнению с характерной капиллярной длиной, проведен асимптотический анализ уравнений феррогидродинамики и сформулирована упрощенная система уравнений и краевых условий, адекватно описывающая рассматриваемое течение. В рамках упрощенной таким путем задачи выделено нелинейное уравнение, описывающее эволюцию заданной в начальный момент формы свободной поверхности пленки. В отличие от пленочного течения немагнитной жидкости один из коэффициенов этого уравнения изменяет знак при переходе задаваемой внешними устройствами силы тока через критическое значение I_c. Величина I_c определяется физическими характеристиками рассматриваемой системы, причем коэффициент вязкости жидкости в их число не входит.

На базе линеаризованного эволюционного уравнения исследовано развитие малых возмущений гидродинамичского поля, соответствующего одномерному стационарному течению пленки с цилиндрической свободной поверхностью. Показано, что при силе тока, превышающей I_c, такое течение устойчиво.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05-01-00839).

Список литературы

[1] *Берковский Б.М., Медведев В.Ф., Краков М.С.* Магнитные жидкости. М.: Химия, 1989. 239 с.
[2] *Баштовой В.Г., Краков М.С.* Изв. АН СССР. МЖГ. 1977. № 5. С. 59–65.
[3] *Баштовой В.Г., Рекс А.Г., Денисенко Т.Д.* // Магнитная гидродинамика. 1986. № 1. С. 61–68.
[4] *Buchin V.A., Shaposhnikova G.A.* // JMMM. 1999. Vol. 201. P. 343–345.
[5] *Демехин Е.А., Каплан М.А., Фойгель Р.А.* // Магнитная гидродинамика. 1988. № 1. С. 21–29.
[6] *Архипенко В.И., Барков Ю.Д., Баштовой В.Г., Краков М.С.* // Изв. АН СССР. МЖГ. 1980. № 4. С. 3–8.
[7] *Коровин В.М.* // ЖТФ. 1994. Т. 64. Вып. 5. С. 8–21.
[8] *Коровин В.М.* // ПММ. 2001. Т. 65. Вып. 2. С. 251–260.
[9] *Розенцвейг Р.* Феррогидродинамика. М.: Мир, 1989. 360 с.
[10] *Лойцянский Л.Г.* Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978. 736 с.