

## Оптические свойства жидкокристаллической ячейки при бинарном воздействии периодического сдвига и сжатия

© Е.Н. Кожевников, Я.В. Кучеренко

Самарский государственный университет,  
443011 Самара, Россия  
e-mail: kozhev@ssu.samara.ru

(Поступило в Редакцию 25 марта 2008 г.)

Теоретически описан механооптический эффект, возникающий в жидкокристаллической ячейке, содержащей слой нематического жидкого кристалла с исходной гомеотропной ориентацией, при бинарном воздействии на структуру кристалла периодического сдвига и сжатия. Показано, что изменение оптических свойств ячейки (просветление) определяются как линейными, так и нелинейными по амплитуде сдвига эффектами, проанализирован их относительный вклад на высоких и низких частотах.

PACS: 47.20.Ft

### Введение

Воздействие периодического сдвига на слой нематического жидкого кристалла (НЖК) приводит к деформации его структуры, при которой изменяется направление выстаривания длинных осей молекул — директора. При этом интегрально по толщине слоя меняются оптические, диэлектрические, магнитные свойства НЖК-слоя, что проявляется в большом разнообразии эффектов, зависящих от исходной ориентации кристалла, геометрии воздействия, условий ориентации молекул на границах, наличия и геометрии электрического и магнитного полей, частоты и амплитуды сдвига (см., например, [1–3]). Так, отклонение молекул гомеотропно ориентированного кристалла от нормали при малых амплитудах смещения одной из граничных пластин в своей плоскости приводит к просветлению жидкокристаллической ячейки, в которой слой нематического кристалла помещен между скрещенными поляроидами и которая непрозрачна в отсутствии внешнего воздействия. С увеличением амплитуды сдвига исходная ориентация кристалла теряет устойчивость, и в НЖК-слое возникают однородные или пространственно-модулированные искажения (домены) [4–8]. Существенно изменяется картина деформации нематической структуры при эллиптическом движении граничной пластины в своей плоскости или при бинарном воздействии сдвига и сжатия. Разнообразная реакция нематического кристалла на воздействие периодического сдвига обуславливает интерес к экспериментальному исследованию динамических процессов в НЖК-слоях и теоретической трактовке наблюдаемых явлений.

В настоящей работе описана оптическая прозрачность жидкокристаллической ячейки с исходной гомеотропной ориентацией кристалла при бинарном воздействии на структуру нематика периодических сдвига и сжатия, создаваемых движением одной из граничных пластин. Смещение границы слоя в своей плоскости приводит к периодическому отклонению молекул от исходной

ориентации и, как результат, к просветлению ячейки. Прозрачность ячейки нарастает с увеличением амплитуды сдвига  $U_0$  и достигает первого максимума при некотором значении  $U_{0,max}$ . Изменение характера внешнего воздействия на НЖК-слой меняет картину его деформации. При дополнительном помимо сдвигового движения в своей плоскости смещении граничной пластины по нормали возникает стационарная деформация нематической структуры и просветление ячейки наблюдается при амплитудах сдвига меньших тех, которые необходимы при идеальном сдвиге. Даже при малой эллиптичности (меньшей  $10^{-2}$ ) первые максимумы прозрачности могут наблюдаться при амплитудах сдвига, на 1–2 порядка меньших, чем при идеальном сдвиге.

Влияние эллиптичности в движении граничной пластины на оптическую прозрачность НЖК-ячейки исследовано экспериментально в работе [9]. В [9,10] дана теоретическая трактовка результатов эксперимента, в которой уменьшение „порога“ просветления объясняется возникновением в НЖК-слое стационарных искажений структуры, обусловленных действием нелинейных объемных моментов, пропорциональных произведению угла поворота молекул и скорости растекания жидкости при ее сжатии. Анализ эффекта в [9,10] ограничен низкими частотами, на которых длина вязкой волны в нематической жидкости больше толщины НЖК-слоя.

В настоящей работе прозрачность НЖК-ячейки при эллиптической деформации рассматривается в широком диапазоне частот, включая ультразвуковые, на которых длина вязкой волны много меньше толщины слоя. Учитываются все факторы, которые могут определить деформацию структуры: объемные моменты и напряжения, граничные напряжения, обусловленные дополнительным смещением подвижной пластины по нормали, условия ориентации молекул на границах слоя. Деформация структуры нематического кристалла при бинарном воздействии сдвига и сжатия определяется нелинейными уравнениями гидродинамики нематика. Конечным этапом расчета является определение прозрачности НЖК-

ячейки и спектральных компонент интенсивности светового потока, прошедшего через систему.

## Теоретический анализ

Рассмотрим двумерную картину деформации гомеотропно ориентированного НЖК-слоя толщиной  $h$  и длиной  $L$  ( $L \gg h$ ) при эллиптическом движении граничной пластины, считая, что течение жидкости и поворот молекул происходят в плоскости сдвига  $XZ$ , где ось  $X$  указывает направление сдвига, а ось  $Z$  направлена перпендикулярно границам слоя (возможность пренебрежения азимутальными возмущениями в ориентации молекул при бинарном воздействии обсуждалась в работе [10]). Выбрав начало координат  $Z = 0$  на нижней неподвижной границе слоя, зададим воздействие на структуру нематического кристалла движением верхней границы в виде

$$V_{X|Z=h+U_h} = V_0 \cos \omega T, \quad V_{Z|Z=h+U_h} = \beta V_0 \sin \omega T.$$

Здесь  $V_0$  и  $\beta V_0$  — амплитуда продольной и поперечной составляющих скорости движения пластины,  $U_h = -\beta U_0 \cos \omega T$  — смещение верхней границы слоя по нормали,  $U_0 = V_0/\omega$ ,  $T$  — время,  $\omega$  — частота.

Ограничимся значениями частоты при которых длина звуковой волны много больше длины слоя, а длина ориентационной волны меньше толщины слоя, считая выполняющимися неравенства

$$\frac{K_{33}}{\gamma_1 h^2} \ll \omega < \frac{c}{L},$$

где  $c$  — скорость звука в кристалле,  $K_{33}$  — упругий модуль Франка,  $\gamma_1 = \alpha_3 - \alpha_2$ ,  $\alpha_k$  ( $k = 1, \dots, 6$ ) — коэффициенты вязкости Лесли. В дальнейших расчетах малые коэффициенты вязкости  $\alpha_1$  и  $\alpha_3$  полагаются равными нулю, при этом  $\gamma_1 \approx -\gamma_2 \approx -\alpha_2$ . Ограничение частоты сверху позволяет считать нематический кристалл несжимаемой жидкостью.

В расчете полагаем деформации нематического кристалла малыми, считая что малы углы  $\theta$  отклонения молекул от оси  $Z$ , и линеаризуем уравнения движения и поворота молекул по  $\theta$ .

Введя безразмерные координаты  $x = X/h$ ,  $z = Z/h$ , время  $t = \omega T$  и безразмерные скорости  $v_k = V_k(\omega h)$ , представим уравнения для гидродинамических переменных в виде [11]

$$\begin{aligned} \partial_t \theta - \varepsilon \Delta \theta - v_{x,z} &= -\theta_{,x} v_x - \theta_{,z} v_z - 2\theta v_{zz}, \\ [2\eta \sigma^2 \Delta \partial_t - (\eta \Delta^2 + \partial_z^2 \partial_x^2)] v_x + \varepsilon \Delta \partial_x^3 \theta & \\ = [\partial_z (\partial_z^2 - \partial_x^2) (v_{z,x} \theta) - 2\partial_x \partial_z^2 (v_{x,z} \theta)] & \\ + 2\eta \sigma^2 \partial_z [\Delta v_z v_{1x} - v_z v_{x,z}^2], & \\ \operatorname{div} v = 0, & \end{aligned} \quad (1)$$

где

$$\sigma^2 = \frac{\rho \omega h^2}{2\eta}, \quad \varepsilon = \frac{K_{33}}{\gamma_1 \omega h^2} = \frac{\lambda}{2\sigma^2}, \quad \lambda = \frac{\rho K_{33}}{\gamma_1 \eta} \sim 10^{-6},$$

$\rho$  — плотность,  $\eta = (\alpha_4 + \alpha_6)/2\gamma_1$  — безразмерная вязкость в вязкой волне, распространяющейся вдоль оси кристалла.

Граничные условия для скорости жидкости и угла поворота молекул на верхней подвижной границе запишем для  $z = 1$ , разложив по степеням  $u_{1z} = u_{,z}|_{z=1} = -\beta u_0 \sin t$  ( $u_0 = U_0/h$  — безразмерная амплитуда сдвига) и ограничиваясь первой степенью разложения

$$\begin{aligned} v_x|_{z=0} = v_z|_{z=0} &= 0, \\ v_x + v_{x,z} u_{1z}|_{z=1} &= u_0 \cos t, \\ v_z + v_{z,z} u_{1z}|_{z=1} &= \beta u_0 \sin t. \end{aligned}$$

Граничные условия для угла  $\theta$  определяем с учетом конечной связи молекул НЖК с ограничивающими слой поверхностями. Полагая поверхностную плотность ориентирующей энергии равной  $F_s = 1/2\omega\theta^2$ , получим

$$\theta - \delta \theta_{z,z}|_{z=0} = 0,$$

$$\theta + (\delta + u_{1z}) \theta_{z,z}|_{z=1} = 0,$$

где  $\delta = K_{33}/\omega h$  — безразмерный параметр.

Представим далее значения скорости  $v$  и угла  $\theta$  в виде суммы осциллирующих с частотой внешнего воздействия (индекс „1“) и стационарных (индекс „2“) слагаемых

$$v = v_1 + v_2, \quad \theta = \theta_1 + \theta_2,$$

и рассмотрим отдельно уравнения для  $v_1$ ,  $\theta_1$  и  $v_2$ ,  $\theta_2$ .

Отбрасывая в (1) малые производные по  $x$  ( $\partial/\partial x \sim \sim 1/L \ll \partial/\partial z \sim \sigma$ ), выделим следующие уравнения для осциллирующих переменных

$$\begin{aligned} \partial_t \theta_1 - \varepsilon \partial_z^2 \theta_1 - v_{1x,z} &= 0, \\ (2\sigma^2 \partial_t - \partial_z^2) v_{1x} + \frac{\varepsilon}{\eta} \partial_z^3 \theta_1 &= 0, \quad \operatorname{div} v = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

с граничными условиями

$$z = 0: \quad v_{1x} = v_{1x} = \theta_1 - \delta \theta_{1,z} = 0,$$

$$z = 1: \quad v_{1x} = u_0 \cos t, \quad v_{1z} = \beta u_0 \sin t, \quad \theta_1 + \delta \theta_{1,z} = 0 \quad (3)$$

и уравнения для стационарных переменных

$$\begin{aligned} \frac{\partial^3 v_{2x}}{\partial z^3} &= \frac{1}{\eta_2 \partial z^2} \left[ \left\langle v_{1x} \theta_{1,x} + v_{1z} \theta_{1,z} + \theta_1 \frac{\partial v_{1z}}{\partial z} \right\rangle \right] \\ &+ \frac{2\sigma^2 \eta}{\eta_2} \frac{\partial}{\partial z} \langle (v_1 \nabla) v_{1x} \rangle, \\ \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} &= \frac{1}{\varepsilon} \left[ \frac{\partial^2}{\partial z^2} \langle u_{1x} v_{1z} \rangle - \frac{\partial v_{2x}}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (4)$$

с условиями

$$v_{2x}|_{z=0} = 0, \quad v_{2x} + \langle u_{1z} v_{1x,z} \rangle|_{z=1} = 0, \quad \int_0^1 v_{2x} dz = 0,$$

$$\theta_2 - \delta\theta_{2,z}|_{z=0} = 0, \quad \theta_2 + \delta\theta_{2,z} + \langle u_{1z} \theta_{1,z} \rangle|_{z=1} = 0. \quad (5)$$

Здесь  $\eta_2 = (\alpha_4 + \alpha_5 - \alpha_2)/2\gamma_1$  — вязкость в стационарном потоке  $v_{2x}$ , угловые скобки означают усреднение по периоду колебаний.

Решая уравнения для осциллирующих скоростей  $v_{1z}$ ,  $v_{1x}$  и угла  $\theta_1$ , получим для них следующие выражения:

$$\begin{aligned} v_{1x} &\approx u_0 \operatorname{Re} \left\{ e^{-it} [z + \psi_1 + \beta ix (6(z^2 - z) + \psi_2)] \right\}, \\ v_{1z} &\approx u_0 \beta \operatorname{Re} \left\{ i e^{-it} (3z^2 - 2z^3 + \psi_3) \right\}, \\ \theta_1 &\approx u_0 \operatorname{Re} \left\{ i e^{-it} \left[ 1 + \psi_4 - \frac{s(1+i)}{(1+i+2\delta q) \sin s} \right. \right. \\ &\times \left( e^{(i-1)qz} + (\cos s - \delta s \sin s) e^{(i-1)q(1-z)} \right) \\ &- \beta ix \left[ 6(1-2z) + \psi_5 - \frac{(1+i)(1-\cos s + \delta \sin s)}{(1+i+2\delta q)(2(1-\cos s) - s \sin s)} \right. \\ &\left. \left. \times \left( e^{(i-1)qz} - e^{(i-1)q(1-z)} \right) \right] \right] \right\}, \quad (6) \end{aligned}$$

где  $s = (1+i)\sigma$  и  $(1+i)q = (1+i)\sqrt{\eta/[2\varepsilon(\eta+1)]}$  — комплексные волновые числа в вязких и ориентационных волнах, распространяющихся вдоль оси кристалла.

Комплексные функции  $\psi_k = \psi_{k1}(z) + i\psi_{k2}(z)$  ( $k = 1, \dots, 5$ ) имеют вид

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{\sin sz}{\sin s} - z, \\ \psi_2 &= s \frac{\sin s - \sin sz - \sin[s(1-z)]}{2(1-\cos s) - s \sin s} - 6(z^2 - z), \\ \psi_3 &= - \int \psi_2 dz \\ &= \frac{(1-\cos s)(1-\cos sz) + \sin s(\sin sz - sz)}{2(1-\cos s) - s \sin s} \\ &\quad - (3z^2 - 2z^3), \\ \psi_4 &= \frac{d\psi_1}{dz} = \frac{\cos(sz)s}{\sin(s)} - 1, \\ \psi_5 &= - \frac{d\psi_2}{dz} \\ &= \frac{s^2[\cos sz(1-\cos s) - \sin s \sin sz]}{2(1-\cos s) - s \sin s} - (6 - 12z). \end{aligned}$$

На границах слоя функции  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  обращаются в нуль. На низких значениях частоты, когда  $\sigma \ll 1$ , функции  $\psi_k$  малы  $|\psi_k| \ll 1$  и выражения для скоростей

$v_{1x}, v_{1z}$  и угла  $\theta_1$  совпадают с полученными ранее в работах [9,10].

Рассмотрим деформацию структуры НЖК в центральной части слоя, полагая выполняющимся неравенство  $6\beta x < 1$ . Для скорости потоков  $v_{2x}$  получим выражение

$$v_{2x} = \frac{\beta u_0^2}{2} \{F(z) + A(3z^2 - 2z)\}, \quad (7)$$

где

$$A = - \frac{2}{\beta u_0^2} \langle v_{1x,z} u_z \rangle|_{z=1} = 1 + \psi_{41}|_{z=1},$$

$$F(z) = \tilde{V}(z) + \tilde{V}(1)(2z - 3z^2) - 6(z - z^2) \int_0^1 \tilde{V}(z) dz,$$

$\tilde{V}(z)$  — частное решение уравнения для потоков в системе (4)

$$\begin{aligned} \tilde{V}(z) &= \frac{1}{\eta_2} \left\{ (3z^2 - 2z^3 + \psi_{31})(1 + \psi_{41}) + \psi_{32}\psi_{42} \right. \\ &+ \int_0^z \{ [z' + \psi_{11}(z')] [6(1 - 2z') + \psi_{51}(z')] \\ &+ \psi_{12}(z')\psi_{52}(z') \} dz + 2\sigma^2 \eta \int_0^z \int_0^{z'} \{ [6(z''^2 - z'') \\ &+ \psi_{21}(z'')]\psi_{12}(z'') - [z'' + \psi_{11}(z'')]\psi_{22}(z'') \\ &+ [3z''^2 - 2z''^3 + \psi_{31}(z'')]\psi_{42}(z'') \\ &\left. - [1 + \psi_{41}(z'')]\psi_{32}(z'') \} dz'' dz' \right\}. \end{aligned}$$

Первое слагаемое в формуле (7), обусловленное объемными напряжениями, обращается в нуль на границах слоя.

Для  $\theta_2$  получим следующее выражение:

$$\theta_2 = \frac{\beta u_0^2}{\varepsilon} \Phi(\delta, \sigma, z) = \frac{2\beta\sigma^2 u_0^2}{\lambda} \Phi(\delta, \sigma, z), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \Phi(\delta, \sigma, z) &= \frac{1}{2} \left\{ (z + \psi_{11})(3z^2 - 2z^3 + \psi_{31}) + \psi_{12}\psi_{32} \right. \\ &\left. - \int_0^z F(z') dz' - A(z^3 - z^2) - \frac{\delta + z}{1 + 2\delta} \right\}. \end{aligned}$$

Оптическая прозрачность НЖК-ячейки определяется как отношение светового потока  $I(t)$ , прошедшего через систему, к падающему  $I_0$  [12]. При неоднородной по толщине слоя ориентации молекул и малых углах  $\theta$  прозрачность  $m(t)$  приводится к виду

$$m(t) = \frac{I(t)}{I_0} = \frac{1}{2} \sin^2 \left\{ \frac{\Delta n}{2} k_o h \int_0^1 \theta^2(x, z) dz \right\} \sin^2(2\varphi), \quad (9)$$

где  $\Delta n = n_{\parallel} - n_{\perp}$  — оптическая анизотропия,  $n_{\parallel}$  и  $n_{\perp}$  — показатели преломления вдоль и ортогонально оси кристалла,  $k_o = 2\pi n_{\perp} / \Lambda$  — волновое число в обыкновенной световой волне,  $\Lambda$  — длина световой волны в вакууме,  $\varphi$  — угол между направлением сдвига и ориентацией одного из поляроидов. Рассмотрим далее случай максимальной по  $\varphi$  прозрачности, считая  $\varphi = \pi/4$ .

Полный угол поворота  $\theta$  определяется суммой осциллирующего угла  $\theta_1$  (6) и стационарного угла  $\theta_2$  (8). Подставив  $\theta = \theta_1 + \theta_2$  в выражение для прозрачности и преобразовав его, получим

$$m(t) = \frac{1}{2} \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} (P_{00} + P_{01}) - P_{1s} \sin t - P_{1c} \cos t + P_{2s} \sin 2t - P_{2c} \cos 2t \right\}. \quad (10)$$

Коэффициенты  $P_i$  зависят от частоты через волновое число  $\sigma$

$$P_{00} = \Delta n k_o h \left( \frac{\beta \sigma^2 u_0^2}{\lambda} \right) f_{00}, \quad P_{01} = \Delta n k_o h u_0^2 f_{01},$$

$$P_{1s} = \Delta n k_o h \frac{\beta \sigma^2 u_0^3}{\lambda} f_{1s}, \quad P_{1c} = \Delta n k_o h \frac{\beta \sigma^2 u_0^3}{\lambda} f_{1c},$$

$$P_{2s} = \Delta n k_o h u_0^2 f_{2s}, \quad P_{2c} = \Delta n k_o h u_0^2 f_{2c},$$

а функции  $f_{ij}$  определяются следующими интегралами:

$$f_{00} = 4 \int_0^1 \Phi(\delta, \sigma, z)^2 dz,$$

$$f_{01} = \frac{1}{2} \int_0^1 [(1 + \psi_{41})^2 + \psi_{42}^2] dz,$$

$$f_{1s} = -4 \int_0^1 \Phi(\delta, \sigma, z) (1 + \psi_{41}) dz,$$

$$f_{1c} = 4 \int_0^1 \Phi(\delta, \sigma, z) \psi_{42} dz,$$

$$f_{2s} = -\frac{1}{2} \int_0^1 (1 + \psi_{41}) \psi_{42} dz,$$

$$f_{2c} = \frac{1}{2} \int_0^1 [(1 + \psi_{41})^2 - \psi_{42}^2] dz.$$

Функции  $f_{01}$ ,  $f_{2s}$ ,  $f_{2c}$  не содержат параметр  $\delta$  и, следовательно, не зависят от условий ориентации молекул на границах НЖК-слоя. Зависимость  $f_{ij}$  от волнового числа  $\sigma$  для жидкого кристалла МББА с параметрами [13]  $K_{33} = 0.78 \cdot 10^{-11} \text{ Н}$ ,  $\gamma_1 \approx 0.078 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $\alpha_4 \approx 0.104 \text{ Па} \cdot \text{с}$ ,  $\alpha_6 \approx -0.034 \text{ Па} \cdot \text{с}$  ( $\eta = 0.4$ ,  $\eta_2 = 1.45$ ) представлена на рис. 1–6.

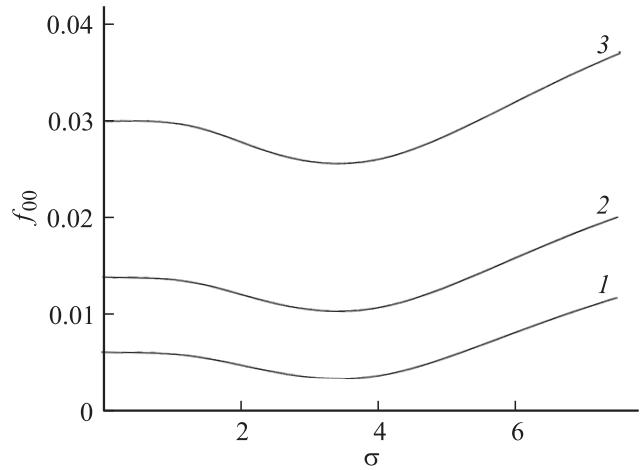


Рис. 1. Зависимость функции  $f_{00}$  от волнового числа  $\sigma$ : 1 — 0, 2 — 0.1, 3 — 0.3.

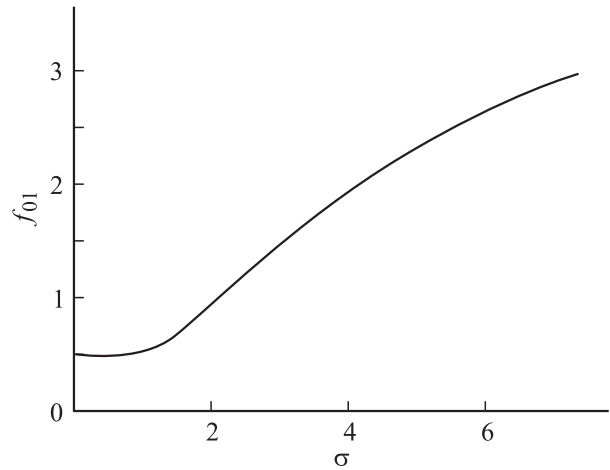


Рис. 2. Зависимость функции  $f_{01}$  от волнового числа  $\sigma$ .

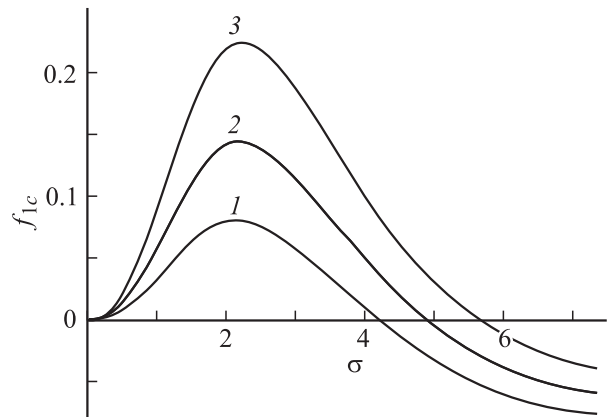


Рис. 3. Зависимость функции  $f_{1c}$  от волнового числа  $\sigma$ : 1 — 0, 2 — 0.1, 3 — 0.3.

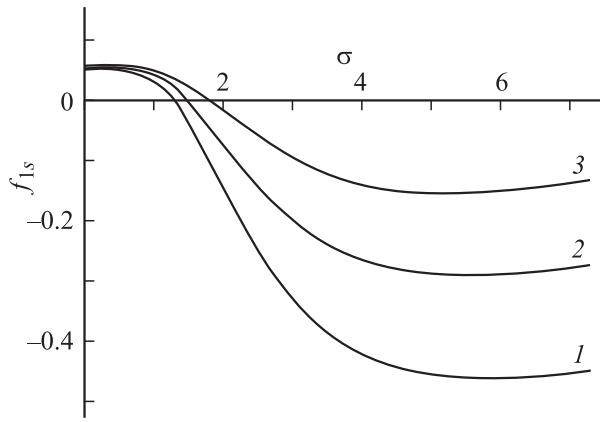


Рис. 4. Зависимость функции  $f_{1s}$  от волнового числа  $\sigma$ : 1 — 0, 2 — 0.1, 3 — 0.3.

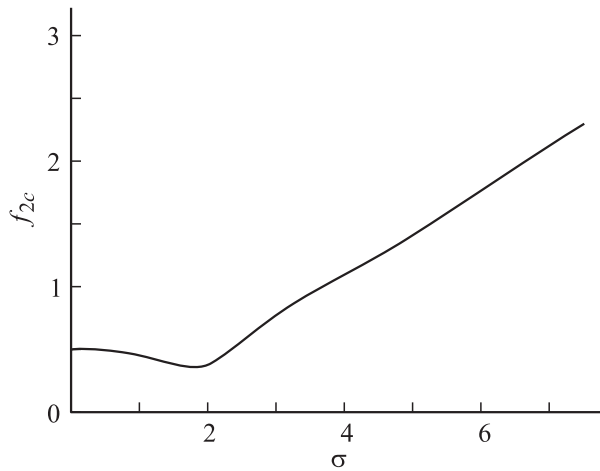


Рис. 5. Зависимость функции  $f_{2c}$  от волнового числа  $\sigma$ .

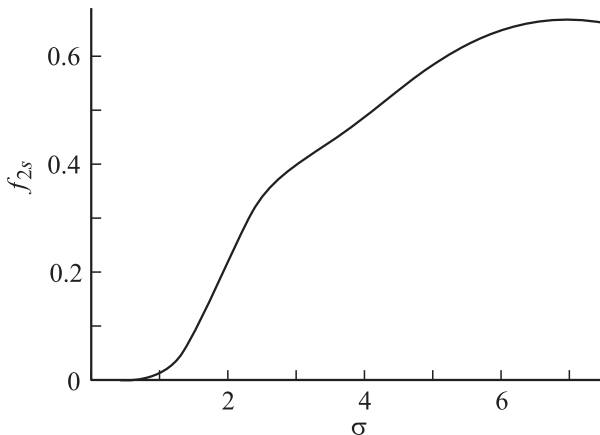


Рис. 6. Зависимость функции  $f_{2s}$  от волнового числа  $\sigma$ .

## Результаты и их обсуждение

В общем случае прозрачность НЖК-ячейки обусловлена суммарным углом поворота молекул  $\theta = \theta_1 + \theta_2$ , причем  $\theta_1$  определяется линейными ( $\theta_1 \sim u_0$ ), а  $\theta_2$  — нелинейными ( $\theta_2 \sim u_0^2$ ) гидродинамическими эффектами. Определим значения параметров, при которых преобладающий вклад в прозрачность вносит осциллирующий угол  $\theta_1$ , как линейную область эффекта, и значения параметров, при которых основной вклад в прозрачность связан со стационарной деформацией  $\theta_2$ , как нелинейную. Эти области разделяются значениями безразмерного параметра  $l$

$$l \approx \sqrt{\frac{P_{00}}{P_{01}}} \sim 0.1 \frac{\beta\gamma\omega h U_0}{K_{33}},$$

введенного ранее в работе [9].

Линейной области эффекта соответствуют малые значения параметра  $l \ll 1$ . В этом случае  $P_{00} \ll P_{01}$ ,  $|P_{1s}|$ ,  $|P_{1c}| \ll P_{2c}$  — стационарная деформация кристалла мала и не влияет на прозрачность НЖК-ячейки, а выражение для  $m(t)$  принимает вид

$$m(t) = \frac{1}{2} \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} [P_{01} + P_{2s} \sin 2t - P_{2c} \cos 2t] \right\}. \quad (11)$$

Параметр  $\delta$  не входит в выражение для  $P_{01}$ ,  $P_{2s}$ ,  $P_{2c}$ , поэтому в линейной области эффекта прозрачность НЖК-ячейки не зависит от условий ориентации молекул кристалла на границах.

Оптическая прозрачность и, следовательно, интенсивность светового потока  $I(t) = m(t)I_0$  периодически зависят от времени. Представим  $m(t)$  разложением в ряд Фурье

$$m(t) = m_0 + \sum_{k=1}^{\infty} m_k \cos(kt + v_k),$$

где  $m_0$  — постоянная составляющая,  $m_k$  — гармоники,  $v_k$  — фазовая задержка по отношению к сдвиговым колебаниям пластины. Спектральные компоненты  $m_k$  определяются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} m_0 &= \frac{1}{4} [1 - \cos P_{01} J_0(P_2)], \\ m_{4k-2} &= \frac{1}{4} \sin P_{01} J_{2k-1}(P_2), \\ m_{4k} &= \frac{1}{4} \cos P_{01} J_{2k}(P_2), \\ m_{2k-1} &= 0, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (12)$$

где  $J_0, J_n$  — функции Бесселя первого рода,

$$P_2 = \sqrt{P_{2s}^2 + P_{2c}^2}.$$

В линейной области эффекта спектр прозрачности содержит лишь четные гармоники. На низких частотах, когда  $\sigma \ll 1$ , получим  $P_2 = P_{01} = 1/2\Delta n k_0 h u_0^2$ . В этом

случае прозрачность определяется лишь параметром  $P_2$ , выражения для постоянной составляющей  $m_0$  и  $P_2$  совпадают с полученным ранее в работе [9], где отмечено согласие теории с данными эксперимента. Постоянная составляющая прозрачности  $m_0$  возрастает с увеличением амплитуды сдвига от нулевого значения при  $P_2 = 0$  до максимального  $m_{0,\max} = 0.323$  при  $P_2 = 1.95$  и далее осциллирует вблизи значения  $m_0 = 0.25$ . Амплитуда  $u_{0,\max}$ , соответствующая первому максимуму прозрачности, не зависит от частоты.

На высоких частотах, когда  $\sigma > 3$ , параметры  $P_{01}$ ,  $P_2$  пропорциональны волновому числу  $\sigma$  — в этом случае значение  $u_{0,\max}$  уменьшается с ростом частоты по закону  $u_{0,\max} \sim \omega^{-1/4}$ .

В нелинейной области ( $l \gg 1$ ) прозрачность приводится к виду

$$m = \frac{1}{2} \sin^2 \left\{ \frac{1}{2} [P_{00} - P_{1s} \sin(t) - P_{1c} \cos t] \right\}. \quad (13)$$

Постоянная составляющая и спектральные компоненты прозрачности определяются выражениями

$$m_0 = \frac{1}{4} [1 - \cos P_{00} J_0(P_1)],$$

$$m_{2k-1} = \frac{1}{4} \sin(P_{00}) J_{2k-1}(P_1),$$

$$m_{2k} = \frac{1}{4} \cos(P_{00}) J_{2k}(P_1) \quad k = 1, 2, 3, \dots, \quad (14)$$

где

$$P_1 = \sqrt{P_{1s}^2 + P_{1c}^2},$$

спектральное разложение прозрачности  $m(t)$  содержит как четные, так и нечетные гармоники.

В нелинейной области эффекта имеет место оценка  $P_{00}/P_{1s} \sim l \gg 1$ , следовательно, первые по амплитуде  $u_0$  максимумы гармоник  $m_k$  определяются в основном значением  $P_{00}$  — соответствующие амплитуды сдвига  $u_{0,\max}$  с увеличением частоты и эллиптичности смещаются в область меньших значений. На низких частотах получим зависимость  $u_{0,\max} \sim (\beta\omega)^{-1/2}$ . На высоких частотах, когда  $\sigma > 4$ , зависимость  $u_{0,\max}$  от  $\omega$  и  $\beta$  аппроксимируется выражением  $u_{0,\max} \sim (\beta\omega)^{-1/2} (\omega/\omega_0 - 1)^{-1/4}$ , где  $\omega_0 = 2\eta\sigma_0^2/\rho h^2$ , а волновое число  $\sigma_0$  зависит от  $\delta$  и подбирается по графику функции  $f_{00}$ : для  $\delta = 0$  получим  $\sigma_0 \approx 3$ .

Рассмотрим отдельно влияние малой эллиптичности в движении граничной пластины на прозрачность НЖК-ячейки на примере ячейки с нематическим жидким кристаллом МББА, дополняя приведенные выше параметры кристалла значениями  $n_{\perp} = 1.58$ ,  $\Delta n = 0.2$  [13], полагая  $h = 10^{-4}$  м, длину световой волны  $\Lambda = 650$  нм и предполагая жесткую ориентацию молекул на границе, что дает  $\delta = 0$ .

На рис. 7, 8 приведена зависимость постоянной составляющей прозрачности  $m_0$  от безразмерной амплитуды сдвига  $u_0 = U_0/h$ , построенная для сдвиговых

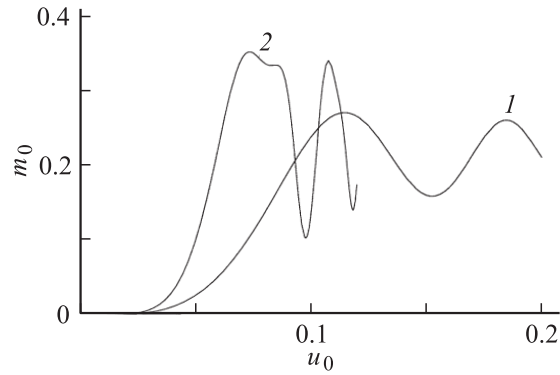


Рис. 7. Зависимость постоянной составляющей прозрачности  $m_0$  от безразмерной амплитуды сдвига  $u_0$  на частоте  $\nu = 200$  Hz: 1 —  $\beta = 0$ , 2 —  $1.4 \cdot 10^{-3}$ .

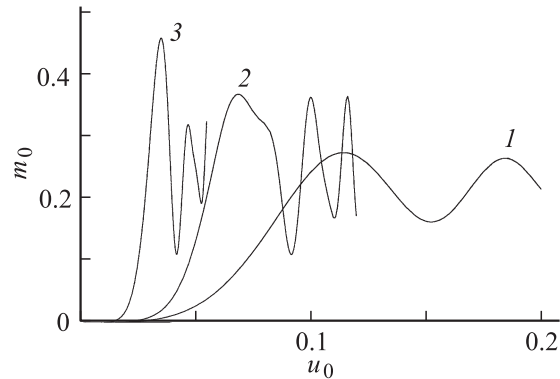


Рис. 8. Зависимость постоянной составляющей прозрачности  $m_0$  от безразмерной амплитуды сдвига  $u_0$  на частоте  $\nu = 1000$  Hz: 1 —  $\beta = 0$ , 2 —  $3 \cdot 10^{-3}$ , 3 —  $1 \cdot 10^{-3}$ .

частот  $\nu = 200$  и  $1000$  Hz и эллиптичности  $\beta \ll 1$ . Значения  $m_0$  определялись численным усреднением по периоду колебаний выражения (10) для прозрачности. Как видно из рис. 7, 8, даже малая эллиптичность в движении граничной пластины может существенно по отношению к „чистому сдвигу“ изменять прозрачность жидкокристаллической ячейки, причем роль эллиптичности возрастает с увеличением частоты. На частоте 200 Hz при  $\beta \approx 1.4 \cdot 10^{-3}$  первый максимум постоянной составляющей прозрачности достигается при амплитуде сдвига  $u_{0,\max}$ , равной  $u_{0,\max} \approx 0.6u_{0,\max}^{(0)}$ , где  $u_{0,\max}^{(0)}$  — амплитуда сдвига, соответствующая первому максимуму при „чистом сдвиге“. На частоте 1000 Hz при значениях  $\beta \approx 10^{-3}$  и  $\beta \approx 3 \cdot 10^{-4}$  максимумы прозрачности достигаются при  $u_{0,\max} \approx 0.3u_{0,\max}^{(0)}$  и  $u_{0,\max} \approx 0.6u_{0,\max}^{(0)}$ . Значения амплитуды нормального смещения граничной пластины  $U_{1z} = \beta U_0$  при этом сопоставимы с длиной молекул нематического кристалла и на частоте  $\nu = 1000$  Hz для приведенных значений  $\beta$  равны соответственно  $U_{1z} \approx 38$  и  $20$  Å.

В нашем расчете амплитуды сдвига предполагались малыми настолько, чтобы были малы углы отклонения

молекул от нормали  $\theta \ll 1$  — в этом случае справедливы исходные уравнения динамики (1) и формулы для прозрачности (9), (10). Покажем, что описанные оптические свойства НЖК-ячейки (чередование максимумов и минимумов прозрачности) должны наблюдаться в эксперименте в пределах малых углов  $\theta$ . Для этого оценим количество максимумов постоянной составляющей прозрачности, наблюдаемых при максимальных по  $z$  углах  $\theta$ , не превышающих значения  $\theta_M = 0.5$ , что позволяет отбросить в уравнениях (1) и формуле (10) слагаемые порядка малости  $\theta_M^3 \sim 0.1$  и меньшие. В расчете используем параметры жидкого кристалла МББА, полагая  $h = 10^{-4}$  м и предполагая жесткую ориентацию молекул на границе.

В линейной области эффекта  $\theta_2 \ll \theta_1 \approx u_0$  — постоянная составляющая прозрачности  $m_0$  определяется первой из формул (12). Ограничив угол  $\theta_1 < 0.5$  на низких частотах ( $\sigma \ll 1$ ), получим соотношение  $P_{01} \approx P_2 < 37$ . В этой области значений  $P_2$  постоянная составляющая прозрачности имеет 6 максимумов. На высоких частотах ( $\sigma \ll 1$ ) параметры  $P_{01}$ ,  $P_2$  можно оценить выражением  $P_{01} \approx P_2 \approx 0.5 + \sigma/3$ , а углы малы при амплитудах сдвига, меньших  $u_0 < 0.5/\sigma$ . Число  $N$  максимумов  $m_0$ , описываемых настоящим расчетом, в этом случае оценивается целой частью выражения  $(6 + 4\sigma)/\sigma^2 + 1/2$  и зависит от частоты: при значениях  $\sigma = 3$  и  $7$  получим соответственно  $N = 2$  и  $1$ .

В нелинейной области эффекта  $\theta_1 \ll \theta_2 \sim u_0^2$ . Постоянная составляющая прозрачности дается первой из формул (14), в которой  $P_{00}/P_1 \sim l \gg 1$  — первые максимумы  $m_0$  определяются значениями  $P_{00}$ . Максимальное по  $z$  значение угла  $\theta_2$  равно  $\theta_2 = 0.012\beta\sigma^2 u_0^2/\lambda$ ; ограничивая его сверху величиной  $\theta_M = 0.5$ , получим неравенство  $P_{00} = (\beta\sigma^2 u_0^2/\lambda)^2 f_{00} \leq 45$  — в эту область значений параметра  $P_{00}$  попадает 7 максимумов  $m_0$ .

Таким образом, условие малости угла поворота молекул, определяющее применимость расчета, выполняется вблизи первых максимумов прозрачности НЖК-ячейки.

## Заключение

Приведенные расчеты определяют свойства жидкокристаллической ячейки при бинарном воздействии на нее периодического сдвига и сжатия. Показано, что эллиптичность в движении граничной пластины может существенно по отношению к „чистому сдвигу“ изменять оптические свойства жидкокристаллической ячейки, причем роль эллиптичности возрастает с увеличением частоты. Возможность эллиптичности, даже малой, и нелинейной деформации НЖК-структуры необходимо учитывать при исследовании воздействия периодического сдвига на гомеотропный нематический жидкий кристалл.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ: грант № 07-02-00763.

## Список литературы

- [1] Капустин А.П., Капустина О.А. Акустика жидких кристаллов. М.: Наука, 1986. 248 с.
- [2] Pattern Formation in Liquid Crystals / Ed by A. Buk and L. Kramer. NY: Springer-Verlag, 1996. 339 p.
- [3] Капустина О.А. // Кристаллография. 2004. Т. 49. № 4. С. 759–772.
- [4] Dubois-Violette E., Guyon E., Janossy I., Pieranski P., Manneville P. // J. de Mec. 1977. Vol. 16. N 5. P. 733–767.
- [5] Scudieri F. // Appl. Phys. Lett. 1976. Vol. 29. P. 398–399.
- [6] Burghardt W.R. // J. Rheol. 1991. Vol. 35. P. 49–62.
- [7] Baimakova O.A., Scaldin O.A., Chuvyrov A.N. // Mol. Cryst. Liq. Cryst. 1995. Vol. 265. P. 199–314.
- [8] Krehov A.P., Kramer L. // Phys. Rev. E. 1996. P. 4925–4932.
- [9] Капустина О.А., Кожевников Е.Н., Яковенко Г.Н. // ЖЭТФ. 1984. Т. 87. С. 849–858.
- [10] Кожевников Е.Н., Кучеренко Я.В. // Кристаллография. 2008. Т. 53. № 5. С. 8.
- [11] Кожевников Е.Н. // Кристаллография. 2005. Т. 50. № 4. С. 705–711.
- [12] Блинов Л.М. Электро- и магнитооптика жидких кристаллов. М.: Наука, 1978. Гл. IV. С. 136.
- [13] Stephen M.J., Straley J.P. // Rev. Mod. Phys. 1974. Vol. 46. P. 617–703.