

01;03

Построение профиля массовой скорости разреженного молекулярного газа, увлекаемого вращающейся сферой, с учетом теплофизических характеристик газа

© А.П. Андреев, В.Н. Попов

Поморский государственный университет им. М.В. Ломоносова,
163002 Архангельск, Россия
e-mail: popov.vasily@pomorsu.ru

(Поступило в Редакцию 19 января 2009 г. В окончательной редакции 7 апреля 2009 г.)

В изотермическом приближении решена задача о вращении сферы в разреженном молекулярном газе. В режиме течения со скольжением с учетом поправки второго порядка по числу Кнудсена получено выражение для скорости разреженного молекулярного газа, увлекаемого вращающейся в нем сферой. В качестве основного уравнения используется обобщение БГК-модели кинетического уравнения Больцмана на случай учета вращательных степеней свободы молекул газа. В качестве микроскопического граничного условия на поверхности сферы используется модель диффузного отражения. Показано, что данный подход позволяет учесть зависимость скорости газа от числа Прандтля и температуры газа.

PACS: 51.10.+y

Введение

Решение задачи о вращении сферы в разреженном газе до настоящего времени ограничивалось случаем простого бесструктурного одноатомного газа (см. [1–3] и приведенные в них ссылки). В [1] и [2] выражения для скорости газа, увлекаемого вращающейся в нем сферой, построены методом Лиза с учетом различного числа моментов функции распределения с использованием БГК-модели кинетического уравнения Больцмана. В [3] задача решена численными методами применительно к линеаризованному уравнению Больцмана для молекул жестких сфер.

В представленной работе в качестве основного уравнения используется обобщение БГК-модели кинетического уравнения Больцмана, учитывающее вращательные степени свободы молекул газа [4]. При выводе данного уравнения полагалось, что колебательные степени свободы молекул газа „заморожены“, а вращательные описываются на основе классической кинетической теории газов. Поскольку молекулы многоатомных газов, в частности двух- и трехатомных, не обладают ярко выраженной сферической симметрией, использование статистических усреднений, лежащих в основе вывода модельных кинетических уравнений (в том числе и модели, использованной в представленной работе), является более предпочтительным при описании процессов в многоатомных газах, чем, например, использование моделей молекул жестких сфер или сферически симметричных силовых центров, которые хорошо зарекомендовали себя при описании процессов в бесструктурных одноатомных газах. Как показывают полученные в работе результаты, использованный подход позволяет получить зависимость скорости газа от таких его теплофизических характеристик, как удельная теплоемкость

при постоянном давлении c_p , динамическая вязкость η и коэффициент теплопроводности κ , а также дает возможность установить зависимость скорости газа от его температуры.

В качестве граничного условия на поверхности сферы использована модель диффузного отражения. Выбор модели граничного условия обусловлен тем, что для большинства технических, т.е. не обработанных специальным образом поверхностей коэффициент диффузности близок к единице.

1. Постановка задачи. Вывод основных уравнений

Рассмотрим сферу радиуса L , взвешенную в неподвижном слабо разреженном газе ($0.01 < Kn < 0.4$). Здесь $Kn = \lambda/L$ — число Кнудсена, λ — средняя длина свободного пробега молекул газа. Предположим, что в некоторый момент времени сфера начинает вращаться относительно диаметра с постоянной угловой скоростью Ω_0 . Вследствие этого во вращательное движение приходит и газ, окружающий сферу. При установившемся течении в сферической системе координат, начало которой совпадает с центром сферы, а выделенное направление — с осью ее вращения, скорость газа имеет одну ненулевую компоненту u_φ .

Цель работы состоит в построении в режиме течения со скольжением с учетом поправки второго порядка по числу Кнудсена зависимости $u_\varphi(r', \theta)$.

Предположим, что $u_\varphi \sqrt{m/2k_B T} \ll 1$, тогда задача допускает линеаризацию и функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям поступательного и

вращательного движений можно записать в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}, \omega) = f_0(v, \omega)[1 + Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v)], \quad (1)$$

где $f_0(v, \omega)$ — абсолютный максвеллиан с параметрами, заданными на поверхности сферы.

Для двухатомного газа

$$f_0(v, \omega) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{J}{k_B T} \exp \left[-\frac{mv^2}{2k_B T} - \frac{J\omega^2}{2k_B T} \right],$$

для многоатомного (число атомов в молекуле $N \geq 3$)

$$f_0(v, \omega) = n \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \frac{(J_1 J_2 J_3)^{1/2}}{(2\pi k_B T)^{3/2}} \times \exp \left[-\frac{mv^2}{2k_B T} - \frac{\sum_{i=1}^3 J_i \omega_i^2}{2k_B T} \right],$$

J_i ($i = 1-3$) — компоненты момента инерции молекул газа; T — температура газа; k_B — постоянная Больцмана; m и J — масса и момент инерции молекул газа; \mathbf{v} и ω — скорость поступательного и вращательного движения молекул газа соответственно; $\mathbf{r} = 3\sqrt{\pi} \text{Pr} / (4\lambda) \mathbf{r}'$; \mathbf{r}' — размерный радиус-вектор; λ связана с кинематической вязкостью газа ν_g соотношением $\lambda = \nu_g (\pi m / 2k_B T)^{1/2}$; $\mathbf{C} = \mathbf{v} \sqrt{m / 2k_B T}$; $v = \omega \sqrt{J / 2k_B T}$; Pr — число Прандтля.

В выбранной системе координат $Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v)$ удовлетворяет уравнению [4]

$$\begin{aligned} & C_r \frac{\partial Y}{\partial r} + Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v) \\ & + k \left[C_\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{C_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} + (C_\theta^2 + C_\varphi^2) \frac{\partial Y}{\partial C_r} \right. \\ & \left. + (C_\varphi^2 \text{ctg} \theta - C_r C_\theta) \frac{\partial Y}{\partial C_\theta} - (C_\varphi C_\theta \text{ctg} \theta + C_r C_\varphi) \frac{\partial Y}{\partial C_\varphi} \right] \\ & = \int K(\mathbf{C}, v; \mathbf{C}', v') Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}', v') d\Omega'. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь

$$K(\mathbf{C}, v; \mathbf{C}', v') = 1 + 2\mathbf{C}\mathbf{C}' + \frac{1}{l+1/2} (C^2 + v^2 - l - 1/2)(C'^2 + v'^2 - l - 1/2),$$

для двухатомного газа $l = 2$, $d\Omega = 2\pi^{-3/2} \times \exp(-C^2 - v^2) v dv d^3 C$, для многоатомного $l = 5/2$, $d\Omega = \pi^{-3} \exp(-C^2 - v^2) d^3 v d^3 C$; $k = 4\text{Kn} / (s\sqrt{\pi}\text{Pr})$.

Столкновительный член с ядром $K(\mathbf{C}, v; \mathbf{C}', v')$ в правой части (2) получается путем линеаризации относительно абсолютного максвеллиана оператора столкновений в форме БГК-модели. Для бесструктурных одноатомных газов ядро столкновительного члена не

зависит от вращательных степеней свободы молекул газа и получается из записанного выше при $l = 1$

$$K(\mathbf{C}; \mathbf{C}') = 1 + 2\mathbf{C}\mathbf{C}' + \frac{2}{3}(C^2 - 3/2)(C'^2 - 3/2).$$

Решение (2) ищем в виде

$$Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v) = \left[C_\varphi Z(r, C_r) + \sum_{j=0}^{\infty} g_j(C_\theta, C_\varphi, v) \omega_j(r, C_r) \right] \times \sin \theta. \quad (3)$$

Здесь $g_j(C_\theta, C_\varphi, v)$ образуют с C_φ полную систему ортогональных (в смысле скалярного произведения) многочленов. Под ортогональностью двух функций $f(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v)$ и $g(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v)$ понимается равенство нулю интеграла

$$\int f(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v) g(\mathbf{r}, \mathbf{C}, v) d\Omega.$$

Подставим (3) в (2). В случае двухатомного газа домножим полученное уравнение на $v C_\varphi \exp(-C_\varphi^2 - C_\theta^2 - v^2)$ и проинтегрируем по C_φ и C_θ от $-\infty$ до $+\infty$ и v от 0 до $+\infty$. В случае многоатомного газа домножим полученное уравнение на $C_\varphi \exp(-C_\varphi^2 - C_\theta^2 - v^2)$ и проинтегрируем по C_φ , C_θ и v от $-\infty$ до $+\infty$. В обоих случаях приходим к уравнению

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial Z}{\partial r} + Z(r, \mu) \\ & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z(r, \tau) \exp(-\tau^2) d\tau + k \left[\mu Z(r, \mu) - 2 \frac{\partial Z}{\partial \mu} \right], \end{aligned} \quad (4)$$

где $\mu = C_r$.

Разложим $Z(r, \mu)$ в ряд по степеням k :

$$Z(r, \mu) = k Z_1(r, \mu) + k^2 Z_2(r, \mu) + \dots \quad (5)$$

Подставив (5) в (4) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях k , приходим к уравнениям для нахождения $Z_1(r, \mu)$ и $Z_2(r, \mu)$

$$\mu \frac{\partial Z_1}{\partial r} + Z_1(r, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z_1(r, \tau) \exp(-\tau^2) d\tau, \quad (6)$$

$$\begin{aligned} & \mu \frac{\partial Z_2}{\partial r} + Z_2(r, \mu) \\ & = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} Z_2(r, \tau) \exp(-\tau^2) d\tau + \mu Z_1(r, \mu) - 2 \frac{\partial Z_1}{\partial \mu}. \end{aligned} \quad (7)$$

Рассмотрим теперь вопрос о граничных условиях, которым должны удовлетворять решения уравнений (6) и (7). Их (1), (3) и (5) следует, что

$$Z_i(R, \mu) = 0, \quad \mu > 0 \quad (i = 1, 2), \quad (8)$$

где $R = 3\sqrt{\pi}\text{Pr} / (4\lambda)L$ — безразмерный радиус сферы.

Для построения граничных условий вдали от поверхности сферы перейдем к новому масштабу в конфигурационном пространстве. Переопределим безразмерную координату так, чтобы $\mathbf{r}' = L\mathbf{r}$ (новую безразмерную координату снова обозначим через r). Тогда уравнение для нахождения $Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu)$ запишется в виде

$$\begin{aligned} C_r \frac{\partial Y}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[C_\theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} + \frac{C_\varphi}{\sin \theta} \frac{\partial Y}{\partial \varphi} + (C_\theta^2 + C_\varphi^2) \frac{\partial Y}{\partial C_r} \right. \\ \left. + (C_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta - C_r C_\theta) \frac{\partial Y}{\partial C_\theta} - (C_\varphi C_\theta \operatorname{ctg} \theta + C_r C_\varphi) \frac{\partial Y}{\partial C_\varphi} \right] \\ = k^{-1} \left[\int \exp(-C'^2) K(\mathbf{C}, \nu; \mathbf{C}', \nu') Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}', \nu') d\Omega' \right. \\ \left. - Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) \right]. \end{aligned} \quad (9)$$

Поскольку отношение правой части (10) к левой имеет порядок Kn^{-1} , для построения его решения можно использовать метод последовательных приближений. Разложим $Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu)$ в ряд по степеням k

$$\begin{aligned} Y(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) = \psi^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) + k\psi^{(1)}(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) \\ + k^2\psi^{(2)}(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) + \dots \end{aligned} \quad (10)$$

Подставив (10) в (9) и приравняв коэффициенты при одинаковых степенях k , находим

$$\begin{aligned} \psi^{(0)}(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) = p^{(0)} + 2\mathbf{C}\mathbf{U}^{(0)} + (C^2 + \nu^2 - l - 1/2)\tau^{(0)}, \\ \psi^{(n)}(\mathbf{r}, \mathbf{C}, \nu) = p^{(n)} + 2\mathbf{C}\mathbf{U}^{(n)} + (C^2 + \nu^2 - l - 1/2)\tau^{(n)} \\ - \mathbf{C}\nabla\psi^{(n-1)}(\mathbf{r}, \mathbf{C}) - \frac{1}{r} \left[(C_\theta^2 + C_\varphi^2) \frac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial C_r} \right. \\ \left. + (C_\varphi^2 \operatorname{ctg} \theta - C_r C_\theta) \frac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial C_\theta} \right. \\ \left. - (C_\varphi C_\theta \operatorname{ctg} \theta + C_r C_\varphi) \frac{\partial \psi^{(n-1)}}{\partial C_\varphi} \right]. \end{aligned}$$

Подставим (3), (5) в (10). Домножим полученное выражение в случае двухатомного газа на $\nu C_\varphi \exp(-C_\varphi^2 - C_\theta^2 - \nu^2)$ и проинтегрируем по C_φ и C_θ от $-\infty$ до $+\infty$ и ν от 0 до $+\infty$, а в случае многоатомного газа — на $C_\varphi \exp(-C_\varphi^2 - C_\theta^2 - \nu^2)$ и проинтегрируем по C_φ , C_θ и ν от $-\infty$ до $+\infty$. В результате находим

$$Z_1(\infty, \mu) = 2U_\varphi^{(1)} - 2\mu S_{r\varphi}^{(0)}, \quad (11)$$

$$Z_2(\infty, \mu) = 2U_\varphi^{(2)} - 2\mu S_{r\varphi}^{(1)} + 2\mu^2 \frac{\partial S_{r\varphi}^{(0)}}{\partial r} - 2(\mu^2 - 2)S_{r\varphi}^{(0)}, \quad (12)$$

$$S_{r\varphi}^{(i)} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial U_r^{(i)}}{\partial \varphi} + \frac{\partial U_\varphi^{(i)}}{\partial r} - \frac{U_\varphi^{(i)}}{r}.$$

С учетом полученных результатов решение поставленной задачи сводится к решению уравнений (6), (7)

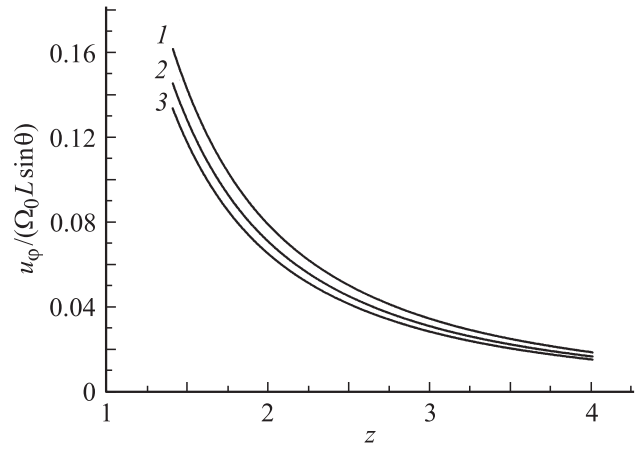


Рис. 1. Зависимость приведенной массовой скорости газа $\frac{u_\varphi}{\Omega_0 L \sin \theta}$ от безразмерного радиуса $z = \frac{r'}{L}$ для углекислого газа (CO_2) при различных температурах и $\text{Kn} = 0.4$: 1 — 0, 2 — 700, 3 — 1200 °C.

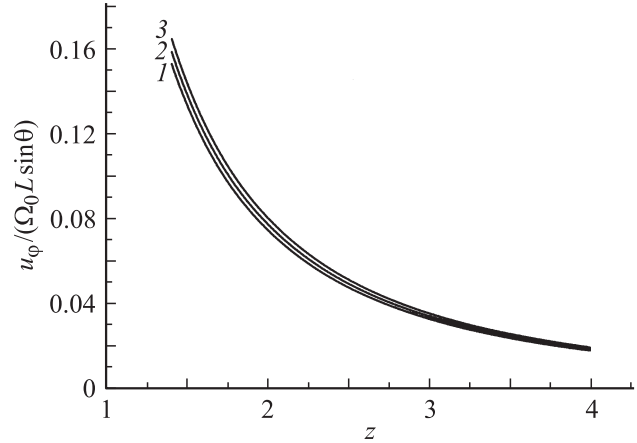


Рис. 2. То же, что и на рис. 1, для азота (N_2): 1 — 300, 2 — 700, 3 — 1200 °C.

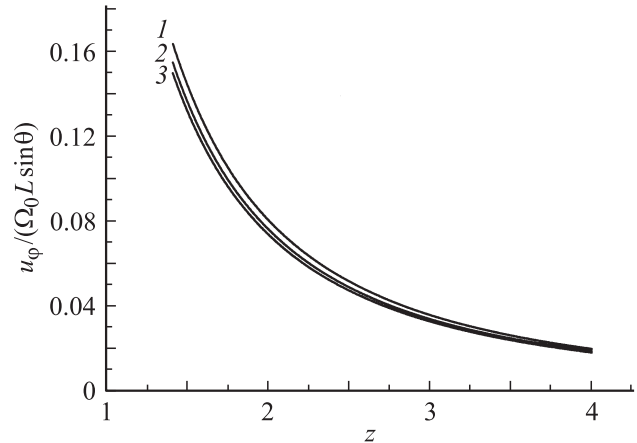


Рис. 3. То же, что и на рис. 1, для кислорода (O_2): 1 — 0, 2 — 600, 3 — 1000 °C.

с граничными условиями (8), (11), (12) приведено в [5]. Учитывая результаты [5], находим

$$U_\varphi|_S = \Omega R \sin \theta - kQ_1 S_{r\varphi}|_S + k^2 \left[Q_2 \frac{\partial S_{r\varphi}}{\partial r} - (Q_2 + 3) S_{r\varphi} \right] \Big|_S. \quad (13)$$

Здесь $Q_1 = -1.01619$ и $Q_2 = -1.26632$ — интегралы Лойалки [6], Ω — безразмерная угловая скорость вращения сферы, связанная с Ω_0 соотношением $\Omega R = \Omega_0 L \sqrt{m/2k_B T}$.

В гидродинамическом приближении массовая скорость газа, увлекаемого вращающейся сферой, описывается выражением

$$U_\varphi = \frac{B}{r^2} \sin \theta. \quad (14)$$

Подставив (14) и (13), находим

$$B = \frac{\Omega R^3}{1 - 3kQ_1 - 3k^2(4Q_2 + 3)}.$$

Таким образом,

$$U_\varphi = \frac{\Omega R}{1 - 3kQ_1 - 3k^2(4Q_2 + 3)} \left(\frac{R}{r} \right)^2 \sin \theta. \quad (15)$$

Переходя в (15) к размерным величинам, находим

$$u_\varphi = \frac{\Omega_0 R}{1 + \frac{2C_m^{(0)} \text{Kn}}{\text{Pr}} \left[1 + \frac{4C_m^{(0)} \text{Kn}}{3\text{Pr}} \right]} \left(\frac{L}{r'} \right)^2 \sin \theta. \quad (16)$$

Здесь $C_m^{(0)} = -\frac{2}{\sqrt{\pi}} Q_1 = 1.14665$ совпадает с коэффициентом изотермического скольжения разреженного газа вдоль твердой плоской поверхности. При записи (16) учли, что $-\frac{4Q_2+3}{3Q_1^2} = \frac{2}{3}$.

Соотношение (16) определяет скорость газа, увлекаемого вращающейся сферой. Из (16) видно, что учет вращательных степеней свободы молекул газа приводит к зависимости скорости газа от значения числа Прандтля $\text{Pr} = c_p \eta / \kappa$ и, как следствие, от его температуры. Зависимость Pr от температуры носит достаточно сложный характер. Так, для углекислого газа CO_2 в диапазоне температур от 0 до 1200°C значение числа Прандтля убывает от 0.7657 до 0.6386 [7]. При этом величина u_φ изменяется на 17.24%. У азота N_2 с ростом температуры от 300 до 1200°C значение числа Прандтля возрастает от 0.7258 до 0.7817, а величина u_φ изменяется на 3.76%. У кислорода O_2 с ростом температуры от 0 до 600°C значение числа Прандтля убывает от 0.7720 до 0.7070, а затем от 600 до 1000°C возрастает до 0.7301. При этом величина u_φ изменяется на 8.52%. Отметим, что использование модельных кинетических уравнений в случае простого (одноатомного) газа к зависимости подобного рода не приводит. Графики зависимостей $u_\varphi(z)$, где $z = r'/L$, нормированные на $\Omega_0 L \sin \theta$ для различных значений чисел Кнудсена, приведены на рис. 1–3.

2. Заключение

Итак, в работе в режиме течения со скольжением с учетом поправки второго порядка по числу Кнудсена получено выражение для массовой скорости разреженного молекулярного газа, увлекаемого вращающейся сферой. Показано, что учет вращательных степеней свободы молекул приводит к зависимости скорости газа от значения числа Прандтля и температуры газа.

Список литературы

- [1] Смирнов Л.П., Чекалов В.В. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1978. № 4. С. 117–124.
- [2] Поддоскин А.Б., Юшканов А.А. // Изв. АН СССР. МЖГ. 1997. № 1. С. 165–171.
- [3] Loyalka S.K. // Phys. Fluids A. 1992. Vol. 4. P. 1049–1056.
- [4] Латышев А.В., Юшканов А.А. // ТМФ. 1993. Т. 95. № 3. С. 530–540.
- [5] Попов В.Н. // Письма в ЖТФ. 2003. Т. 29. Вып. 14. С. 87–94.
- [6] Loyalka S.K. // Transport Theor. Stat. 1975. Vol. 4. P. 55–65.
- [7] Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. 708 с.