

# Исследование управления колебаниями многомодовой хаотической системы с асимметричной характеристикой

© Э.В. Кальянов, В.И. Калинин

Институт радиотехники и электроники им. В.А. Котельникова РАН,  
141190 Фрязино, Московская область, Россия  
e-mail: erast@ms.ire.rssi.ru

(Поступило в Редакцию 13 мая 2009 г.)

Исследована математическая модель управляемой хаотической системы, созданная на основе дифференциально-разностного уравнения, широко используемого в различных областях науки и техники. Численными методами изучены особенности управления колебаниями системы с запаздыванием с помощью фильтрующего элемента, помещенного в цепь обратной связи; хаотические колебания преобразуются в квазигармонические. При этом использована асимметричная амплитудная характеристика, реализующаяся в практических системах. Рассмотрен механизм перехода к хаосу, когда резонансная частота фильтра находится между собственными частотами системы. Приведены результаты натурального эксперимента.

PACS: 05.45.-a

Автоколебательные системы с запаздыванием, обладающие хаотической динамикой, широко распространены в природе. Исследование их динамики и управление их колебаниями актуально, так как изучение хаоса, как отмечается в [1], является одной из самых важных и интересных проблем физики и астрономии начала XXI в. Достаточно простая, хорошо известная система с запаздыванием состоит из широкополосного нелинейного усилителя, в цепь обратной связи которого включены инерционный элемент и линия задержки. Эта модель описывается дифференциально-разностным уравнением

$$\delta dx/dt + x = F(x_\tau), \quad (1)$$

где  $x = x(t)$  — колебания на выходе инерционного элемента,  $x_\tau = x(t - \tau)$  — колебания на выходе линии задержки (на входе усилителя),  $\tau$  — запаздывание,  $\delta$  — параметр релаксации инерционного элемента,  $F(x_\tau)$  — нелинейная функция.

Уравнение (1) при различных характеристиках, обладающих падающим участком, нашло важные приложения в различных областях науки и техники [2–6] и до сих пор представляет интерес. Модель, описываемая уравнением (1), удобна для создания на ее основе относительно простой управляемой хаотической системы с запаздыванием. Ниже проводится численный анализ управления нелинейными колебаниями модели, основанной на использовании в системе (1) фильтра второго порядка. Приводятся результаты экспериментальных исследований.

При использовании в цепи обратной связи модели, описываемой уравнением (1), фильтра второго порядка, помещенного между инерционным элементом и линией

задержки, уравнения системы принимают вид

$$\begin{aligned} dx/dt &= y - (\omega_0/Q)x, \\ dy/dt &= \omega_0^2(z - x), \\ dz/dt &= [F(x_\tau) - z]/\delta, \end{aligned} \quad (2)$$

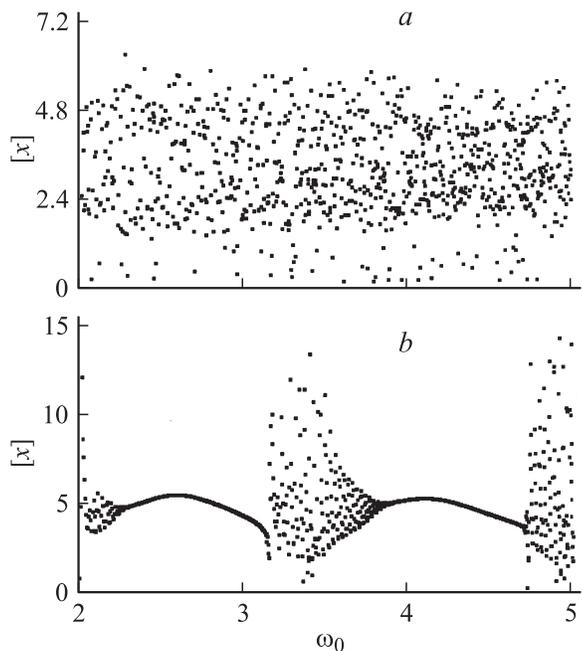
где  $x = x(t)$  — колебания на выходе фильтра второго порядка, имеющего резонансную частоту  $\omega_0$  и добротность  $Q$ , а  $z = z(t)$  — колебания на его входе (на выходе инерционного элемента). Остальные обозначения имеют прежний смысл.

Во всех известных работах при исследовании уравнения (1) использовались симметричные амплитудные характеристики различного типа, тогда как в реализуемых на практике генераторах с запаздыванием характеристики являются асимметричными. Поэтому при анализе системы (2) для аппроксимации нелинейной функции  $F(x_\tau)$  целесообразно использовать выражение, позволяющее обеспечить асимметрию амплитудной характеристики. Применительно к системе (2), учитывающей запаздывание в цепи обратной связи, оно может быть представлено в виде

$$F(x_\tau) = Bx_\tau/[1 + (x_\tau - \beta)^n], \quad (3)$$

где  $B, \beta, n$  — параметры усиления, асимметрии и нелинейности соответственно. Асимметрия амплитудной характеристики нарастает с увеличением  $\beta$ . При  $\beta = 1$  она такова, что амплитудная характеристика практически полностью находится в первом квадранте на плоскости  $\{x_\tau, F(x_\tau)\}$ .

Соотношения (2), (3) описывают математическую модель, когда при наличии асимметрии амплитудной характеристики управление колебаниями обеспечивается



**Рис. 1.** Изменение максимальных значений колебательного процесса в зависимости от частоты фильтра при различных значениях его добротности: *a* —  $Q = 1$ ; *b* — 20.

путем их фильтрации с соответствующей настройкой резонансной частоты фильтра относительно собственных мод нелинейной кольцевой системы с запаздывающей обратной связью.

Расчеты проводились методом Рунге–Кутты 4-го порядка при шаге интегрирования, равном 0.02. Начальные условия для переменных равны 0.1. Неизменяемые параметры выбраны так, что  $B = 4$ ,  $\beta = 1$ ,  $n = 4$ ,  $\tau = 4$ ,  $\delta = 0.25$ .

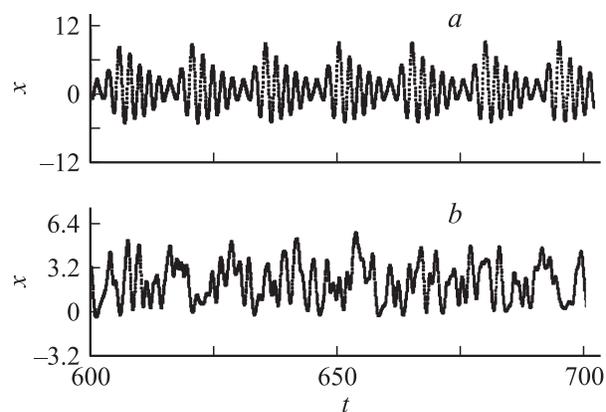
На рис. 1 приведены бифуркационные диаграммы, показывающие изменение максимальных значений колебательного процесса  $x(t)$  (обозначенных через  $[x]$ ) в зависимости от его частоты. Рис. 1, *a* рассчитан при минимальном значении добротности фильтра (при  $Q = 1$ ), а рис. 1, *b* — при  $Q = 20$ .

Видно (*a*), что при широкополосной обратной связи во всем приведенном интервале изменения резонансной частоты фильтра наблюдается нерегулярный разброс точек, соответствующих максимальным значениям колебательного процесса, что свидетельствует о реализации хаотических колебаний. При повышении добротности фильтрующего элемента до значения  $Q = 20$  возникают относительно широкие зоны генерации стационарных колебаний (*b*). При смещении резонансной частоты фильтра в диапазоне  $\omega_0 \in [2, 5]$  реализуются две зоны квазигармонических колебаний, сосредоточенные вблизи собственных мод, частота которых определяется временем задержки в цепи обратной связи (включая и задержку сигнала в фильтрующем элементе). В приведенных зонах генерации наблюдается закономерное

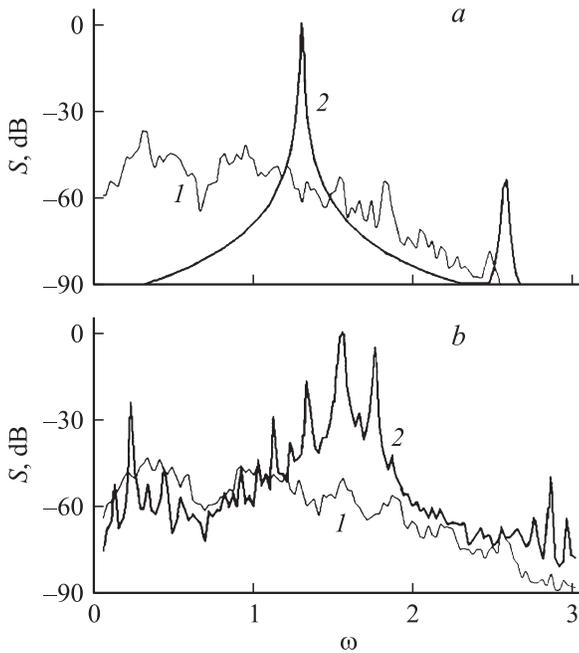
изменение максимальных значений колебательного процесса  $x(t)$ , но переход от одной зоны колебаний к другой сопровождается разбросом точек, свидетельствующим о генерировании сложных колебаний. При повышении добротности фильтра зоны стационарных однократных колебаний расширяются, но между этими зонами сохраняются режимы сложных движений. Так, при  $Q = 600$  зоны стационарных колебаний, показанные на рис. 1, *b*, становятся вдвое шире. При снижении добротности относительно значения  $Q = 20$  наблюдается достаточно плавный переход к развитому хаосу.

Следует отметить, что бифуркационные диаграммы, показанные на рис. 1, рассчитаны при адиабатическом увеличении собственной частоты резонансного фильтра. При ее обратном изменении диаграммы принимают несколько иной вид — проявляется гистерезис нелинейных колебаний.

Колебательные процессы между зонами однократных колебаний отображают взаимодействие мод, одновременное возбуждение которых обеспечивается благодаря наличию падающего участка характеристики при выполнении для них фазовых и амплитудных условий. Это иллюстрируется рис. 2. На нем приведены фрагменты реализаций колебательного процесса  $x(t)$ , рассчитанные при различных значениях добротности фильтрующего элемента, когда  $\omega_0 = 3.26$ . При добротности фильтра  $Q = 20$  колебания отображают модуляцию (рис. 2, *a*). Модуляция имеет релаксационный характер, что свидетельствует о частичном взаимном увлечении взаимодействующих колебаний. Период модуляции уменьшается по мере снижения добротности фильтра. При этом происходит увеличение числа взаимодействующих мод, что приводит к нерегулярности модулирующих колебаний. При минимальной добротности фильтра обеспечиваются условия для возбуждения и взаимодействия многих мод и фрагмент реализации колебательного процесса отображает гиперхаос (рис. 2, *b*). Характер модуляции и изменение его периода (уменьшение периода с уменьшением добротности фильтра) свидетельствуют о том,



**Рис. 2.** Фрагменты реализаций колебательного процесса  $x(t)$  при резонансной частоте фильтра  $\omega_0 = 3.26$  и различных значениях его добротности: *a* —  $Q = 20$ ; *b* — 1.



**Рис. 3.** Спектры мощности при резонансных частотах фильтра  $\omega_0 = 2.5$  (*a*) и  $\omega_0 = 3.26$  (*b*) в случаях  $Q = 1$  (кривые 1) и 20 (2).

что переход к хаосу реализуется не путем автомодуляции, а через развитие взаимодействия мод, которое сопровождается их взаимным частичным увлечением и синхронизацией на комбинационных частотах. При снижении добротности фильтра потери в цепи обратной связи на частоте взаимодействующих мод уменьшаются; при этом увеличивается и число мод, для которых обеспечиваются условия возбуждения.

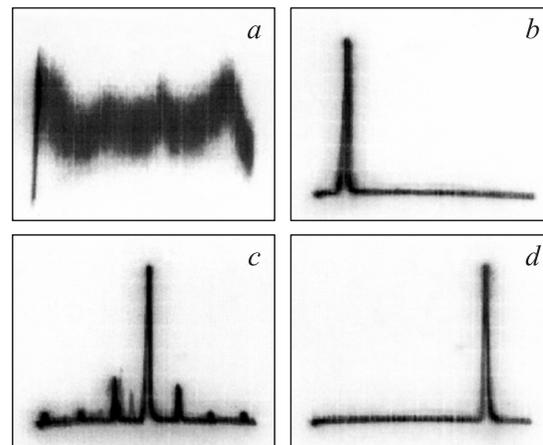
На рис. 3 показаны спектры мощности  $S$ , иллюстрирующие колебательные процессы при разных значениях добротности и частоты фильтра. Спектры мощности, приведенные на рис. 3, *a*, рассчитаны при частоте  $\omega_0 = 2.5$ , а спектры, показанные на рис. 3, *b* — при частоте  $\omega_0 = 3.26$ . При этом кривые 1 соответствуют величине добротности  $Q = 1$ , а кривые 2 —  $Q = 20$ .

Как видно (кривые 1), спектры мощности при  $Q = 1$  являются сплошными и в соответствии с бифуркационной диаграммой, представленной на рис. 1, *a*, отображают хаотический характер колебаний как при  $\omega_0 = 2.5$  (*a*), так и при  $\omega_0 = 3.26$  (*b*). При  $Q = 20$  в зависимости от частоты фильтра реализуются либо квазигармонические (рис. 3, *a*), либо сложные регулярные колебания (рис. 3, *b*). При  $\omega_0 = 2.5$ , когда частота фильтра близка к одной из собственных частот кольцевой системы, колебания отображаются спектром, иллюстрирующим относительно малый уровень второй гармоники: примерно — 55 dB от уровня амплитуды на основной частоте. С увеличением добротности фильтра уровень гармоник, естественно, уменьшается. При частоте фильтра, расположенной между зонами колебаний, спектр мощности имеет сложную структуру

и отображает режим взаимодействия мод, для которых обеспечены условия возбуждения.

На рис. 4 иллюстрируются результаты экспериментальных исследований управления колебаниями многомодовой автоколебательной системы с помощью резонансного фильтра, помещенного в цепь запаздывающей обратной связи. Управляемый многомодовый генератор создан на основе лампы бегущей волны О-типа, в цепь запаздывающей обратной связи которой мог включаться перестраиваемый резонансный фильтр, имеющий добротность  $Q \approx 600$ . Спектрограмма, показанная на рис. 4, *a*, получена при широкополосной обратной связи (без фильтра), а спектрограммы, представленные на рис. 4, *b-d*, — при включении в цепь обратной связи высокодобротного фильтра, настраиваемого на частоту  $f = 1238$  (*b*), 1246 (*c*) и 1253 МГц (*d*). Видно, что шумовые колебания, возбуждающиеся при отсутствии фильтра (*a*), преобразуются в регулярные колебания, когда резонансная частота фильтра близка к одной из двух собственных частот замкнутой системы (*b, d*). Между зонами регулярных движений спектр мощности отображает сложные колебания (*c*), свидетельствующие о наличии биений релаксационного типа при взаимном частичном увлечении взаимодействующих соседних мод.

Следует отметить, что экспериментально при перестройке фильтра между зонами генерации регулярного сигнала наблюдались не только зоны сложных регулярных движений, но и зоны шумоподобных колебаний, имеющие вид, аналогичный хаосу, показанному на рис. 4, *a*, что связано с неравномерностью по диапазону коэффициента усиления лампы бегущей волны. Возбуждение хаоса обусловлено тем, что при существенных усилениях возможно возникновение автомодуляции колебаний соседних мод и возбуждение более двух мод в „хвостах“ резонансного фильтра. Шумоподобные колебания (хаос) между зонами регулярных колебаний, в



**Рис. 4.** Спектрограммы колебаний экспериментального генератора при отсутствии (*a*) и наличии (*b-d*) фильтра в цепи обратной связи. На экране развернуто 20 МГц; масштаб по вертикали логарифмический.

соответствии с численным анализом, возбуждаются при относительно малой добротности фильтра.

Приведенная математическая модель и результаты ее численного анализа свидетельствуют об эффективности управления колебаниями системы с запаздыванием методом, основанным на их дехаотизации с помощью резонансного фильтра, помещаемого в цепь запаздывающей обратной связи. Результаты эксперимента подтверждают возможность управления колебаниями хаотического генератора с запаздыванием с помощью перестраиваемого высокочастотного фильтра в цепи обратной связи; они находятся в соответствии с результатами численного анализа рассмотренной математической модели.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект № 07-02-00351).

## Список литературы

- [1] Гинзбург В.Л. // УФН. 2007. Т. 177. № 4. С. 346.
- [2] Мохов И.И., Елисеев А.Е., Хворостьянов Д.В. // Изв. Акад. наук. Физика атмосферы и океана. 2000. Т. 36. № 6. С. 741–751.
- [3] Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. М.: Едиториал УРСС, 2004. С. 250.
- [4] Магницкий Н.А. // Динамика сложных систем. 2007. Т. 1. № 1. С. 18–39.
- [5] Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 16. С. 37–44.
- [6] Пономаренко В.И., Прохоров М.Д. // Письма в ЖТФ. 2005. Т. 31. Вып. 6. С. 73–78.