

# Динамические ориентационные переходы в системе магнитных диполей

© А.М. Шутый

Ульяновский государственный университет,  
432970 Ульяновск, Россия  
e-mail: shuty@mail.ru

(Поступило в Редакцию 27 апреля 2009 г.)

На основе численного анализа исследованы бистабильные состояния, индуцированные переменным магнитным полем в системе двух, трех и четырех связанных шарообразных тел, обладающих дипольными магнитными моментами. Рассмотрены динамические переходы между различными по направлению оси колебаний низкоамплитудными режимами. Выявлены возможности управления бистабильными состояниями за счет изменения параметров магнитного поля.

## Введение

Одним из необходимых свойств информационных систем является возможность реализации в них устойчивых бистабильных состояний, поэтому исследование данных состояний в различных физических системах и анализ условий, необходимых для эффективного управления ими, имеют важное как теоретическое, так и практическое значение. Магнитные системы являются весьма удобными и универсальными объектами для изучения сложных динамических режимов, в том числе процессов самоорганизации пространственных и временных структур, а также динамических фазовых переходов. Ведутся исследования формирования и преобразования магнитных доменов [1,2], динамики связанных магнитных моментов в тонких пленках [3,4], взаимодействия в магнитных ансамблях [5,6]. Одной из важных в данном направлении систем является система магнитных частиц, что обусловлено, в частности, возможностью включения в различные композитные материалы и формирования на их основе магнитных жидкостей [7,8]. Показано, что система частиц в большинстве случаев испытывает процесс агрегации с формированием за счет диполь-дипольного взаимодействия различных по объему кластеров [9,10], в пределах которых связь диполей значительно сильнее связи между кластерами. Особое значение подобные объекты приобрели в связи с последними достижениями нанотехнологий [11].

В настоящей работе проводится численный анализ бистабильных (и мультистабильных) состояний, которые включают статические и низкоамплитудные колебательные режимы и индуцированы переменным магнитным полем в системе двух, трех или четырех связанных тел, обладающих дипольными магнитными моментами и способных совершать вращения вокруг трех пространственных осей. Тела с механическими моментами инерции предполагаются однородными и шарообразными, что обусловлено не только необходимостью упрощений исследования, но и техническими особенностями формирования соответствующих реальных маг-

нитных объектов [12,13]. Материал объектов считается магнитожестким (с бесконечно большой коэрцитивной силой). Наибольшее внимание уделяется динамическим переходам между режимами, которые сопровождаются изменением ориентации оси колебаний.

## Основные уравнения и соотношения

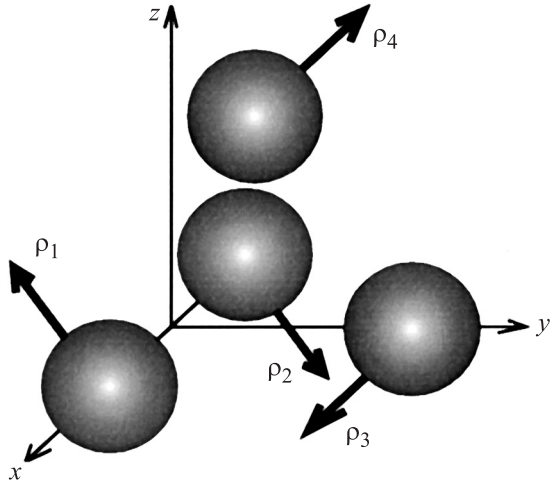
Рассматривая систему связанных диполей, полагаем, что они находятся на одинаковом друг от друга расстоянии  $a$ : в декартовой системе координат  $(x, y, z)$  два диполя имеют координаты  $(a/2, 0, 0)$ ,  $(-a/2, 0, 0)$ ; три связанных диполя располагаются в вершинах правильного треугольника — добавляется диполь с координатами  $(0, \sqrt{3}a/2, 0)$ ; четыре — в вершинах тетраэдра — координаты 4-го диполя  $(0, a/2\sqrt{3}, \sqrt{2/3}a)$ . При этом принимается, что каждый из диполей способен вращаться вокруг неподвижной точки, которая совпадает с центром симметрии и является также центром инерции.

Ориентация всей связанной системы считается неизменной, что может быть оправдано большой разницей между значениями частоты, характерными для динамических режимов системы и составляющих ее диполей. В присутствии однородного переменного магнитного поля  $\mathbf{H} \sin(\omega t)$  при учете диполь-дипольного взаимодействия динамические уравнения для системы тел имеют вид:

$$J_i \frac{d\omega_i}{dt} + \alpha_i \omega_i = \mathbf{p}_i \times \left( \mathbf{H} \sin(\omega t) + \sum_{n \neq i} \left[ \frac{3\mathbf{r}_{in}(\mathbf{p}_n \mathbf{r}_{in})}{a^5} - \frac{\mathbf{p}_n}{a^3} \right] \right),$$

$$\frac{d\mathbf{p}_i}{dt} = \omega_i \times \mathbf{p}_i, \quad (1)$$

где  $\mathbf{p}_i$  и  $\omega_i = d\varphi_i/dt$  — дипольный магнитный момент и угловая скорость  $i$ -го диполя ( $\varphi_{ij}$  — угол поворота соответствующего диполя вокруг оси  $j = x, y, z$ ),  $J_i$  — момент инерции,  $\alpha_i$  — параметр диссипации;  $\mathbf{r}_{in}$  — вектор между расположениями  $i$ -го и  $n$ -го диполей. Далее магнитные диполи принимаются идентичными:  $|\mathbf{p}_i| = p$ ,



**Рис. 1.** Расположение связанных магнитных диполей в вершинах тетраэдра и направление магнитных моментов в отсутствие переменного поля.

$J_i = J$ ,  $\alpha_i = \alpha$ . Переходя к безразмерным параметрам, запишем систему (1) в виде [14,15]:

$$\frac{d\omega_i}{d\tau} = -\beta\omega_i + \rho_i \times \left( f \sin(\Omega\tau)\eta + \sum_{n \neq i} [3\mathbf{e}_{in}(\rho\mathbf{e}_{in}) - \rho_n] \right),$$

$$\frac{d\rho_i}{d\tau} = \omega_i \times \rho_i, \quad (2)$$

где дифференцирование проводится по безразмерному времени  $\tau = vt$ , где  $v = \sqrt{p^2/Ja^3}$  (при этом  $\omega_i = d\varphi_i/d\tau$ );  $\rho_{ij} = p_{ij}/p$  и  $\eta_j = H_j/H$  — нормированные компоненты векторов магнитных моментов и внешнего магнитного поля;  $\mathbf{e}_{in} = \mathbf{r}_{in}/a$  — единичные векторы вдоль соответствующих направлений. Остальные параметры выражаются через исходные следующим образом:

$$\Omega = \omega/v, \quad \beta = \alpha/(vJ), \quad f = pH(v^2J).$$

В отсутствие внешнего магнитного поля ( $\eta = 0$ ) система двух связанных диполей имеет два состояния устойчивого равновесия с  $\rho_{ix} = 1$  или  $\rho_{ix} = -1$ , выбор между которыми определяется начальными условиями. В случае большего числа диполей устанавливаются равновесные положения, при которых все компоненты суммарного дипольного магнитного момента равны нулю:  $P_j = \sum_i p_{ij} = 0$ . При этом имеют место две равновесные ориентации магнитных моментов трех связанных диполей — для выбранных координат диполей отличные от нуля проекции нормированных магнитных моментов соответственно равны:  $\rho_{1x} = \mp 0.5$ ,  $\rho_{1y} \approx \mp 0.87$ ;  $\rho_{2x} = \mp 0.5$ ,  $\rho_{2y} \approx \pm 0.87$ ;  $\rho_{3x} = \pm 1$ . Для четырех диполей имеется шесть равновесных ориентаций, в двух из которых  $\rho_{1y} \approx \mp 0.58$ ,  $\rho_{1z} \approx \pm 0.82$ ;  $\rho_{2y} \approx \pm 0.58$ ,  $\rho_{2z} \approx \mp 0.82$ ;  $\rho_{3x} = \pm 1$ ;  $\rho_{4x} = \mp 1$ , т.е. магнитные моменты попарно (рис. 1) выстраиваются вдоль

двух не имеющих общей точки сторон тетраэдра; в случае остальных четырех равновесных положений моменты ориентированы вдоль двух других пар соответствующих сторон тетраэдра.

## Бифуркационные диаграммы

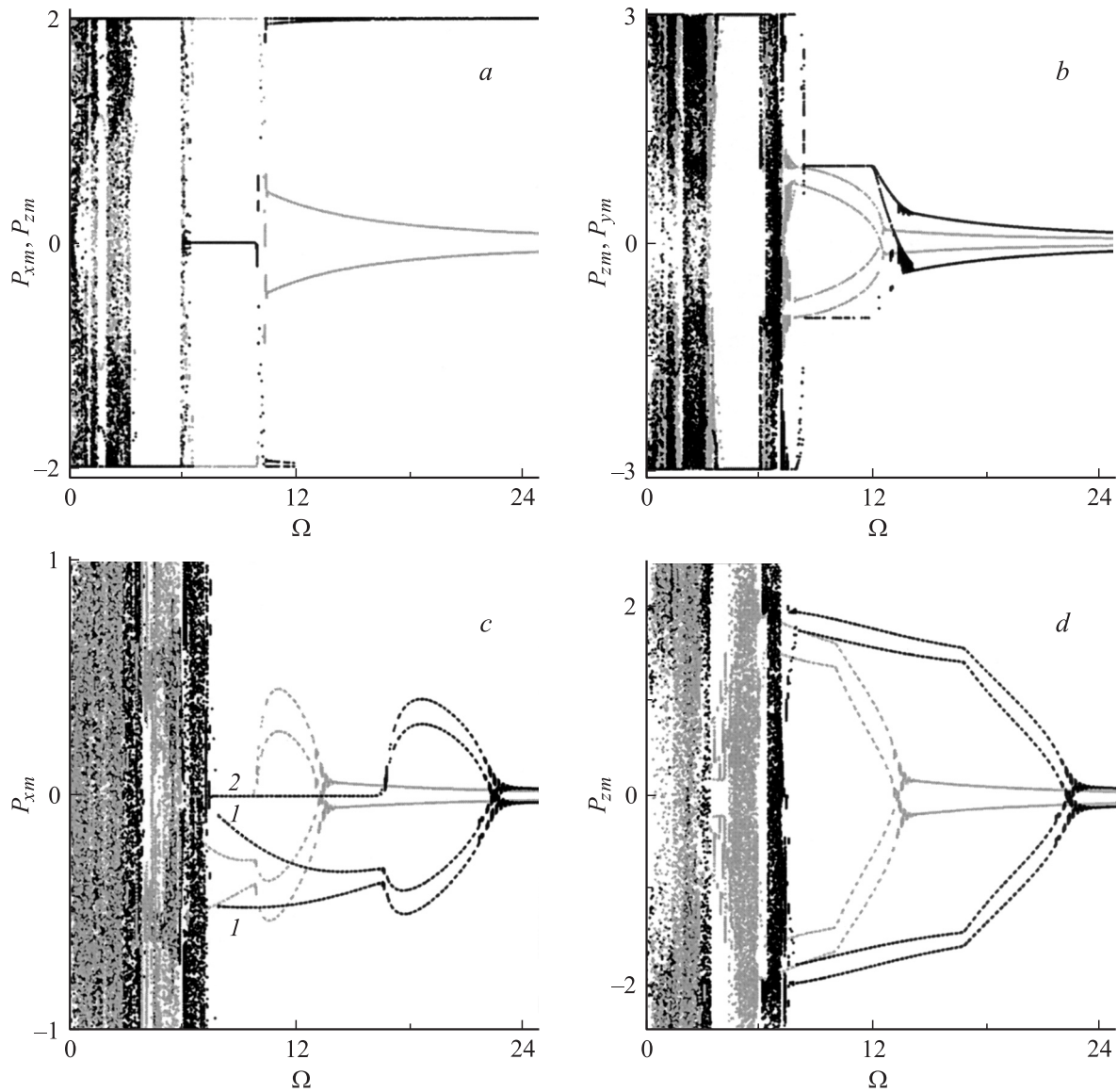
Приложенное к связанной системе переменное магнитное поле вызывает колебания магнитных моментов диполей, что сопровождается колебаниями величины суммарного магнитного момента. Помимо различных по амплитуде регулярных колебаний реализуются статические состояния системы, характеризуемые индуцированным смещением магнитного момента относительно нулевого значения ( $|\mathbf{P}| \neq 0$ ), а также режимы хаотических колебаний [14,15], которые устанавливаются на достаточно низких частотах (анализ последних требует специального рассмотрения, поэтому здесь подробно проводиться не будет).

Исследование методами численного анализа устанавливающих под воздействием переменного магнитного поля состояний связанной системы наиболее удобно начать построением бифуркационных диаграмм [16,17]. На рис. 2 приведены диаграммы на плоскости  $(P_{jm}; \Omega)$ , где  $P_{jm} = P_{j \max}$ ,  $P_{j \min}$ , и каждому значению частоты  $\Omega$  соответствуют экстремальные значения соответствующих проекций нормированного магнитного момента системы. При этом если на бифуркационной диаграмме одному значению частоты отвечает лишь одна точка, т.е. единственное значение  $P_{jm}$ , то имеет место отсутствие колебаний данной проекции магнитного момента. В случае двух или большего конечного числа точек реализуются регулярные колебательные режимы. Множеству близко расположенных точек отвечает хаотическая динамика.

На рис. 2, *a*, отвечающем случаю двух связанных диполей, представлены диаграммы для компонент  $P_{xm}$  (черные точки) и  $P_{zm}$  (серые точки) экстремумов суммарного магнитного момента. Переменное поле принимается линейно поляризованным вдоль оси  $z$  (т.е.  $\eta_z = \bar{\eta}$ ); параметры, характеризующие соответственно величину диссипации и амплитуду внешнего поля:  $f = 25$ ,  $\beta = 1$ . Компоненты  $P_{ym}$  во всем рассматриваемом частотном диапазоне близки к нулю.

Рис. 2, *b* отвечает системе из трех связанных диполей при тех же значениях параметров  $f$  и  $\beta$ . При этом черные точки соответствуют компоненте  $P_{zm}$  и поляризации переменного поля вдоль оси  $z$  (остальные компоненты  $P_{xm}$  и  $P_{ym}$  в этом случае близки к нулю при регулярных колебаниях, за исключением частот вблизи значения  $\Omega \approx 12$ , и могут испытывать колебания больших амплитуд  $P_j > 1$  только при хаотической динамике); серые точки соответствуют компоненте  $P_{ym}$  и поляризации поля вдоль оси  $y$  ( $P_{zm}$  — при регулярных колебаниях близки к нулю,  $P_x$  — испытывает периодические колебания при  $8 \leq \Omega \leq 12$ ).

Рис. 2, *c, d* отвечают компонентам  $P_{xm}$  и  $P_{zm}$  в случае системы из четырех связанных диполей при линейной

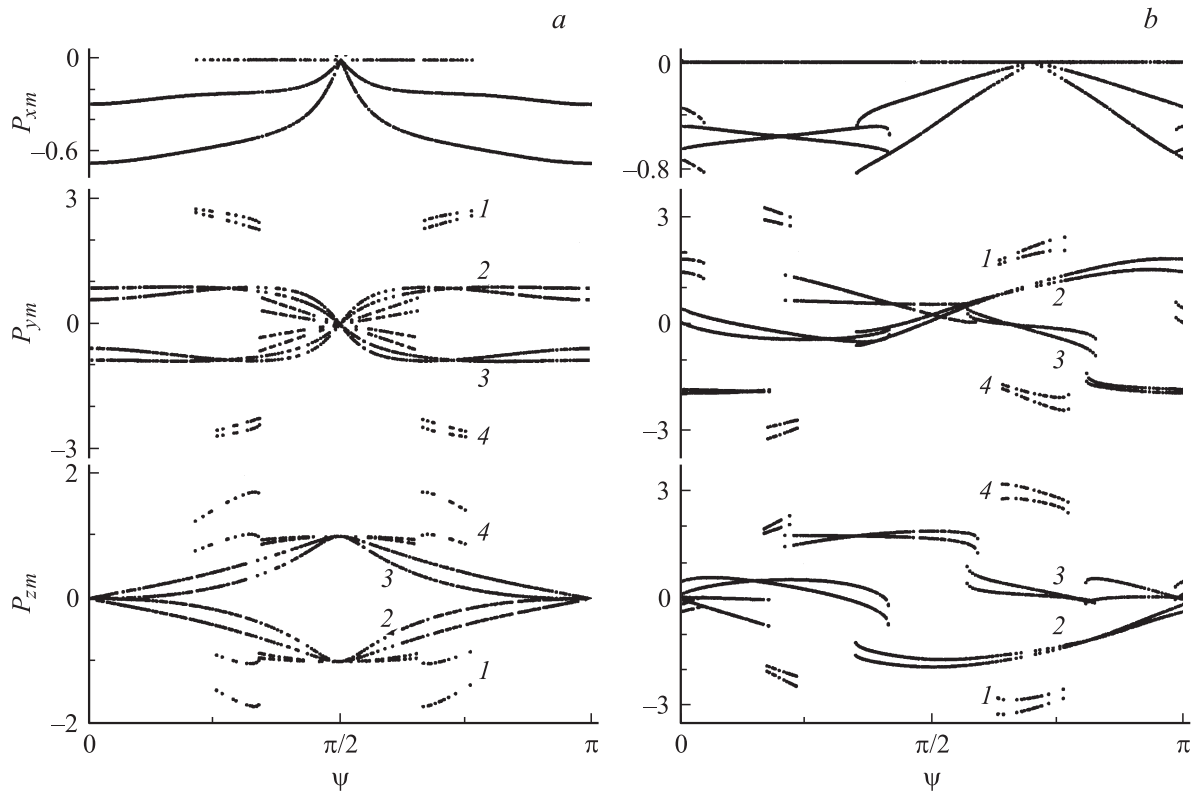


**Рис. 2.** Бифуркационные диаграммы для магнитного момента системы двух (а), трех (b) и четырех (c,d) диполей: частотная зависимость экстремумов компонент нормированного вектора  $\mathbf{P}$ ;  $\beta = 1$ ; а —  $P_{xm}(\Omega)$  (черный цвет),  $P_{zm}(\Omega)$  (серый цвет) при поляризации поля  $\eta_z = \eta$  и  $f = 25$ ; b —  $P_{zm}(\Omega)$  при  $\eta_z = \eta$  (черный цвет) и  $P_{yz}(\Omega)$  при  $\eta_y = \eta$  (серый цвет),  $f = 25$ ; c, d —  $P_{xm}(\Omega)$  и  $P_{zm}(\Omega)$  соответственно при  $f = 25$  (черный цвет) и  $f = 15$  (серые точки),  $\eta_z = \eta$ .

поляризации поля вдоль оси  $z$ , параметре  $\beta = 1$  и двух значениях параметра амплитуды поля:  $f = 25$  (черные точки) и  $f = 15$  (серые точки); зависимость от частоты компоненты  $P_{ym}$  при этом подобна  $P_{xm}(\Omega)$ . Заметим, что в случае четырех связанных диполей диаграммы хаотических колебаний приведены в усеченном виде, и достигают значения  $P_{jm} \approx 4$ .

Из приведенного рисунка видно, что во всех случаях на достаточно больших частотах ( $\Omega \geq 8$ ) переменное поле вызывает низкоамплитудные колебания магнитного момента системы ( $\Delta P_j / \rho < 1$ ), сопровождаемые в определенных частотных интервалах ориентационными переходами, когда изменяется направление оси, относительно которой реализуется колебательная динамика. На

малых частотах устанавливаются различные высокоамплитудные режимы, в том числе вращение магнитных моментов — совершение ими неограниченного числа полных оборотов вокруг одной из осей, — а также хаотическая динамика. В случае двух связанных диполей в значительном частотном диапазоне колебания испытывает в основном  $z$ -компонента суммарного магнитного момента (при этом амплитуда колебаний возрастает с уменьшением частоты поля), а две другие компоненты можно считать постоянными и равными  $P_x \approx \pm 2$ ,  $P_y = 0$ . Между частотами, отвечающими данным режимам и хаотической динамике, имеет место частотный интервал, отвечающий индуцированным ориентационным переходам системы в состояние, при котором маг-



**Рис. 3.** Бифуркационные диаграммы для магнитного момента системы трех (а) и четырех (б) диполей: зависимость экстремальных значений компонент вектора  $\mathbf{P}$  от угла поляризации переменного поля;  $f = 25$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ .

нитные моменты обоих диполей выстраиваются вдоль направления поляризации переменного поля и  $P_z = \pm 2$ ,  $P_{x,y} = 0$  (т.е. имеет место состояние статистической бистабильности со случайной реализацией одного из двух значений  $z$ -компоненты магнитного момента системы).

В случае трех связанных диполей (как и при большем числе диполей) исходное значение магнитного момента системы является нулевым. Переменное магнитное поле, линейно поляризованное вдоль оси  $j$ , на достаточно больших частотах приводит к низкоамплитудным колебаниям  $j$ -компоненты вектора  $\mathbf{P}$ . С уменьшением частоты (до некоторого бифуркационного значения) амплитуда колебаний постепенно увеличивается. Дальнейшее уменьшение  $\Omega$  в случае  $\eta_z = \eta$  вначале приводит к снижению амплитуды колебаний и смещению их оси, а затем — к установлению состояния статистической бистабильности (исчезающей с выключением переменного поля), при котором компоненты суммарного дипольного момента оказываются равными  $P_z = \pm 1$ ,  $P_{x,y} = 0$ . При поляризации поля вдоль оси  $y$  (т.е.  $\eta_y = \eta$ ) аналогичное уменьшение частоты также вызывает смещение оси колебаний (без значительного изменения их амплитуды) и возникновение колебаний  $x$ -компоненты вектора  $\mathbf{P}$ . Динамика магнитных моментов в случае четырех связанных диполей оказывается подобной рассмотренной выше. При этом характерным является наличие широкого частотного диапазона, в котором

различные низкоамплитудные режимы оказываются реализованными в состоянии динамической бистабильности. Заметим: входящие в динамическую бистабильность низкоамплитудные режимы могут различаться как по амплитуде, так и по форме колебаний; например, на частоте  $\Omega = 9$  в режиме, отвечающем на диаграмме ветви „1“ (см. рис. 2, с), колебания испытывают все три компоненты вектора  $\mathbf{P}$ , а в режиме ветви „2“  $P_x$  остается неизменной и равной нулю. Из рисунка также видно, что увеличение характеризующего амплитуду переменного поля параметра  $f$  приводит, главным образом, к увеличению частотного интервала, отвечающего реализации динамической бистабильности низкоамплитудных колебательных режимов.

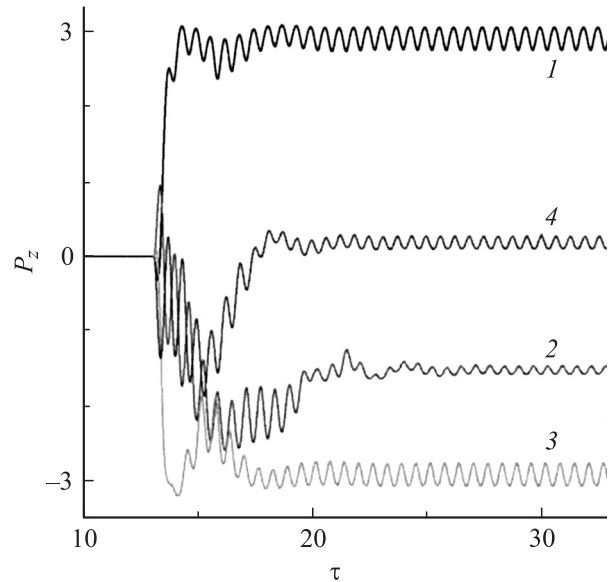
Расчет бифуркационных диаграмм производился методом Рунге–Кутты, при этом векторы магнитных моментов вначале выводились на стационарный режим, т.е. когда увеличение времени наблюдения за системой не меняет (в пределах точности вычислительной программы) аттракторов режимов. Так как в состоянии бистабильности на реализацию того или иного режима влияют флуктуации параметров системы (в том числе их начальных значений), для получения более равномерного распределения точек диаграммы между различными составляющими бистабильность ветвями режимов начальная фаза  $\xi$  переменного поля, записанного в виде  $\eta \sin(\Omega\tau + \xi)$ , изменялась случайным образом при каждом новом значении аргумента.

## Бистабильные состояния и переключения между режимами

Динамика взаимодействующих диполей и реализация состояний бистабильности сильно зависят от направления поляризации переменного поля. На рис. 3 для систем с тремя (а) и четырьмя (б) связанными диполями показаны диаграммы на плоскости  $(P_{jm}; \psi)$ , представляющие зависимость экстремальных значений проекций магнитного момента системы от угла поляризации переменного поля, отсчитываемого в плоскости  $yz$  от оси  $y$ .

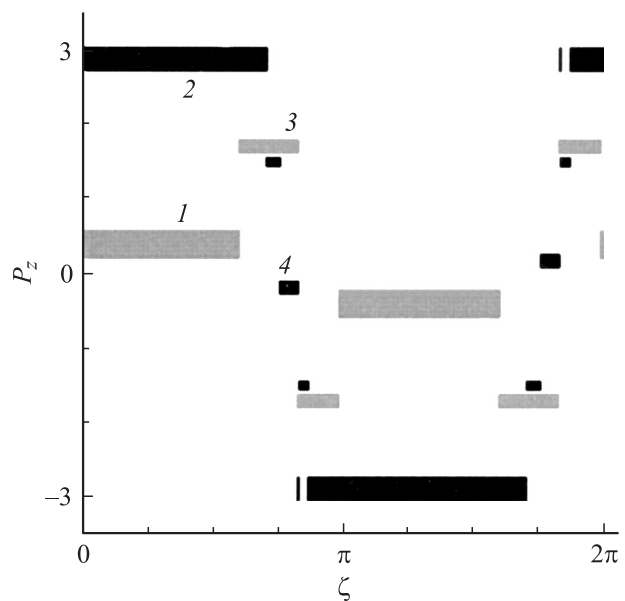
Параметры (здесь и для последующих рисунков) приняты следующими:  $f = 25$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ , что соответствует условиям установления различных низкоамплитудных регулярных режимов; начальная фаза поля  $\xi$  здесь, как и при построении рис. 2, менялась произвольным образом. Цифрами 1–4 на рисунке отмечены различные колебательные ветви, относящиеся к которым режимы находятся в состоянии динамической бистабильности. Заметим, что на рисунке для большей наглядности приведены только колебательные ветви, отвечающие отрицательным или близким к нулю значениям компоненты  $P_{xm}$ , ветви, симметричные приведенным, не изображены. Из рисунка видно, что помимо бистабильных состояний реализуются мультистабильные состояния, включающие три режима и более. Для примера на рис. 4 приведена зависимость от времени  $z$ -компоненты суммарного магнитного момента (в случае четырех связанных диполей) для колебательных режимов, реализующихся в состоянии мультистабильности при частоте переменного поля  $\Omega = 10$  и с углом поляризации  $\psi = 125 \text{ deg}$ ; для установления различных режимов в численном счете использовались следующие значения начальной фазы поля:  $\xi = 0, 153, 200, 320 \text{ deg}$  (кривые 1–4). Из диаграммы рис. 3 также следует, что для системы с тремя диполями при определенных направлениях поляризации поля устанавливаются статические (по всем трем компонентам  $\mathbf{P}$ ) состояния. Для системы с четырьмя диполями (при не входящих в диаграмму ориентациях поля) обнаружены состояния только с двумя не зависящими от времени компонентами вектора  $\mathbf{P}$ .

Видно, что на диаграммах ветви колебательных режимов имеют различную плотность составляющих их точек. Это означает, что в состоянии бистабильности (мультистабильности) в некотором интервале значений аргумента (в данном случае — угла  $\psi$ ) режимы одной ветви устанавливаются чаще, чем режимы другой ветви. Вероятность, с которой реализуются составляющие динамическую бистабильность режимы, в частности, определяется фазовым объемом притягивающих бассейнов аттракторов режимов. Для качественной оценки соотношения вероятностей реализации указанных режимов можно построить соответствующую диаграмму, варьирующую некоторые параметры начальных условий.

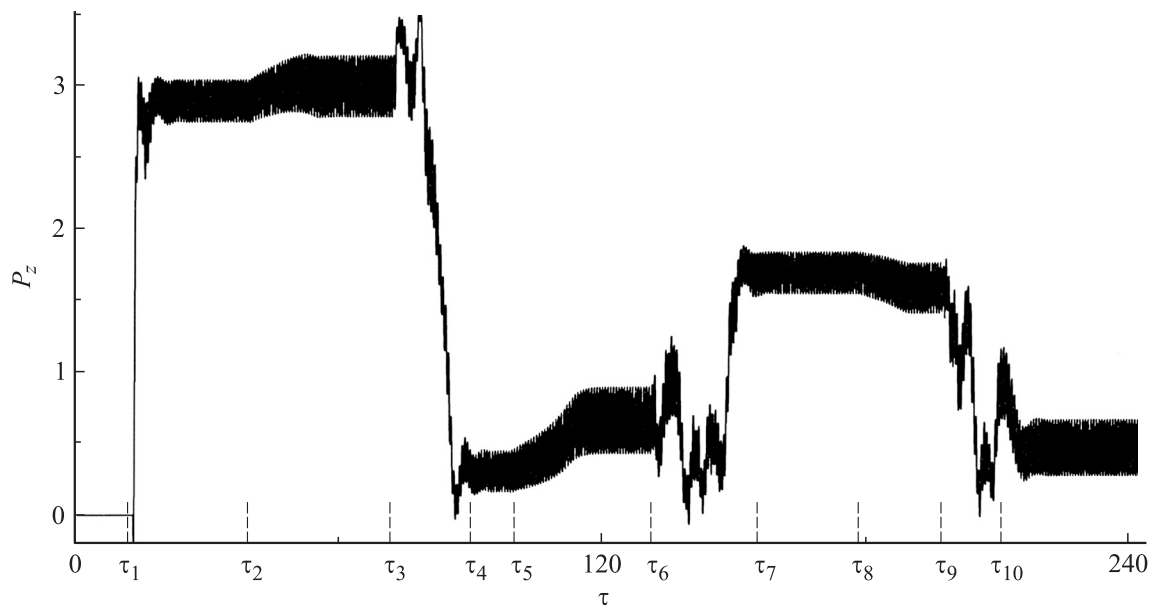


**Рис. 4.** Зависимость от времени  $z$ -компоненты нормированного вектора  $\mathbf{P}$  для четырех связанных диполей в состоянии мультистабильности,  $f = 25$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\psi = 125 \text{ deg}$ .

На рис. 5 для четырехдипольной системы приведена подобная диаграмма, где изменялось значение начальной фазы переменного поля, а ширина полученных полос равна удвоенной амплитуде колебаний  $z$ -компоненты магнитного момента системы при  $\Omega = 10$  и двух различных углах поляризации поля  $\psi = 6\pi/10$ ,  $\psi = 7\pi/10$  (серый и черный цвет полос соответственно). Видно, что вероятность реализации составляющих бистабильность



**Рис. 5.** Диаграмма зависимости от начальной фазы поля реализации различных колебательных режимов мультистабильного состояния четырех связанных диполей при  $\psi = 6\pi/10$  и  $\psi = 7\pi/10$  (серый и черный цвет соответственно).



**Рис. 6.** Зависимость от времени  $z$ -компоненты нормированного вектора  $\mathbf{P}$  для четырех связанных диполей при реализации переходов между колебательными режимами, вызванных изменением угла поляризации поля и добавлением шумового сигнала;  $f = 25$ ,  $\beta = 1$ ,  $\Omega = 10$ ,  $\xi = 0$ .

режимов существенно различается (режимы „1“ и „2“ устанавливаются значительно чаще, чем „3“ и „4“). Кроме того, за счет изменения управляющего параметра системы, в данном случае — угла поляризации, можно эффективно изменять вероятность реализации режимов, относящихся к выбранной ветви. В частности, вероятность установления при  $\psi = 6\pi/10$  режима „1“ в несколько раз выше вероятности установления принадлежащего этой же ветви при  $\psi = 7\pi/10$  режима „4“. Последнее позволяет осуществлять переключения с одного режима на другой, а также возвращаться на предыдущий режим за счет изменения управляющего параметра. Причем подбором параметров данные переключения могут быть приведены в состояния, чувствительные к дополнительному шумовому сигналу.

На рис. 6 приведена временная зависимость компоненты  $P_z$  при осуществлении динамических переходов между режимами. Начальные параметры переменного поля ( $\tau_1$  — моменты включения поля):  $\psi = 126$  deg,  $\xi = 0$  (остальные параметры соответствуют предыдущему рисунку). В рассматриваемом процессе на трех временных интервалах производилось изменение угла поляризации поля (см. далее); кроме того, на интервалах  $[\tau_3, \tau_4]$ ,  $[\tau_6, \tau_7]$  и  $[\tau_9, \tau_{10}]$  к гармоническому переменному полю аддитивно добавлялся шумовой сигнал — случайная величина из интервала  $[-3, 3]$  (т.е. по амплитуде почти на порядок меньшая амплитуды гармонической составляющей), изменяющаяся на каждом шаге расчетной программы.

С момента  $\tau_2$  реализуется постепенное (по линейному закону) уменьшение поляризационного угла до значения  $\psi = 114$  deg и происходит дальнейшее установление ста-

ционарного режима, отвечающего данной поляризации поля. Далее в результате шумового воздействия устанавливается другой регулярный режим, отвечающий тому же значению поляризационного угла переменного поля. При  $\tau_5$  начинается дальнейшее уменьшение угла до значения  $\psi = 102$  deg и последующее установление стационарного режима. Второе включение шумовой составляющей переводит динамику в другой режим мультистабильного состояния, отвечающего углу  $\psi = 102$  deg. С  $\tau_8$  осуществляется постепенное увеличение угла поляризации до значения  $\psi = 105$  deg и установление соответствующего стационарного режима. Третье включение шума переводит систему в динамическое состояние, принадлежащее той же ветви регулярных режимов, что и колебания из временного интервала  $[\tau_4, \tau_6]$ .

Таким образом, реализовалось три переключения между низкоамплитудными динамическими режимами с существенно отличающимися направлениями колебательных осей. Возникновение описанных переходов объясняется тем, что изменение угла поляризации поля приводит к изменению соотношения фазовых объемов бассейнов аттракторов находящихся в бистабильности режимов. В результате сначала наибольший притягивающий бассейн режима, реализовавшегося при включении поля (или после шумового воздействия), значительно уменьшается, и наибольшим становится бассейн уже другого отвечающего данному бистабильному состоянию колебательного режима, к которому и переходит система при новом включении шумового сигнала. Аналогичные переходы будут иметь место также при кратковременном выключении переменного поля и при большем изменении управляющего параметра  $\psi$ , когда

режим, в котором пребывает система, перестает быть устойчивым.

## Заключение

Проведенный анализ систем связанными магнитными диполями показал, что под воздействием переменного магнитного поля наряду с возникновением колебательных режимов магнитного момента системы (включая структуры с исходным нулевым значением суммарного магнитного момента) реализуются ориентационные фазовые переходы между различными динамическими режимами. Индуцированные состояния могут быть как статическими с отличным от нуля значением магнитного момента системы, так и представлять собой низкоамплитудные колебательные режимы с различным направлением оси колебаний. Характерным является возникновение бистабильных и мультистабильных состояний, сильно зависящих от параметров внешнего переменного поля, в частности его частоты, амплитуды и угла линейной поляризации. Это позволяет эффективно управлять состоянием системы и осуществлять заданные ориентационные переходы между различными низкоамплитудными колебаниями магнитного момента.

Показано, что в данных системах реализуются циклические переключения режимов посредством достаточно малого изменения управляющего параметра, в частности ориентационного угла переменного поля; кроме того, в качестве фактора, приводящего к ориентационному переходу, может быть использован шумовой сигнал, аддитивный гармоническому магнитному полю.

## Список литературы

- [1] Филиппов Б.Н., Корзунин Л.Г. // ЖЭТФ. 2002. Т. 121. Вып. 2. С. 372–387.
- [2] Кандаурова Г.С., Осадченко В.Х., Пашко А.Г. // ФТТ. 2005. Т. 47. Вып. 10. С. 1806–1812.
- [3] Шутый А.М., Семенцов Д.И. // Письма в ЖЭТФ. 2003. Т. 78. Вып. 8. С. 952–956.
- [4] Шутый А.М. // Письма в ЖЭТФ. 2008. Т. 87. Вып. 3. С. 181–186.
- [5] Galkin A.Yu., Ivanov V.A., and Zaspel C.E. // Phys. Rev. B. 2006. Vol. 74. N 14. P. 144 419.
- [6] Котов Л.Н., Носов Л.С., Асадуллин Ф.Ф. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 5. С. 60–65.
- [7] Ivanov A.O., Kuznetsova O.B. // Phys. Rev. E. 2001. Vol. 64. N 4. P. 041 405.
- [8] Kozhevnikov V.M., Chuenkova I.J., Danilov M.I. et al. // Magnetohydrodynamics. 2005. Vol. 41. N 1. P. 53–62.
- [9] Гладких Д.В., Диканский Ю.И. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 8. С. 13–18.
- [10] Лахтина Е.В., Пиеничников А.Ф. // Коллоидн. журн. 2006. Т. 68. № 3. С. 327–337.
- [11] Смирнов Б.М. // УФН. 2007. Т. 177. Вып. 4. С. 366–373.
- [12] Бузник В.М., Цветников А.К., Шикунев Б.Ю. // Перспективные материалы. 2002. № 2. С. 69–72.

- [13] Губин С.П., Кокиаров Ю.А., Хомятов Г.Б., Юрков Г.Ю. // Успехи химии. 2005. Т. 74. № 6. С. 539–574.
- [14] Лисовский Ф.В., Поляков О.П. // Письма в ЖЭТФ. 2001. Т. 73. Вып. 9. С. 546–550.
- [15] Шутый А.М. // ЖЭТФ. 2009. Т. 135. Вып. 5. С. 1009–1021.
- [16] Кузнецов С.П. Динамический хаос. М.: Физматлит, 2006. 356 с.
- [17] Семенцов Д.И., Шутый А.М. // УФН. 2007. Т. 177. № 8. С. 831–857.