01

Разложение внутреннего потенциала однородного кругового тора в ряд Лапласа

© Б.П. Кондратьев, Н.Г. Трубицына

Удмуртский государственный университет,
426034 Ижевск, Россия
e-mail: kond@uni.udm.ru

(Поступило в Редакцию 27 апреля 2009 г.)

Внутренний потенциал однородного кругового тора впервые представлен разложением в ряд по сферическим функциям (рядом Лапласа). Получены точные аналитические формулы для коэффициентов этого ряда, которые выражаются через стандартную гипергеометрическую функцию Гаусса, зависящую от геометрического параметра тора. Доказана сходимость ряда и найден радиус сходимости. Установлена зависимость радиуса сходимости от геометрического параметра тора. Выявлена сферическая оболочка, где вопрос о разложении потенциала тора должен решаться в дополнительных исследованиях.

Введение

Хорошо известно, что потенциал любого осесимметричного тела, и кругового тора в частности, может быть представлен рядом по сферическим функциям (или рядом Лапласа). Как показано в работе [1], для внешнего потенциала тора коэффициенты этого ряда могут быть выражены в конечном виде через полиномы Лежандра, зависящие только от геометрического параметра тора $\frac{r_0}{R_0}$. В [1] был установлен и радиус сходимости ряда для внешнего потенциала, равный радиусу осевой окружности тора R_0. Замечательно, что указанное разложение внешнего потенциала работает и в некоторой внутренней области, принадлежащей самому тору.

Здесь рассматривается вторая часть задачи: в ряд Лапласа раскладывается уже внутренний потенциал тора. В общем виде ряд Лапласа для внутреннего потенциала имеет вид

$$\varphi(r,\theta)=\sum_{\nu=0}^{\infty}D_\nu r^\nu P_\nu(\cos\theta), \tag{1}$$

где коэффициенты D_ν выражаются интегралами

$$D_\nu=2\pi G\rho\iint\limits_S r^{1-\nu}P_\nu(\cos\theta)\sin\theta dr\,d\theta. \tag{2}$$

Здесь θ — полярный угол. На оси симметрии Ox_3, где $\theta=0$, будет $P_\nu(1)=1$ и ряд (1) соответственно упрощается

$$\varphi(x_3)=D_0+\sum_{\nu=1}^{\infty}D_\nu x_3^\nu. \tag{3}$$

Задача заключается в нахождении коэффициентов D_ν. Для этого используем известное из [2] или [3, стр. 194] выражение потенциала однородного кругового тора на оси симметрии

$$\varphi(x_3)=\frac{8}{3}\pi G\rho r_0R_0J=\frac{4}{3}\frac{M_{\mathrm{torus}}G}{\pi r_0}J, \tag{4}$$

где функция от x_3

$$J=\left(\frac{1}{\tilde k}+\tilde k\right)E(\tilde k)-\left(\frac{1}{\tilde k}-\tilde k\right)K(\tilde k),\quad \tilde k=\frac{r_0}{\sqrt{R_0^2+x_3^2}}. \tag{5}$$

1. Метод и результаты

Нахождение коэффициентов ряда D_ν является в общем случае непростой задачей (см., например, [1]). Здесь для решения данной задачи применяется другой подход, который позволяет сократить объем сложных выкладок. Идея метода состоит в разложении потенциала тора на оси симметрии (4) по степеням x_3^ν, точнее, в разложении функции J из (5), и в последующем выделении в этом разложении коэффициентов при x_3^ν. Это и будут, с точностью до постоянного множителя, искомые коэффициенты D_ν. Разумеется, найденный ряд и сами коэффициенты будут иметь силу при разложении внутреннего потенциала не только на оси симметрии тора, но и вне ее (и, важно подчеркнуть, только внутри сферы сходимость ряда).

Тор имеет экваториальную плоскость симметрии, поэтому индексы ν могут быть только четными. Положим далее $\nu=2m$, $m=1,2,3,\ldots$

Заметим, что выделенный в (3) коэффициент D_0 равен потенциалу тора в точке его геометрического центра, т.е. $\varphi_{\mathrm{torus}}(0)=D_0$. Этот коэффициент, согласно (4) и (5), выражается через полные эллиптические интегралы:

$$D_0=\frac{4}{3}\frac{M_{\mathrm{torus}}G}{\pi r_0}\left[\left(\frac{1}{k}+k\right)E(k)-\left(\frac{1}{k}-k\right)K(k)\right], \tag{6}$$

где модуль k полных эллиптических интегралов равен геометрическому параметру тора,

$$k=\frac{r_0}{R_0}\le 1. \tag{7}$$

Начнем с того, что представим в (5) эллиптические интегралы $E(\tilde k)$ и $K(\tilde k)$ их известными выражениями в тригонометрической форме:

$$J=\int\limits_0^{\pi/2}\left[\left(\frac{1}{\tilde k}+\tilde k\right)\sqrt{1-\tilde k^2\sin^2\varphi}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{1}{\tilde k}-\tilde k\right)\frac{1}{\sqrt{1-\tilde k^2\sin^2\varphi}}d\varphi\right]d\varphi, \tag{8}$$

или, после простых преобразований:

$$J=\tilde k\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2-(1-\tilde k^2)\sin^2\varphi}{\sqrt{1-\tilde k^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi. \tag{9}$$

Заменив в (9) модуль $\tilde k$ его конкретным значением из (5), приводим J к виду

$$J=\frac{r_0}{R_0^2+x_3^2}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2(R_0^2+x_3^2)-(R_0^2+x_3^2+r_0^2)\sin^2\varphi}{\sqrt{R_0^2+x_3^2-r_0^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi. \tag{10}$$

Далее преобразуем интеграл (10) к виду, удобному для разложения в ряд по степеням x_3. Для этого запишем вначале числитель в (10) в эквивалентной форме

$$J=\frac{r_0}{R_0^2+x_3^2}$$

$$\times\int\limits_0^{\pi/2}\frac{2(R_0^2+x_3^2)+(R_0^2+x_3^2-r_0^2\sin^2\varphi)-(R_0^2+x_3^2)-(R_0^2+x_3^2)\sin^2\varphi}{\sqrt{R_0^2+x_3^2-r_0^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi. \tag{11}$$

Объединив здесь первый, третий и четвертый члены, после преобразований и сокращений на $(R_0^2+x_3^2)$ получим $J=J_1+J_2$, где

$$J_1=r_0\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{R_0^2+x_3^2-r_0^2\sin^2\varphi}}\,d\varphi; \tag{12}$$

$$J_2=\frac{r_0}{R_0^2+x_3^2}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{R_0^2+x_3^2-r_0^2\sin^2\varphi}\,d\varphi. \tag{13}$$

Интеграл (13) необходимо подвергнуть дальнейшим преобразованиям с тем, чтобы и здесь подынтегральное выражение сократилось на „мешающий“ нам множитель $(R_0^2+x_3^2)$. С этой целью запишем J_2 в виде

$$J_2=\tilde k\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-\tilde k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=\tilde k\,E(\tilde k) \tag{14}$$

и обратимся к интегральному равенству

$$\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1-\tilde k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi=(1-\tilde k^2)\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\left(1-\tilde k^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}. \tag{15}$$

Опираясь на (15), получаем

$$J_2=\tilde k(1-\tilde k^2)\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\left(1-\tilde k^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}$$

$$=r_0(R_0^2+x_3^2-r_0^2)\int\limits_0^{\pi/2}\frac{d\varphi}{\left(R_0^2+x_3^2-r_0^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}. \tag{16}$$

Таким образом, имеем

$$J=r_0\int\limits_0^{\pi/2}\left[\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{R_0^2+x_3^2-r_0^2\sin^2\varphi}}\right.$$

$$\left.+\frac{R_0^2+x_3^2-r_0^2}{\left(R_0^2+x_3^2-r_0^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}\right]d\varphi. \tag{17}$$

Далее обозначим для краткости

$$\alpha=\frac{x_3^2}{R_0^2-r_0^2\sin^2\varphi}<1 \tag{18}$$

и запишем J_1 и J_2 в форме

$$J_1=k\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}\,\frac{d\varphi}{\sqrt{1+\alpha}};\quad k=\frac{r_0}{R_0}\le 1; \tag{19}$$

$$J_2=\frac{r_0}{R_0^3}\,(R_0^2+x_3^2-r_0^2)\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}\,\frac{d\varphi}{(1+\alpha)^{3/2}}. \tag{20}$$

Так как

$$(1+\alpha)^{-1/2}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\,\alpha^m;$$

$$(1+\alpha)^{-3/2}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(2m+1)!!}{(2m)!!}\,\alpha^m, \tag{21}$$

вместо (19) и (20) получаем

$$J_1=k\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\left[(-1)^m\,\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\left(\frac{x_3^2}{R_0^2-r_0^2\sin^2\varphi}\right)^m\right]d\varphi; \tag{22}$$

$$J_2=\frac{r_0}{R_0^3}\,(R_0^2+x_3^2-r_0^2)\int\limits_0^{\pi/2}\frac{1}{\left(1-k^2\sin^2\varphi\right)^{3/2}}$$

$$\times\sum_{m=0}^{\infty}\left[(-1)^m\,\frac{(2m+1)!!}{(2m)!!}\left(\frac{x_3^2}{R_0^2-r_0^2\sin^2\varphi}\right)^m\right]d\varphi. \tag{23}$$

Напомним теперь, что в полученном выражении J необходимо выделить коэффициент при x^{2m}: это и будут, с точностью до постоянного множителя, искомые коэффициенты D_{2m}. Действуя так, получим:

$$D_{2m} = \frac{4}{3}\frac{MG}{\pi}$$

$$\times \int\limits_0^{\pi/2} \Bigg[(-1)^m \frac{\cos^2\varphi}{\sqrt{R_0^2 - r_0^2\sin^2\varphi}} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \left(R_0^2 - r_0^2\sin^2\varphi\right)^{-m}$$

$$+ (R_0^2 - r_0^2)(-1)^m \frac{(2m+1)!!}{(2m)!!}\left(R_0^2 - r_0^2\sin^2\varphi\right)^{-m-3/2}$$

$$+ (-1)^{m-1}\frac{(2m-1)!!}{(2m-2)!!}\left(R_0^2 - r_0^2\sin^2\varphi\right)^{-m-1/2}\Bigg] d\varphi. \quad (24)$$

В последнем члене здесь была сделана замена $m \to m-1$, чтобы выравнять степени коэффициентов при x^{2m} в сравнении с двумя первыми коэффициентами в (24).

После интеграции по углу φ, выразим коэффициенты через гипергеометрические функции Гаусса:

$$D_{2m} = \frac{M_{\text{torus}}G}{3}(-1)^m \frac{(2m-1)!!}{R_0^{2m+1}(2m)!!}\Bigg\{ {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, 2, k^2\right)$$

$$+ 2(1-k^2)(2m+1)\; {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, m+\frac{3}{2}, 1, k^2\right)$$

$$- 8m\, {}_2F_1\left(\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}, 1, k^2\right)\Bigg\}. \quad (25)$$

После тождественных преобразований эти коэффициенты можно записать и в более кратком виде

$$D_{2m} = \frac{M_{\text{torus}}G}{R_0}(-1)^m \frac{(2m-1)!!}{2^m m! R_0^{2m}}$$

$$\times\; {}_2F_1\left(\left[-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\right], [2], \frac{r_0^2}{R_0^2}\right). \quad (26)$$

2. Потенциал тора

С учетом найденного выше внутренний пространственный потенциал однородного кругового тора может быть представлен рядом Лапласа в виде

$$\varphi(r,\theta) = D_0 + \sum_{m=1}^{\infty} D_{2m} r^{2m} P_{2m}(\cos\theta), \quad (27)$$

где в качестве первого, нулевого, члена выделен потенциал в центре тора

$$D_0 = \frac{4}{3}\frac{M_{\text{torus}}G}{\pi r_0}\left[\left(\frac{1}{k}+k\right)E(k)\right.$$

$$\left. - \left(\frac{1}{k}-k\right)K(k)\right], \quad k = \frac{r_0}{R_0}, \quad (28)$$

а остальные коэффициенты выражаются через стандартную гипергеометрическую функцию

$$D_{2m} = \frac{M_{\text{torus}}G}{R_0}(-1)^m \frac{(2m-1)!!}{2^m m! R_0^{2m}}$$

$$\times\; {}_2F_1\left(\left[-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\right], [2], k^2\right), \quad m = 1, 2, 3, \ldots\,. \quad (29)$$

Значения нескольких коэффициентов:

$$D_2 = \frac{4}{3}\frac{M_{\text{torus}}G}{\pi r_0}\frac{1}{2kR_0^2}\left[(1-2k^2)E(k) - (1-k^2)K(k)\right];$$

$$D_4 = \frac{4}{3}\frac{M_{\text{torus}}G}{\pi r_0}\left(-\frac{1}{8kR_0^4}\right)$$

$$\times\left[(1-8k^2)E(k) - (1-4k^2)K(k)\right];$$

$$D_6 = \frac{4}{3}\frac{M_{\text{torus}}G}{\pi r_0}\frac{1}{16k(1-k^2)R_0^6}$$

$$\times\left[(1-16k^2+16k^4)E(k) - (1-9k^2+8k^4)K(k)\right]. \quad (30)$$

3. Радиус сходимости Лапласа

Важным является вопрос о сходимости ряда Лапласа (27) и определение радиуса сходимости, т. е. радиуса той сферы, внутри которой указанный ряд сходится. Для этого применяют тонкие и тщательно разработанные аналитические методы (см., например, [4]). Но в данном случае будет применен более простой оригинальный способ, использованный нами и в работе [1]. Суть его состоит в оценке величины члена ряда в асимптотике больших значений индекса m. Собственно говоря, уже оценка гипергеометрической функции Гаусса, входящей в члены ряда для тора

$${}_2F_1\left(\left[-\frac{1}{2}, m+\frac{1}{2}\right], [2], k^2\right),$$

в асимптотическом пределе больших m представляет собой весьма тонкую аналитическую задачу. Справочники [5] дают подобные оценки только для комплексных значений. Необходимая работа была проделана самостоятельно, и в итоге найдено, что коэффициенты (29) в асимптотике больших m оказываются равными

$$D_{2m} \sim \frac{M_{\text{torus}}G}{2\pi R_0}(-1)^{m+1}\left(\frac{R_0}{r_0}\right)^5 \frac{e^{\left(m+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{r_0}{R_0}\right)^2}}{\sqrt{m}\left(m+\frac{1}{2}\right)^{5/2}}. \quad (31)$$

Следовательно, в асимптотике больших m член ряда (27) будет иметь вид

$$\varphi_{2m} \sim \frac{M_{\text{torus}}G}{2\pi R_0}(-1)^{m+1}\left(\frac{R_0}{r_0}\right)^5$$

$$\times \frac{e^{m\left(\frac{r_0}{R_0}\right)^2} P_{2m}(\cos\theta)}{\sqrt{m}\left(m+\frac{1}{2}\right)^{5/2}}\left(\frac{r}{R_0}\right)^{2m}. \quad (32)$$

Для сходимости ряда (27) в (32) необходимо потребовать

$$\left(\frac{r}{R_0}\right)^{2m} \cdot e^{m\left(\frac{r_0}{R_0}\right)^2} \leq 1, \quad \text{т.е.} \quad \left(\frac{r}{R_0}\right)^{2} \cdot e^{\left(\frac{r_0}{R_0}\right)^2} \leq 1. \tag{33}$$

Из (33) находим и сам радиус сходимости ряда (27)

$$R_{\text{con}} = R_0 \exp\left(-\frac{r_0^2}{2R_0^2}\right). \tag{34}$$

R_{con} из (34) и есть искомый радиус сходимости ряда Лапласа для внутреннего потенциала однородного кругового тора, т.е. ряд Лапласа (27) и будет сходиться только внутри сферы указанного радиуса.

Существенно, что найденный радиус сходимости сильно зависит от геометрического параметра тора $\frac{r_0}{R_0} \leq 1$. Лишь в частном случае $r_0 \to 0$ вырождения тора в тонкий обруч эта зависимость исчезает, и тогда $R_{\text{con}} = R_0$. В другом предельном случае $r_0 \to R_0$, когда внутреннее отверстие тора исчезает,

$$R_{\text{con}} = \frac{R_0}{\sqrt{e}} = 0.6065\, R_0. \tag{35}$$

Заключение

Внутренний потенциал однородного кругового тора впервые представлен в виде ряда по полиномам Лежандра. Найдены точные аналитические формулы для коэффициентов этого ряда и показано, что они выражаются через стандартную гипергеометрическую функцию Гаусса. Проверка показала, что этот ряд быстро сходится и дает правильные результаты. Оригинальным методом найдено выражение радиуса сходимости ряда и установлено, каким образом этот радиус зависит от величины геометрического параметра тора $\frac{r_0}{R_0} \leq 1$. Особо важно подчеркнуть, что для невырожденного в тонкий обруч тора существует „зазор" — сферическая оболочка с радиусом

$$R_0 \leq r \leq R_0 \exp\left(-\frac{r_0^2}{2R_0^2}\right), \tag{36}$$

внутри которой потенциал тора не может быть представлен рядами Лапласа, найденными нами в [1] и в настоящей работе. Устранение этого зазора — специальная тема для исследования.

Авторы благодарны А.С. Дубровскому за помощь в проверке полученных результатов.

Список литературы

[1] *Кондратьев Б.П., Дубровский А.С., Трубицына Н.Г., Мухаметшина Э.Ш.* // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 2. С. 17–21.

[2] *Кондратьев Б.П.* Теория потенциала и фигуры равновесия. М.–Ижевск: РХД, 2003. 624 с.

[3] *Кондратьев Б.П.* Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями. М.: Мир, 2007. 512 с.

[4] *Антонов В.А., Тимошкова Е.И., Холшевников К.В.* Введение в теорию ньютоновского потенциала. М.: Наука, 1988. 272 с.

[5] *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 830 с.