

01;05;12

## Вольт-амперные характеристики и особенности возникновения токовой неустойчивости в высокотемпературном сверхпроводнике при неравномерном распределении температуры в его поперечном сечении

© В.Р. Романовский

Российский научный центр „Курчатовский институт“,  
123182 Москва, Россия

(Поступило в Редакцию 4 февраля 2009 г. В окончательной редакции 16 июня 2009 г.)

Исследовано влияние неравномерного распределения температуры в поперечном сечении высокотемпературного сверхпроводника на формирование его вольт-амперной характеристики и условия сохранения устойчивого распределения введенного тока. Выписаны уравнения, позволяющие с учетом размерного эффекта определить граничные значения напряженности электрического поля и тока, превышение которых приводит к возникновению токовой неустойчивости. Показано, что ток срыва ввода, определяющий максимально допустимое значение вводимого тока, уменьшается, если при теоретическом анализе условий его стабильности во внимание принимается тепловая неоднородность электродинамических состояний. В результате предельно допустимые значения напряженности электрического поля и тока нелинейно зависят от термического сопротивления сверхпроводника, его критических свойств, условий внешнего теплообмена. Поэтому при интенсивном охлаждении сверхпроводника ток возникновения неустойчивости не будет возрастать пропорционально увеличению площади его поперечного сечения или критической плотности тока.

### Введение

Исследование условий возникновения токовой неустойчивости, возникающей при вводе тока как в низкотемпературные, так и высокотемпературные сверхпроводящие магниты, является одной из основных задач прикладной сверхпроводимости [1]. Ее решение позволяет обеспечить стабильную работоспособность магнитных систем, работающих при предельно допустимых токовых режимах. Как было впервые показано в [2], ток, при котором возникают неустойчивые состояния (ток срыва ввода), может быть определен на основе анализа нарастания вольт-амперной характеристики сверхпроводника и следует из условия

$$\partial E / \partial J \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Данный критерий был сформулирован в предположении о равномерном распределении напряженности электрического поля  $E$  и плотности тока  $J$  по сечению сверхпроводника. В свою очередь, он подразумевает и однородное распределение температуры, предшествующее возникновению неустойчивости. С точки зрения формирования теплового состояния сверхпроводника подобные тепловые режимы имеют место при  $H = ha/\lambda_0 \ll 1$ , как это следует из элементарных оценок теории теплопроводности [3]. Здесь  $h$  — коэффициент теплоотдачи,  $\lambda_0$  — коэффициент теплопроводности сверхпроводника,  $a$  — его характерный линейный размер. Согласно данному условию, равномерное распределение температуры в поперечном сечении сверхпроводника наиболее вероятно при его малой толщине либо при неинтенсивных

условиях теплоотдачи или высоких значениях коэффициента теплопроводности. В то же время сверхпроводящие материалы обладают низкой теплопроводностью. Поэтому распределение температуры по толщине сверхпроводника, строго говоря, не является равномерным [1]. Кроме этого, критерий пространственной неоднородности тепловых процессов, т.е. условие  $H \gg 1$ , не дает ответа о влиянии критических свойств сверхпроводника на пространственные особенности развития стабильных токовых состояний и условия возникновения неустойчивости. В связи с этим в настоящей работе изучены закономерности формирования вольт-амперной характеристики высокотемпературного сверхпроводника при неоднородном распределении температуры по его сечению и сформулированы соответствующие условия нарушения устойчивого распределения тока.

### Постановка задачи

Исследуем в рамках одномерной нестационарной модели неизотермическую динамику транспортного тока в высокотемпературном сверхпроводнике в виде плоскопараллельной пластины с полушириной  $a$ . Пусть ток  $I$  увеличивается с постоянной скоростью  $dI/dt$  от нулевого значения, а на боковых поверхностях сверхпроводника имеет место конвективный теплообмен с заданным коэффициентом теплоотдачи  $h$ . Предположим, что вольт-амперная характеристика сверхпроводника, помещенного в постоянное внешнее магнитное поле  $B$ , превышающее магнитное поле вводимого тока, описывается степенным уравнением, и его критическая плотность тока  $J_c$  линейно уменьшается с ростом температуры.

Согласно данным допущениям, изменение во времени температуры и напряженности электрического поля в поперечном сечении сверхпроводника может быть определено из решения следующей системы уравнений [4,5]:

$$C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + EJ, \quad (2)$$

$$\mu_0 \frac{\partial J}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}, \quad t > 0 \quad (3)$$

с начально-краевыми условиями вида

$$T(x, 0) = T_0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0, \quad (4)$$

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(a, t) + h[T(a, t) - T_0] = 0,$$

$$E(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial x}(0, t) = 0, \quad \frac{\partial E}{\partial x}(a, t) = \frac{\mu_0}{4b} \frac{dI}{dt}, \quad (5)$$

где вольт-амперная характеристика и температурная зависимость критической плотности тока сверхпроводника описываются соотношениями

$$E = E_c \left[ \frac{J}{J_c(T, B)} \right]^n, \quad (6)$$

$$J_c(T, B) = J_{c0}(B) \frac{T_{cB}(B) - T}{T_{cB}(B) - T_0}. \quad (7)$$

Здесь  $C(T)$  — объемная теплоемкость сверхпроводника;  $\lambda(T)$  — коэффициент его теплопроводности;  $T_0$  — температура хладагента;  $E_c$ ,  $J_{c0}$ ,  $T_{cB}$ ,  $n$  — исходные параметры сверхпроводника при заданном значении индукции внешнего магнитного поля;  $b$  — полуширина пластины.

Обсуждаемые ниже результаты были получены для высокотемпературного сверхпроводника на основе  $\text{Bi}_2\text{Sr}_2\text{CaCu}_2\text{O}_8$ . При этом исходные параметры принимались равными:  $B = 10$ ,  $T_0 = 4.2$  К,  $n = 10$ ,  $h = 0.1$  Вт/(см<sup>2</sup>·К),  $E_c = 10^{-6}$  В/см,  $T_{cB} = 26.1$  К,  $J_{c0} = 1.52 \cdot 10^4$  А/см<sup>2</sup>,  $a = 0.05$  см, а температурные зависимости теплоемкости и теплопроводности сверхпроводника рассчитывались по формулам:

$$C(T) = (58.5T + 22T^3) \cdot 10^{-6} \left[ \frac{\text{J}}{\text{cm}^3 \cdot \text{K}} \right], \quad T \leq 10 \text{ К},$$

$$\lambda(T) = \left( \frac{-1.234 \cdot 10^{-5} + 1.654 \cdot 10^{-4}T}{+4.608 \cdot 10^{-6}T^2 - 1.127 \cdot 10^{-7}T^3 + 6.061 \cdot 10^{-10}T^4} \right) \left[ \frac{\text{W}}{\text{cm} \cdot \text{K}} \right], \quad (8)$$

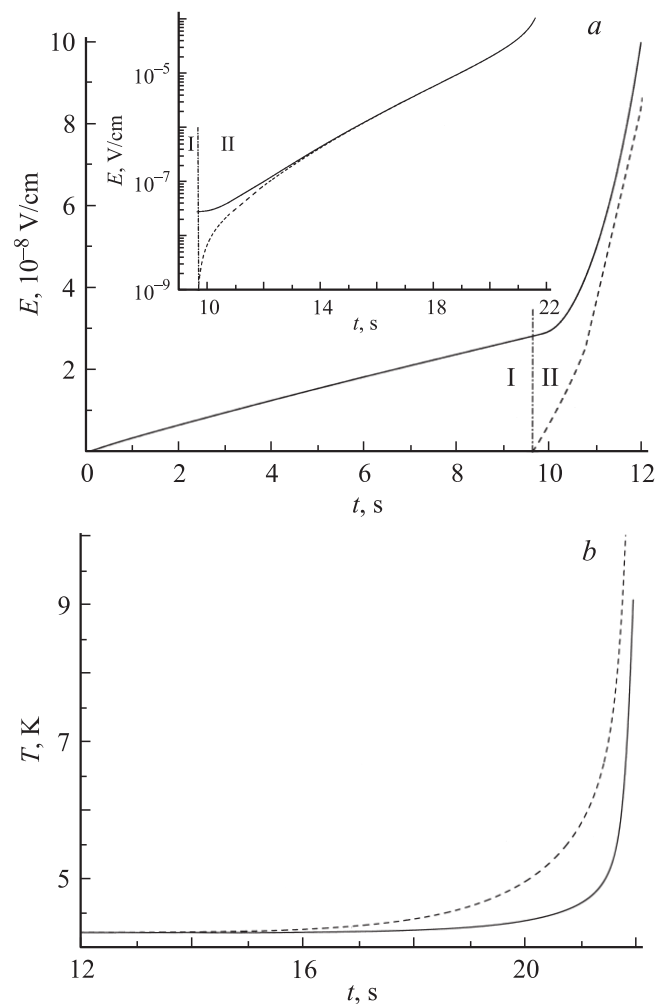
согласно [6,7].

Решение задачи (2)–(8) основывалось на методе конечных разностей. Для удобства проводимого анализа в расчетах использовались приведенные значения тока и скорости его ввода, нормированные на полную ширину пластины, и соответственно равные  $I^* = 0.5I/b$  и  $dI^*/dt = 0.5b^{-1}dI/dt$ .

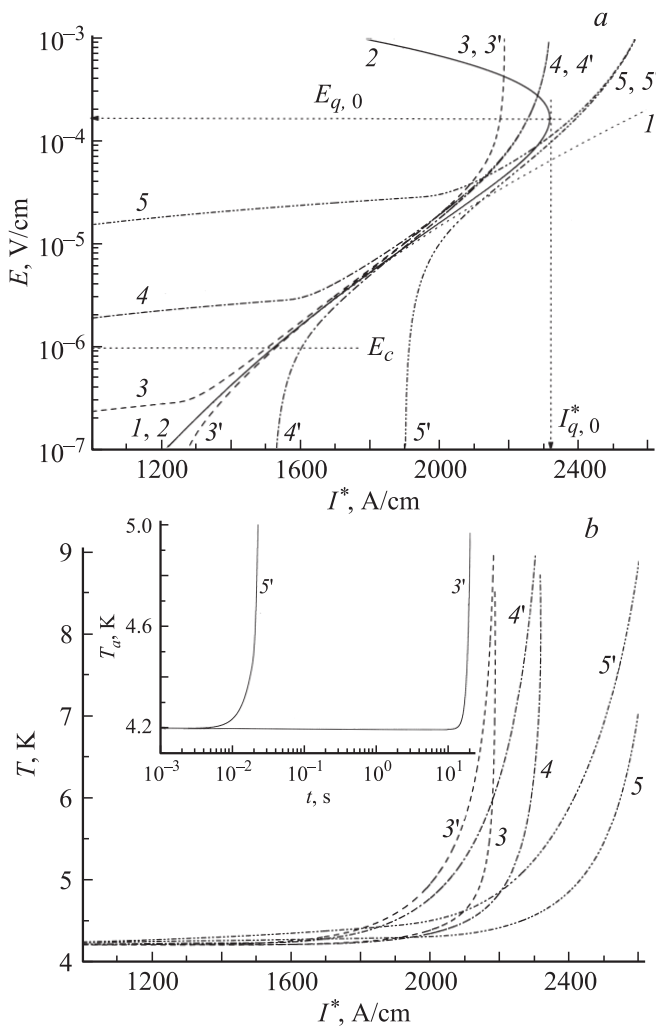
## Результаты

Обсудим прежде всего основные физические закономерности формирования электродинамических состояний рассматриваемого высокотемпературного сверхпроводника, учитывая, согласно поставленной задаче (2)–(8), пространственно-временной характер изменения его температурного поля, индуцированного введенным током.

На рис. 1 представлены результаты численных экспериментов, описывающих изменение во времени напряженности электрического поля и температуры, которое будет иметь место на поверхности и в центре сверхпроводящей пластины при  $dI^*/dt = 10^2$  А/(с·см). Кривые 3, 3', 4, 4', 5, 5' на рис. 2 демонстрируют влияние скорости ввода тока на формирование вольт-амперных и температурно-амперных характеристик рассматрива-



**Рис. 1.** Изменение во времени напряженности электрического поля (*a*, сплошная кривая —  $E(a, t)$ , пунктир —  $E(0, t)$ ) и температуры (*b*, сплошная кривая —  $T(a, t)$ , пунктир —  $T(0, t)$ ) на поверхности (сплошная кривая) и в центре (пунктир)  $\text{Bi}_2\text{212}$ -сверхпроводника при непрерывном вводе тока: I — режим неполного проникновения тока, II — режим полного проникновения тока.



**Рис. 2.** Вольт-амперная (а) и температурно-амперная (b) характеристика Bi2212 при вводе тока с различными скоростями: 1 —  $T = 4.2$  К, 2 —  $dI^*/dt \rightarrow 0$ , 3 —  $dI^*/dt = 10^3$  А/(с·см), 4 —  $dI^*/dt = 10^4$  А/(с·см), 5 —  $dI^*/dt = 10^5$  А/(с·см).

емого высокотемпературного сверхпроводника. Здесь же для иллюстрации особенностей неизотермического характера развития электродинамических состояний сверхпроводника, которые имеют место как при устойчивых, так и неустойчивых состояниях, приведена вольт-амперная характеристика сверхпроводника ( $I$ ), рассчитанная по формуле (6) при  $T = 4.2$  К, т.е. в изотермическом приближении. Кроме того, кривая 2 описывает стационарную неизотермическую вольт-амперную характеристику, определенную в предположении равномерного распределения температуры и электрического поля по сечению сверхпроводника во всем диапазоне варьирования транспортного тока. В этом случае тепловое состояние сверхпроводника с вольт-амперной характеристикой (6) определялось на основе решения упрощенного уравнения теплового баланса

$$EJ = h(T - T_0)/a, \quad (9)$$

в котором плотность транспортного тока вычислялась как  $J = I^*/(2a)$ . Соответственно на рис. 2, а изображены напряженность электрического поля  $E_{q,0}$  и ток срыва  $I_{q,0}^*$ , определяющие границу устойчивости пространственно однородных состояний, которые следуют из условия (1). Согласно нуль-мерной модели, описываемой соотношениями (6), (7) и (9), их значения равны

$$E_{q,0} = E_c \left[ \frac{h(T_{cB} - T_0)}{nJ_{c0}E_c a} \right]^{n/(n+1)},$$

$$I_{q,0}^* = 2J_{c0}a \frac{n}{n+1} \left[ \frac{h(T_{cB} - T_0)}{nJ_{c0}E_c a} \right]^{1/(n+1)}. \quad (10)$$

Рис. 1, 2 наглядно демонстрируют характерные особенности изменения температурного и электрического полей по сечению сверхпроводника при непрерывном вводе тока с различными скоростями, которые необходимо учитывать при определении условий его стабильного ввода.

Во-первых, на стадии неполного проникновения тока внутрь сверхпроводника по вполне понятным причинам наблюдается неравномерное распределение электрического поля по его сечению. При этом данный режим сопровождается не только практически однородным распределением температуры, но и характеризуется ее слабым отклонением от температуры хладагента (рис. 1, b). Однако формирование тепло-электродинамического состояния сверхпроводника при полном заполнении током его поперечного сечения может иметь обратную тенденцию.

В рассматриваемом случае даже при относительно малых значениях скорости ввода тока распределение температуры по сечению сверхпроводника перестает быть равномерным, в то время как распределение электрического поля со временем становится практически однородным. Данная тенденция сохраняется и при более высоких значениях скорости ввода тока, как это следует из рис. 2. Но при этом необходимо принимать во внимание, что практически равномерное распределение электрического поля по сечению сверхпроводника в режиме полного проникновения вводимого тока будет наблюдаться в случаях, когда скорость ввода тока удовлетворяет условию  $dI/dt \ll 4bE_c/(\mu_0 a)$ , как это было показано ранее в [4]. Следовательно, при  $dI/dt \ll 4bE_c/(\mu_0 a)$  распределение температурного поля может быть неравномерным, в то время как формирование электрического поля по сечению сверхпроводника в режиме полного заполнения током его поперечного сечения с хорошей степенью точности может быть аппроксимировано пространственно однородным приближением.

Во-вторых, нестационарные вольт-амперные характеристики высокотемпературного сверхпроводника (кривые 3, 3'-5, 5' на рис. 2) количественно и качественно отличаются от зависимостей  $E(I^*)$ , рассчитанных не только в изотермическом приближении (1), но и на основе использования стационарной нуль-мерной модели (2).

В области высоких электрических полей ( $E > E_c$ ) эта особенность связана, во-первых, с тепловым влиянием теплоемкости сверхпроводника на протекающие в нем нестационарные электродинамические процессы [4].

Согласно [4], нарастание зависимостей  $E(I^*)$  и  $T(I^*)$  при непрерывном вводе тока зависит от интенсивности увеличения температуры сверхпроводника даже на стадии стабильных состояний. Поэтому при непрерывном вводе тока наклон кривых  $3, 3'-5, 5'$  всегда положителен и уменьшается с ростом скорости ввода тока вследствие соответствующего увеличения температуры сверхпроводника (см. вставку на рис. 2, *b*), т.е. его теплоемкости. В результате условие (1), позволяющее при стационарном равномерном распределении тока и температуры найти граничные значения  $E_{q,0}$  и  $I_{q,0}^*$  при непрерывном вводе тока в высокотемпературные сверхпроводники не соблюдается. Причем перед возникновением неустойчивости его нестационарная вольт-амперная характеристика должна проходить ниже соответствующей стационарной вольт-амперной характеристики [4], если бы на формирование электрического поля внутри сверхпроводника оказывала влияние только теплоемкость сверхпроводника (5).

В то же время из рис. 2 следует, что нестационарные вольт-амперные характеристики сверхпроводника при малых скоростях ввода тока в области напряжений, предшествующих возникновению токовой неустойчивости, могут проходить и выше соответствующей стационарной вольт-амперной характеристики, рассчитанной согласно неизотермической нуль-мерной модели (3, 3' и 4, 4'). В результате диапазон стабильных значений тока, определенный с учетом неравномерного распределения температуры по сечению сверхпроводника, должен изменяться по сравнению с аналогичными расчетными значениями тока, полученными в рамках нуль-мерной модели, в силу соответствующего повышения напряженности электрического поля. Данная особенность формирования вольт-амперной характеристики сверхпроводника при малых значениях  $dI/dt$  не может быть объяснена влиянием теплоемкости сверхпроводника на протекающие в нем электродинамические процессы. Для того чтобы ее понять, найдем в стационарном приближении, т.е. при  $dI/dt \rightarrow 0$ , распределение температуры по сечению рассматриваемого сверхпроводника с учетом ее неравномерного характера, которое имеет место в режиме полного проникновения тока. Соответственно решим следующую краевую задачу:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + EJ = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = 0, \\ \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(a, t) + h[T(a, t) - T_0] = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

принимая во внимание соотношения (6) и (7), а также рассмотренную выше особенность, согласно которой при формировании электрического поля, индуцированного вводом тока с малой скоростью нарастания, характер его распределения незначительно отличается от

равномерного, а значит,  $E$  не зависит от координаты  $x$  при  $dI/dt \rightarrow 0$ .

В общем случае решение задачи (6), (7), (11) требует использования численных методов. Однако в предположении, что значение коэффициента теплопроводности постоянно ( $\lambda = \lambda_0 = \text{const}$ ), она может быть решена аналитически. Действительно, введем безразмерные переменные

$$\theta = (T_{cB} - T)/(T_{cB} - T_0), \quad X = x/a.$$

Тогда задача (6), (7), (11) преобразуется к виду

$$d^2\theta/dX^2 - \gamma\theta = 0,$$

$$d\theta/dX(0) = 0, \quad d\theta/dX(1) + H\theta(1) = 0. \quad (12)$$

Здесь  $H$  — безразмерное термическое сопротивление сверхпроводника (параметр Био [3]), определенное ранее,

$$\gamma = \frac{J_{c0} E_c a^2}{\lambda_0 (T_{cB} - T_0)} \left( \frac{E}{E_c} \right)^{(n+1)/n}$$

— безразмерный параметр, который, как будет показано ниже, описывает влияние свойств сверхпроводника, его толщины на неоднородный характер формирования тепло-электродинамических состояний. Данный параметр может быть переписан в виде

$$\gamma = \frac{J E a}{\lambda_0 (T_{cB} - T_0) / a}.$$

Поэтому по своему физическому смыслу параметр  $\gamma$  равен отношению характерного значения мощности джоулева тепловыделения в сверхпроводнике к мощности теплового потока, переносимого его теплопроводностью. Тем самым он непосредственно описывает влияние кондуктивного механизма переноса тепла на протекающие в сверхпроводнике электродинамические процессы при непрерывном вводе в него тока. В частности, нетрудно понять, что при  $\gamma \ll 1$ , например при эффективном механизме теплопроводности, задача (12) приводит к модели с равномерным распределением температуры внутри сверхпроводника.

Краевой задаче (12) удовлетворяет функция

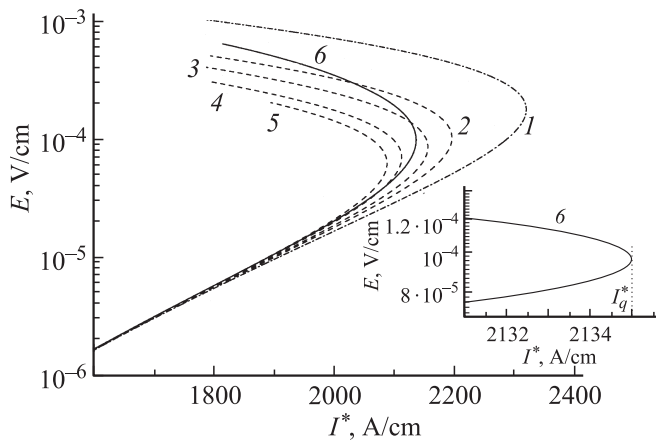
$$\theta(X) = \theta_0 \text{ch} \sqrt{\gamma} X, \quad \theta_0 = \frac{H}{\sqrt{\gamma} \text{sh} \sqrt{\gamma} + H \text{ch} \sqrt{\gamma}}.$$

Поэтому в размерном виде стационарное распределение температуры по сечению сверхпроводника со степенной вольт-амперной характеристикой при полном проникновении тока описывается выражением

$$T(x) = T_{cB} - (T_{cB} - T_0) \theta_0 \text{ch} \left( \sqrt{\gamma} \frac{x}{a} \right). \quad (13)$$

В этом случае связь между вводимым током и напряженностью электрического поля, определяемая с учетом симметрии рассматриваемой задачи как

$$I^*(E) = 2 \int_0^a J(E) dx,$$



**Рис. 3.** Влияние коэффициента теплопроводности Bi2212 на его вольт-амперные характеристики: 1 —  $H \rightarrow 0$ , 2 —  $\lambda_0 = \lambda$  (10 K), 3 —  $\lambda_0 = \lambda$  (7 K), 4 —  $\lambda_0 = \lambda$  (5 K), 5 —  $\lambda_0 = \lambda$  (4.2 K), 6 —  $\lambda(T)$ .

записывается в виде

$$I^* = 2J_{c0}a \left( \frac{E}{E_c} \right)^{1/n} \frac{H}{\gamma + H\sqrt{\gamma}/\text{th}\sqrt{\gamma}}. \quad (14)$$

На рис. 3 построены стационарные вольт-амперные характеристики, рассчитанные в предположении неравномерного и равномерного распределения температуры по сечению сверхпроводника. В последнем случае ее значения (1), согласно нуль-мерной модели (6), (7) и (9), определялись в соответствии с выражением

$$I^* = 2J_{c0}a \left( \frac{E}{E_c} \right)^{1/n} \frac{H}{\gamma + H}. \quad (15)$$

Расчеты, выполненные для неоднородных состояний, основывались на использовании формулы (14) (2–5), а также численном решении задачи (6), (7), (11) с учетом зависимости коэффициента теплопроводности от температуры (6). Кроме того, изменение кривой 6 вблизи границы устойчивости более детально изображено на вставке к рис. 3, где также приведено соответствующее значение тока срыва, вычисленное с учетом температурной зависимости коэффициента теплопроводности сверхпроводника.

Представленные результаты наглядно показывают, что учет изменения теплового состояния сверхпроводника в его поперечном сечении приводит при теоретическом анализе условий устойчивости к уменьшению стабильных значений тока по отношению к соответствующим значениям, определенным в рамках нуль-мерной модели. Для того чтобы понять причину, лежащую в основе данной закономерности, найдем среднюю температуру сверхпроводника

$$T_V = \frac{1}{a} \int_0^a T(x) dx.$$

В соответствии с (13) ее значение в рамках одномерной модели равно

$$T_V = T_0 + (T_{cB} - T_0) \left( 1 - \frac{H}{\gamma + H\sqrt{\gamma}/\text{th}\sqrt{\gamma}} \right). \quad (16)$$

В то же время, согласно нуль-мерной модели, температура сверхпроводника при однородном распределении тока в терминах используемых переменных описывается равенством

$$T_{V,0} = T_0 + (T_{cB} - T_0) \left( 1 - \frac{H}{\gamma + H} \right). \quad (17)$$

Сопоставив между собой значения  $T_V$  и  $T_{V,0}$ , легко понять, что имеет место неравенство  $T_V > T_{V,0}$ , поскольку всегда соблюдается условие  $\sqrt{\gamma} > \text{th}\sqrt{\gamma}$ . Поэтому при любых конечных значениях  $\gamma$  средняя температура сверхпроводника всегда выше соответствующего значения, вычисленного в предположении существования однородных состояний. Различие тем заметнее, чем больше значение  $\gamma$  в силу соответствующего возрастания множителя  $\sqrt{\gamma}/\text{th}\sqrt{\gamma}$ . Причем последний оказывает такое же влияние и на характер изменения вольт-амперной характеристики сверхпроводника. Это следует из сравнения вольт-амперных характеристик, описываемых формулами (14) и (15), которые были получены в рамках одномерного и нуль-мерного стационарных приближений соответственно. Другими словами, имеет место тепловой размерный эффект, в основе которого лежит пространственное изменение теплового состояния сверхпроводника в зависимости от значения  $\gamma$ . В соответствии с данным размерным эффектом будут видоизменяться и условия стабильности вводимых токов.

Отметим, что в рассматриваемом случае изменение устойчивого диапазона вводимых токов связано с влиянием, которое на электродинамические процессы в сверхпроводнике оказывает температурная зависимость коэффициента теплопроводности сверхпроводника. В результате различие между вольт-амперными характеристиками, рассчитанными с учетом размерного эффекта и без него, тем заметнее, чем ниже значение коэффициента теплопроводности сверхпроводника. Из сказанного следует, что при прочих равных условиях влияние пространственной неоднородности температурного поля сверхпроводника на формирование его вольт-амперной характеристики будет тем более заметно, чем ниже рабочая температура хладагента, от которой зависит величина коэффициента теплопроводности. Параметр  $\gamma$  позволяет также оценить правомерность использования нуль-мерной модели в случаях, когда изменяются и критические свойства сверхпроводника. В частности, нетрудно понять, что при прочих равных условиях степень влияния неравномерного распределения температуры на электродинамические состояния сверхпроводника будет тем заметнее, чем выше его критическая плотность тока либо меньше так называемый температурный запас сверхпроводника, зависящий от разницы между критической температурой сверхпроводника

и температурой хладагента. Причем их влияние на теплоэлектродинамические состояния сверхпроводника будет тем заметнее, чем более интенсивно охлаждается сверхпроводник, как это следует из (14) и (16).

Результаты, представленные на рис. 3, также строго доказывают, что граница возникновения токовой неустойчивости в стационарном неоднородном приближении следует из условия

$$\partial E / \partial I \rightarrow \infty. \quad (18)$$

Его формальное отличие от условия (1) показывает, что при неравномерном распределении температуры внутри сверхпроводника условие возникновения токовой неустойчивости зависит от характера перераспределения тока по всему сечению сверхпроводника. Кроме того, неравномерное распределение температуры по сечению сверхпроводника также видоизменяет и формулировку критерия устойчивости, позволяющего найти границу стабильных режимов на основе анализа баланса энергии, выделяемой при вводе тока в отводимой в хладагент. В этом случае существование стабильных режимов перед возникновением токовой неустойчивости зависит от того, насколько эффективно происходит теплосъем джоулева тепловыделения в хладагент. Соответственно в рамках однородных теплоэлектродинамических состояний устойчивые режимы должны удовлетворять следующим соотношениям [2]:

$$G(T) = W(T), \quad \partial G(T) / \partial T = \partial W(T) / \partial T. \quad (19)$$

Здесь  $G = EJ$  — мощность джоулева тепловыделения на единицу объема,  $W = h(T - T_0) / a$  — объемная мощность теплосъема. Для того чтобы записать условие (19) с учетом неравномерного распределения температуры, воспользуемся краевой задачей (10) и проинтегрируем уравнение теплопроводности по  $x$  в пределах от 0 до  $a$ . Учитывая граничные условия, нетрудно получить следующее соотношение:

$$\int_0^a EJ dx = h(T - T_0)|_{x=a}, \quad (20)$$

описывающее в интегральной форме первое равенство в условии (19). Очевидно, что и второе равенство видоизменится в соответствии с данной формулировкой значений  $G$  и  $W$ .

Используя уравнение вольт-амперной характеристики (14), записанное с учетом размерного эффекта, и условие (18), нетрудно найти напряженность электрического поля  $E_q$  и ток срыва на единицу ширины пластины  $I_q^*$ , предшествующие возникновению неустойчивости при неравномерном распределении температуры по сечению сверхпроводника. Соответственно в терминах используемых безразмерных переменных значение  $E_q$  определяется из решения уравнения

$$H = \frac{2n}{n+1} \frac{\sqrt{\gamma_q} \operatorname{th} \sqrt{\gamma_q}}{\operatorname{sh} 2\sqrt{\gamma_q} - \frac{n-1}{n+1}}, \quad (21)$$

а величина  $I_q^*$  равна

$$I_q^* = 2J_{c0} a \left( \frac{E_q}{E_c} \right)^{1/n} \frac{H}{\gamma_q + H \sqrt{\gamma_q} / \operatorname{th} \sqrt{\gamma_q}}.$$

Здесь

$$\gamma_q = \frac{J_{c0} E_c a^2}{\lambda_0 (T_{cB} - T_0)} \left( \frac{E_q}{E_c} \right)^{1+1/n}.$$

Зависимость  $\gamma_q$  от безразмерного термического сопротивления  $H$  для различных значений показателя степени нарастания вольт-амперной характеристики построена на рис. 4. Расчеты проводились как для пространственно однородных теплоэлектродинамических состояний ( $I-3$ ), так и с учетом их неоднородности (кривые  $I'-3'$ ). При этом зависимость  $\gamma_q(H)$  в нуль-мерном приближении рассчитывалась по формуле

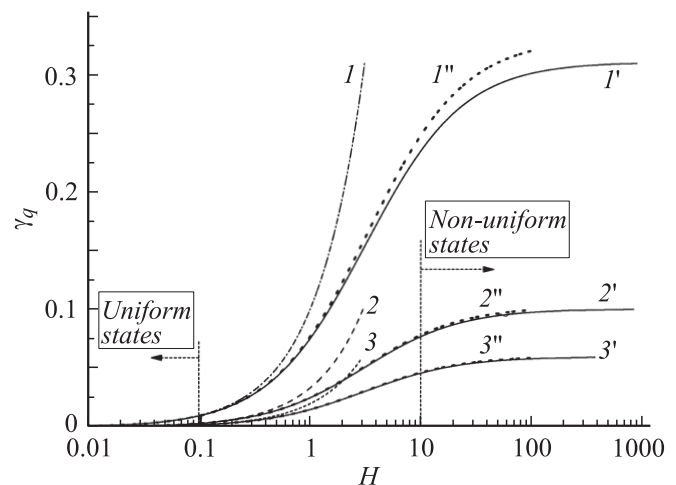
$$\gamma_q = H/n, \quad (22)$$

которая следует из (10) или может быть получена из (21) в предположении, что  $\gamma_q \ll 1$ .

Из рис. 4 следует, что в широком диапазоне варьирования безразмерного термического сопротивления сверхпроводника значения  $\gamma_q$  не превышают единицы. Это позволяет найти приближенное решение уравнения (21), описывающего границу допустимых значений напряженности электрического поля. После несложных преобразований граничное значение  $\gamma_q$  может быть определено как

$$\gamma_q \approx \frac{H}{n} \frac{1}{1 + H(n-1)/3n}. \quad (23)$$

Приближенные значения  $\gamma_q$ , вычисленные согласно (23), также приведены на рис. 4 (кривые  $I''-3''$ ). Видно, что



**Рис. 4.** Влияние безразмерного термического сопротивления сверхпроводника на значения  $\gamma_q$ , вычисленные в рамках нуль-мерной ( $I-3$ ) и одномерной моделей как на основании точного ( $I'-3'$ ), так и приближенного ( $I''-3''$ ) решений уравнения (21):  $I, I', I''$  —  $n = 10$ ;  $2, 2', 2''$  —  $30$ ;  $3, 3', 3''$  —  $50$ .



формула (23) с удовлетворительной точностью позволяет найти  $\gamma_q$ .

Переходя к размерным переменным, запишем разницу между значениями  $E_{q,0}$  и  $E_q$

$$\frac{E_{q,0}}{E_q} = \left(1 + \frac{n-1}{3n}H\right)^{n/(n+1)}. \quad (24)$$

При этом различие в токах срыва будет определяться как

$$\frac{I_{q,0}^*}{I_q^*} = \frac{n}{n+1} \left(\frac{\gamma_q}{H} + \frac{\sqrt{\gamma_q}}{\text{th}\sqrt{\gamma_q}}\right) \left(1 + \frac{n-1}{3n}H\right)^{1/(n+1)}. \quad (25)$$

Данные выражения позволяют количественно оценить влияние пространственной неоднородности теплоэлектродинамических состояний, которую она оказывает на условия устойчивости вводимого тока. В частности, формулы (24) и (25) показывают, что для любого конечного значения  $\gamma$  всегда имеет место различие между граничными значениями напряженности электрического поля и тока, которые описываются нуль-мерным и одномерным приближениями, в силу отмеченных выше особенностей изменения температуры сверхпроводника в его поперечном сечении. Причем с увеличением  $\gamma$  оно возрастает. В целом, согласно результатам, представленным на рис. 4, при теоретическом анализе условий возникновения токовой неустойчивости в высокотемпературном сверхпроводнике необходимо учитывать следующие закономерности.

Во-первых, в силу рассмотренного теплового характера размерного эффекта его действие, как и следовало ожидать, не наблюдается при  $H \ll 1$ . Однако это грубая оценка. Согласно рис. 4, изменение  $H$  не будет сопровождаться заметным влиянием пространственной неоднородности теплоэлектродинамических состояний на условия их устойчивости, если  $H < 0.1$ . В этом случае напряженность электрического поля и ток срыва с хорошей степенью точности описываются соотношениями (10), согласно которым  $I_q$  практически линейно возрастает с увеличением критического тока сверхпроводника.

Во-вторых, одномерное приближение, корректно описывая условия устойчивости вводимого тока при интенсивных условиях охлаждения ( $H > 10$ ), позволяет найти предельное значение  $\gamma_{q,i}$  при  $H \rightarrow \infty$ , т.е. при идеальных условиях охлаждения. Согласно (21), оно является решением уравнения

$$\frac{2\sqrt{\gamma_{q,i}}}{\text{sh}2\sqrt{\gamma_{q,i}}} = \frac{n-1}{nm+1}.$$

В рамках нуль-мерной модели данное значение получить нельзя. Это объясняется тем, что при  $N > 10$  пространственно неоднородный характер процесса стабильного проникновения тока в сильной степени зависит от его термического сопротивления. При данных состояниях

нарастание предельно допустимых значений напряженности электрического поля и тока срыва с увеличением  $H$  приобретает существенно нелинейный характер. Согласно (25), в этом случае имеет место оценка

$$I_q^* \approx I_{q,0}^* \frac{n+1}{n} \frac{\text{th}\sqrt{\gamma_q}}{\sqrt{\gamma_q} \left(1 + \frac{n-1}{3n}H\right)^{1/(n+1)}}.$$

Из нее следует, что при интенсивном охлаждении сверхпроводника ток возникновения неустойчивости не будет возрастать пропорционально увеличению его толщины или критической плотности тока в отличие от пропорционального изменения с  $a$  и  $J_{c0}$  критического тока сверхпроводника. Другими словами, при интенсивном охлаждении сверхпроводника в силу теплового размерного эффекта будет иметь место деградация токонесущих свойств сверхпроводника, в результате которой увеличение  $a$  и  $J_{c0}$ , приводящее к увеличению критического тока сверхпроводника, не сопровождается соответствующим увеличением тока срыва.

## Выводы

Показано, что учет процессов распространения тепла в поперечном сечении высокотемпературного сверхпроводника приводит при теоретическом анализе происходящих в нем процессов к повышенным значениям напряженности электрического поля, индуцированного перед возникновением неустойчивости. Это связано с повышением его средней температуры, которое неизбежно при ее неравномерном распределении в режиме полного проникновения тока. Вследствие этого расчетный диапазон токов, стабильно вводимых в сверхпроводник, уменьшается.

Проведенный анализ позволил записать условия возникновения токовой неустойчивости с учетом неравномерного распределения температуры по сечению сверхпроводника и на их основе найти граничные значения допустимого повышения напряженности электрического поля и тока срыва, а также уточнить тепловой критерий, определяющий правомерность использования модели пространственно однородными теплоэлектродинамическими состояниями. Полученные результаты показывают, что неоднородное распределение температуры по сечению сверхпроводника зависит не только от его термического сопротивления, но и от его критических параметров, влияние которых будет возрастать с улучшением условий теплоотдачи. В результате при интенсивном охлаждении сверхпроводника условия возникновения токовой неустойчивости не будут улучшаться пропорционально увеличению площади его поперечного сечения или критической плотности тока, несмотря на соответствующее увеличение критического тока сверхпроводника. Это необходимо учитывать при определении условий устойчивой работоспособности токонесущих элементов, изготовленных на основе сверхпроводников с высокими значениями критической

плотности тока, интенсивно охлаждаемых хладагентом с рабочей температурой, близкой к критической температуре сверхпроводника.

Работа выполнена в рамках проекта № 07-08-00036-а Российского фонда фундаментальных исследований.

## Список литературы

- [1] Уилсон М. Сверхпроводящие магниты. М.: Мир, 1985. 407 с.
- [2] Polak M., Hasnik I., Krempasky L. // Cryogenics. 1973. Vol. 13. N 12. P. 702.
- [3] Лыков А.В. Теория теплопроводности. М.: Высш. шк., 1967. 600 с.
- [4] Лавров Н.А., Ожогина В.К., Романовский В.Р. // ЖТФ. 2008. Т. 78. Вып. 4. С. 76.
- [5] Романовский В.Р. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 5. С. 47.
- [6] Junod A., Wang K.O., Tsukamoto T. et al. // Physica C. 1994. Vol. 229. P. 209.
- [7] Herrmann P.F., Albrecht C., Bock J. et al. // IEEE Trans. Appl. Supercon. 1993. Vol. 3. N 1. P. 876.