01;05;08

Нелинейная стационарная акустическая волна в твердом теле с дислокациями

© В.И. Ерофеев, В.В. Кажаев

Нижегородский филиал института машиноведения им. А.А. Благонравова РАН,
603024 Нижний Новгород, Россия
e-mail: erf04@sinn.ru

(Поступило в Редакцию 23 сентября 2009 г.)

Показано, что в твердом теле с дислокациями может формироваться нелинейная стационарная акустическая волна. Такая волна является периодической и движется быстрее, чем акустические сигналы в линейной среде. Волна имеет пилообразную форму, длина волны увеличивается с ростом ее амплитуды.

Экспериментальное и теоретическое изучение закономерностей распространения упругих волн в твердом теле с дислокациями активно ведется с середины прошлого века. Результаты экспериментальных исследований свидетельствуют о том, что между характеристиками распространения упругих волн в материале и параметрами дислокационной микроструктуры существует взаимосвязь. Эта взаимосвязь делает возможным изучение дислокационной микроструктуры неразрушающим способом, что имеет практическую ценность, особенно заметную при изучении деформируемых или циклически нагружаемых материалов. В ходе таких нагрузок происходит значительное изменение механических свойств материала, объясняющееся эволюцией его микроструктуры, которая в свою очередь, непосредственно вызвана или контролируется изменениями, происходящими с конфигурацией дислокаций и увеличением их плотности. Следовательно, отслеживая при помощи упругих волн изменения, происходящие с дислокационной структурой, можно оценивать механические свойства материала, а также прогнозировать остаточный ресурс.

Теоретические модели — струнная модель Гранато–Люке [1] и модель Зегера [2], — широко применяющиеся для описания экспериментальных работ, были разработаны довольно давно и не учитывают изменений, происходящих с дислокационной структурой деформируемых или подвергающихся циклическому нагружению материалов. Упомянутые модели пренебрегают взаимодействием дислокаций с решеткой кристалла, а также взаимодействием дислокаций между собой. Для учета таких взаимодействий в [3] предложена следующая математическая модель:

$$\rho \frac{\partial^2}{\partial t^2} U_i = \frac{\partial}{\partial x_k} P_{ik},$$

$$A \frac{\partial^2}{\partial t^2} \xi_i + B \frac{\partial}{\partial t} \xi_i = f_i. \tag{1}$$

Здесь U — упругое смещение, ξ — дислокационное смещение, A — масса дислокации, B — сила трения на единицу длины дислокации, P_{ik} — тензор напряжений, ρ — плотность материала, f — сила, действующая на дислокацию. Записывая свободную энергию кристалла F в виде функции переменных деформаций U_{ij} и дислокационного смещения ξ_i в виде:

$$F = \frac{1}{2}\lambda_{ijkl}U_{ij}U_{kl} + \frac{1}{2}c_{ik}\xi_i\xi_k + \frac{1}{2}\beta'_{ijkl}(b_i\xi_j + b_j\xi_i)U_{kl} \tag{2}$$

(где λ_{ijkl} — модули упругости, c_{ik} — модули „жесткости“ дислокации, β'_{ijkl} — тензор акустодислокационного взаимодействия, b_j — вектор Бюргерса и используя равенства:

$$P_{ik} = \frac{\partial}{\partial U_{ik}} F, \quad f_i = -\frac{\partial}{\partial \xi_i} F, \tag{3}$$

можно с учетом выражения для свободной энергии кристалла F, вычислить правые части в уравнениях (1).

В рамках линейных уравнений (1) в [4,5] проанализировано влияние плотности дислокаций на дисперсию фазовой скорости волны, величину и характер затухания. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными по изучению характеристик распространения упругих волн в образцах с изменяющейся плотностью дислокаций (деформируемых и циклически нагружаемых образцах).

Начиная с некоторого порогового значения, амплитуды ультразвука и плотности дислокаций в материале амплитуда колебаний дислокаций достигает величины, соизмеримой с расстоянием между дислокационными линиями. При этом будет происходить активное взаимодействие дислокаций, которое приводит к необходимости учета нелинейности системы (1).

В [6,7] рассматривалось влияние дислокаций на параметры нелинейных квазигармонических волн, при этом в [6] учитывалась нелинейность дислокационной подсистемы, т. е. масса дислокации и сила трения на единицу длины дислокации рассматривались как суммы постоянных и пульсационных составляющих. При этом пульсационные составляющие считались пропорциональными квадрату дислокационного смещения ξ:

$$A = A_0\left(1 + A_1\xi^2\right), \qquad B = B_0\left(1 + B_1\xi^2\right). \tag{4}$$

Учет такой нелинейности позволил описать модуляционную неустойчивость или самомодуляцию — формирование из квазигармонической волны отдельных волновых пакетов. Если учесть нелинейность упругой подсистемы и рассматривать далее плоскую волну, распространяющуюся вдоль оси x в кубическом кристалле, однородном вдоль осей y и z, то из (1) и (3) получим следующие уравнения движения ($U_k = U$, $\xi_i = \xi$, $i, \ k = 1$):

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} U - c^2 \left(1 + \alpha \frac{\partial U}{\partial x}\right) \frac{\partial^2}{\partial x^2} U = \frac{\beta}{\rho} \frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$A \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} + B \frac{\partial \xi}{\partial t} = -\beta \frac{\partial U}{\partial x}, \tag{5}$$

где c — скорость, с которой распространялась бы продольная волна, если бы в материале не было дислокаций, а $\beta = \beta_{ijkl} \cdot \beta_j$ — коэффициент акустодислокационного взаимодействия, $\alpha = \frac{3\lambda+6\mu+\nu_1+6\nu_2+8\nu_3}{\lambda+\mu}$ — коэффициент, характеризующий нелинейность материала, λ, μ — константы Ламе второго порядка, ν_{1-3} — константы Ламе третьего порядка [8,9].

Система (5)сводится к одному уравнению относительно упругого смещения:

$$\frac{\partial^4 U}{\partial t^4} - c^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{B}{A}\left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - c^2 \frac{\partial^3 U}{\partial x^2 \partial t}\right) + \frac{\beta^2}{A\rho} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$$

$$= \frac{c^2 \alpha}{2} \frac{\partial^3}{\partial x \partial t^2}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \frac{c^2 \alpha}{2} \frac{B}{A} \frac{\partial^2}{\partial x \partial t}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2. \tag{6}$$

Если влияние диссипации на эволюцию волновых процессов в (6) мало $\frac{B}{A} \to 0$, то в результате конкуренции дисперсионных и нелинейных факторов в системе могут сформироваться стационарные волны.

Решение уравнения (6) будем искать в виде: $U(x, t) = U(\eta)$, где $\eta = x - Vt$, V — скорость стационарной волны (заранее не известна). Волна смещения в этом случае описывается обыкновенным дифференциальным уравнением:

$$\frac{d^2 U}{d\eta^2} + \frac{\beta^2 U}{A\rho V^4 \left[1 - \frac{c^2}{V^2}\left(1 + \alpha \frac{dU}{d\eta}\right)\right]} = 0. \tag{7}$$

Если $V > c$, т. е. если нелинейная волна распространяется быстрее, чем линейная, то заместитель во втором слагаемом этого уравнения можно разложить в ряд Тейлора, и (7) преобразуется к виду:

$$\frac{d^2 U}{d\eta^2} + m_1 U + m_2 \frac{d(U^2)}{d\eta} = 0, \tag{8}$$

где $m_1 = \frac{\beta^2 (1 + \frac{c}{V^2})}{A\rho V^4}$, $m_2 = \frac{\beta^2 c^2 \alpha}{2A\rho V^6}$.

Первая из констант всегда положительна ($m_1 > 0$). Знак второй константы определяется знаком коэффициента нелинейности α. Для большинства металлов и их сплавов $\alpha < 0$ ($m_2 < 0$) [8], для некоторых композитов $\alpha > 0$ ($m_2 > 0$).

Анализ уравнения (8) на фазовой плоскости $\left(U, \frac{dU}{d\eta}\right)$ показывает, что в начале координат имеется особая точка типа „центр“. Прямая $\left(\frac{dU}{d\eta} = \varepsilon^*\right)$ определяет устойчивые движения (замкнутые фазовые траектории). Эта величина характеризует максимальную осевую деформа-

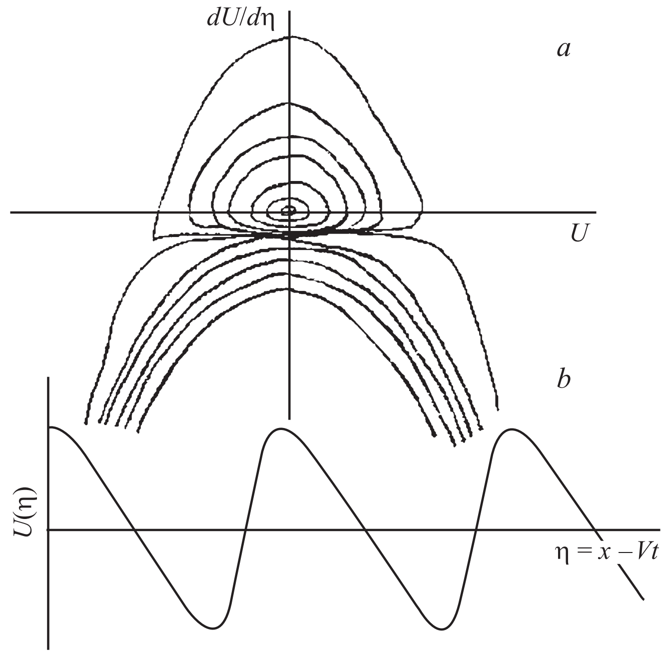

Рис. 1. Фазовый портрет (a) и профиль стационарной волны (b) при $\alpha < 0$ (металлы, сплавы).

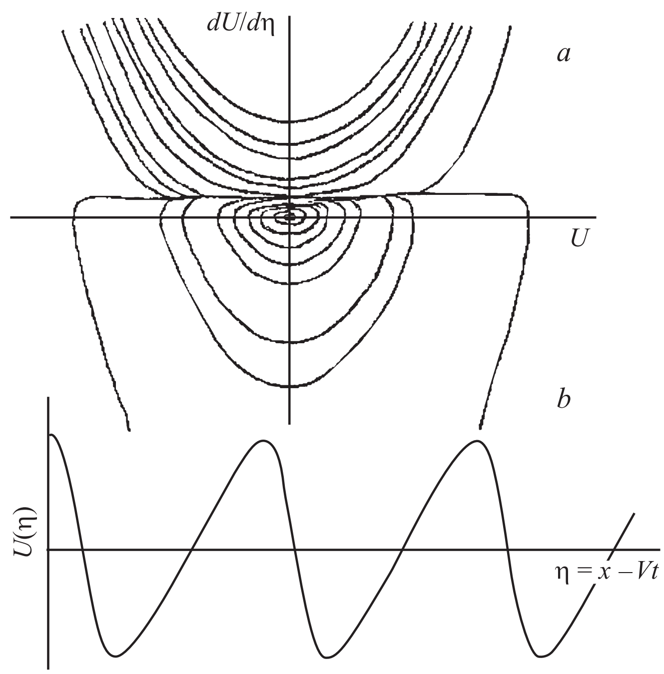

Рис. 2. Фазовый портрет (a) и профиль стационарной волны (b) при $\alpha > 0$ (композиты).

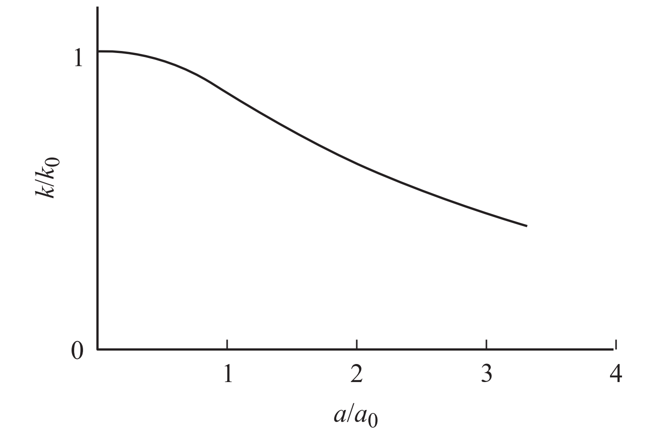

Рис. 3. Зависимость волнового числа стационарной волны от ее амплитуды.

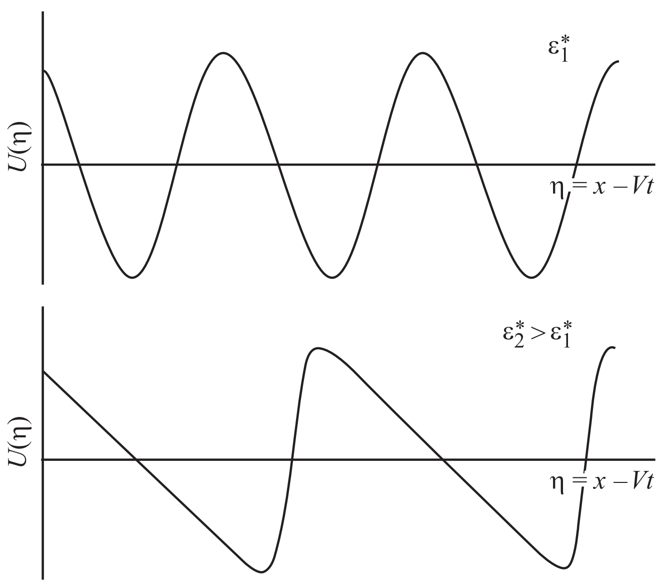

Рис. 4. Профили нелинейной волны при фиксированной амплитуде и различных значениях деформации.

цию, вызываемую распространением упругой волны:

$$\varepsilon^* = \frac{m_1}{2m_2} = \frac{1}{\alpha}\left(\frac{v^2}{c^2} + 1\right). \tag{9}$$

По модулю деформация растет с увеличением относительного значения скорости нелинейной стационарной волны, т.е. $|\varepsilon^*| \sim (V/c)^2$, и уменьшается с увеличением α: $|\varepsilon^*| \sim 1/|\alpha|$.

На рис. 1 показан фазовый портрет уравнения (7) при $\alpha < 0$ (металлы, сплавы) (a) и профиль стационарной волны при деформациях, близких к ε^* (b). Аналогичные построения, выполненные для случая $\alpha > 0$ (композиты), показаны на рис. 2.

Фазовый портрет позволяет оценить зависимость волнового числа нелинейной волны (k) от ее амплитуды (a):

$$\frac{k}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{a/a_0}{\pi\ \varepsilon^*}\right)^2}},$$

где $k_0 a_0$ — волновое число и амплитуда гармонической (линейной) волны.

С ростом амплитуды волны относительное значение волнового числа уменьшается (длина волны растет) (рис. 3). При $\frac{a}{a_0} \to \infty$, $\frac{k}{K_0} \to \frac{\varepsilon^*}{a/a_0}$. Профили нелинейной волны при фиксированной амплитуде ($a/a_0 = \mathrm{const}$) и различных значениях деформации (ε^*) приведены на рис. 4.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 09-08-00827, 08-08-97058-р_поволжье).

Список литературы

[1] *Granato A., Lucke K* // J. Appl. Phys. 1956. Vol. 27. № 6. P. 583–593.
[2] *Труэлл Р., Эльбаум Ч., Чик Б.* Ультразвуковые методы в физике твердого тела. М.: Мир, 1972. 308 с.
[3] *Бурлак Г.Н., Островский И.В.* // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 18. С. 69–74.
[4] *Ерофеев В.И., Ромашов В.П.* // Письма в ЖТФ. 2002. Т. 28. Вып. 6. С. 6–11.
[5] *Ерофеев В.И., Ромашов В.П* // Дефектоскопия. 2004. № 1. С. 59–64.
[6] *Ерофеев В.И.* // Письма в ЖТФ. 2008. Т. 34. Вып. 4. С. 32–36.
[7] *Шекоян А.В.* // Письма в ЖТФ. 2009. Т. 35. Вып. 7. С. 93–97.
[8] *Зарембо Л.К., Красильников В.А.* // УФН. 1970. Т. 102. № 4. С. 549–586.
[9] *Лурье А.И.* Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.