

01;03

Об отсутствии зарядовой симметрии электростатического взаимодействия заряженных капель или твердых частиц

© А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 10 сентября 2009 г.)

Показано, что аналитические выражения для энергии и силы электростатического взаимодействия заряженных электропроводных частиц (капель), точечного заряда и частицы с конечными размерами, частицы (капли или точечного заряда) и электропроводной плоскости не обладают симметрией по отношению к смене знака одного из зарядов. Причиной отсутствия симметрии является то обстоятельство, что поляризационное взаимодействие всегда имеет характер притяжения независимо от знаков взаимодействующих частиц. Следствием отсутствия обсуждаемой симметрии будет самостягивание заряженных аэродисперсных систем с конденсированной фазой, например, плазменных или жидкокапельных.

Введение

Задача исследования электростатического взаимодействия двух близко расположенных заряженных электропроводных шаров (пылинок, капель и градин в грозовом облаке) представляет интерес как в связи с проблемой расчета констант коагуляции в заряженных аэродисперсных системах естественного и искусственного происхождения, так и в связи с расчетами закономерностей распада капель, неустойчивых по отношению к собственному и поляризационному поверхностному заряду [1–4], и выяснением физического механизма заряжения градины, падающей сквозь облако заряженных капелек [1,2,5–7]. Общие закономерности электростатического взаимодействия заряженных электропроводных шаров с учетом феномена поляризации ранее неоднократно исследовались (см., например, [8–11]). В указанных работах было показано, что при некоторых соотношениях между размерами, зарядами одноименно заряженных частиц и расстояниями между ними они не отталкиваются, а притягиваются, и наоборот, разноименные частицы отталкиваются, а не притягиваются. Тем не менее некоторые особенности электростатического взаимодействия с учетом феномена поляризации исследованы недостаточно полно. В частности, аналитические выражения для энергии и силы электростатического взаимодействия близко расположенных заряженных сферических частиц оказываются не симметричными по отношению к смене знака заряда одной из частиц, но это обстоятельство не было проанализировано кем-либо. Этот феномен представляется неожиданным, поскольку из опыта использования закона Кулона для взаимодействия точечных зарядов (в ситуации, когда расстояние между шарами много больше суммы их радиусов, шары также можно моделировать точечными зарядами) интуитивно ожидается проявление симметрии: смена знака одного из зарядов должна приводить к изменению направления действия силы. В рассматриваемой ситуации проявля-

ется асимметрия, особенно заметная, когда расстояние между шарами сравнимо с суммой их радиусов. Анализ этой проблемы и посвящена настоящая работа.

Формулировка проблемы

Пусть имеются два проводящих шара с радиусами R_1 , R_2 и зарядами q_1 , q_2 , расположенных на расстоянии l между их центрами. В результате действия электрической индукции заряд первого шара создает во втором электростатическое изображение Q_{11} , которое, в свою очередь, становится источником изображения q_{12} в первом шаре и т.д. Таким образом, электрическое поле в произвольной точке между шарами на оси, соединяющей их центры, создается бесконечным числом зарядов изображений, формирующихся в обоих шарах [12]. Интересующие нас потенциальную энергию взаимодействия шаров и силу их взаимодействия можно выписать в виде [8,9,12]:

$$W = \frac{1 + \gamma}{2} \left(\frac{q_2^2 c_{11} - 2q_1 q_2 c_{12} + q_1^2 c_{22}}{c_{11} c_{22} - c_{12}^2} \right); \quad (1)$$

$$F = -\frac{\partial W}{\partial l} = -\frac{1 + \gamma}{2} \left\{ \frac{(q_2^2 u_{11} - 2q_1 q_2 u_{12} + q_1^2 u_{22})}{(c_{11} c_{22} - c_{12}^2)} - \frac{(q_2^2 c_{11} - 2q_1 q_2 c_{12} + q_1^2 c_{22})(u_{11} c_{22} + u_{22} c_{11} - 2u_{12} c_{12})}{(c_{11} c_{22} - c_{12}^2)^2} \right\}; \quad (2)$$

$$\cosh(\beta) = \frac{r^2(1 + \gamma)^2 - (1 + \gamma^2)}{2\gamma};$$

$$r = \frac{l}{R_1 + R_2}; \quad \gamma = \frac{R_2}{R_1}.$$

Здесь c_{ij} и u_{ij} — емкостные коэффициенты и их производные по r :

$$\frac{c_{11}}{R_1 + R_2} \equiv \gamma \sinh(\beta) \sum_{n=1}^{\infty} [\gamma \sinh(n\beta) + \sinh((n-1)\beta)]^{-1};$$

$$\frac{c_{12}}{R_1 + R_2} \equiv -\gamma \frac{\sinh(\beta)}{(1+\gamma)r} \sum_{n=1}^{\infty} [\sinh(n\beta)]^{-1};$$

$$\frac{c_{22}}{R_1 + R_2} \equiv \gamma \sinh(\beta) \sum_{n=1}^{\infty} [\sinh(n\beta) + \gamma \sinh((n-1)\beta)]^{-1};$$

$$u_{11} \equiv \gamma \beta'(r) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Omega_n [(\sinh[(n-1)\beta] + \gamma \sinh[n\beta]) \cosh[\beta] - ((n-1) \cosh[(n-1)\beta] + \gamma n \cosh[n\beta]) \sinh[\beta]] \right\};$$

$$\Omega_n \equiv (\sinh[(n-1)\beta] + \gamma \sinh[n\beta])^{-2};$$

$$u_{12} \equiv \frac{\gamma}{r^2(1+\gamma)}$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sinh[\beta] - r(\cosh[\beta] - n \coth[n\beta] \sinh[\beta]) \beta'(r)}{\sinh[n\beta]} \right\};$$

$$u_{22} \equiv \gamma \beta'(r) \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \Lambda_n [(\gamma \sinh[(n-1)\beta] + \sinh[n\beta]) \cosh[\beta] - (\gamma(n-1) \cosh[(n-1)\beta] + n \cosh[n\beta]) \sinh[\beta]] \right\};$$

$$\Lambda_n \equiv (\gamma \sinh[(n-1)\beta] + \sinh[n\beta])^{-2};$$

$$\beta'(r) = \frac{r(1+\gamma)^2}{\gamma \sinh(\beta)}.$$

Из выражений (1) для энергии и (2) для силы электростатического взаимодействия шаров видно, что они не обладают симметрией по отношению к смене знака одного из зарядов, поскольку в (1), (2) имеются как слагаемые, пропорциональные квадратам зарядов q_1^2 и q_2^2 , не меняющие своего знака при инверсии, так и слагаемые $\sim q_1 q_2$, изменяющие свой знак. Несложно видеть, что выражения (1) и (2) становятся симметричными по отношению к смене знака одного из зарядов при больших расстояниях между шарами. В самом деле, при $r \rightarrow \infty$ в (1) и (2) исчезают слагаемые $\sim q_1^2$ и q_2^2 , описывающие поляризационное взаимодействие, но сохраняются слагаемые $\sim q_1 q_2$. Таким образом, причиной наблюдаемого отсутствия симметрии является поляризационное взаимодействие, поскольку сила взаимодействия заряда со своим изображением в другом шаре всегда является силой притяжения.

Сказанное можно проиллюстрировать конкретной оценкой. Пусть расстояние между шарами неограниченно растет: $r \rightarrow \infty$, при этом

$$\cosh(\beta) = \frac{r^2(1+\gamma)^2 - (1+\gamma^2)}{2\gamma} \Rightarrow \frac{(1+\gamma)^2}{2\gamma} r^2 \rightarrow \infty;$$

$$\sinh(\beta) \equiv \sqrt{\left(\frac{r^2(1+\gamma)^2 - (1+\gamma^2)}{2\gamma} \right)^2 - 1} \\ \sim \frac{(1+\gamma)^2}{2\gamma} r^2 \rightarrow \infty;$$

$$\coth(\beta) \rightarrow 1; \quad \sinh(n\beta) \sim r^{2n} \rightarrow \infty;$$

$$\cosh(n\beta) \sim r^{2n} \rightarrow \infty;$$

$$\beta'(r) = \frac{r(1+\gamma)^2}{\gamma \sinh(\beta)} \equiv \frac{2}{r} \rightarrow 0;$$

$$\frac{c_{11}}{R_1 + R_2} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma \sinh(\beta)}{\gamma \sinh(n\beta) + \sinh((n-1)\beta)} \\ \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\beta)}{\sinh(n\beta)} \rightarrow 1;$$

$$\frac{c_{22}}{R_1 + R_2} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma \sinh(\beta)}{\sinh(n\beta) + \gamma \sinh((n-1)\beta)} \\ \sim \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\beta)}{\sinh(n\beta)} \rightarrow \gamma;$$

$$\frac{c_{12}}{R_1 + R_2} \equiv -\frac{\gamma}{(1+\gamma)r} \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\beta)}{\sinh(n\beta)} \rightarrow -\frac{\gamma}{(1+\gamma)r} \rightarrow 0;$$

$$u_{11} \sim \frac{r(1+\gamma)^2}{\gamma} \coth[\beta] \\ \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1-n}{\sinh[n\beta]} \right\} \rightarrow -\frac{2\gamma}{(1+\gamma)^2} \frac{1}{r^3} \rightarrow 0;$$

$$u_{22} \sim r(1+\gamma)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\coth[\beta]}{\sinh[n\beta]} - \frac{n \coth[n\beta]}{\sinh[n\beta]} \right\} \rightarrow -\frac{2\gamma^2}{(1+\gamma)^2 r^3} \rightarrow 0;$$

$$u_{12} \sim \frac{\gamma}{r^2(1+\gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\beta)}{\sinh(n\beta)} \\ - \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{[\coth(\beta) - n \coth(n\beta)]}{\sinh(n\beta)} \right\} \sim \frac{\gamma}{(1+\gamma)} \frac{1}{r^2} \rightarrow 0.$$

Подставим выписанные асимптотические выражения в соотношения (1), (2) и получим выражения для энергии и силы взаимодействия заряженных электропроводных шаров при больших расстояниях r между шарами:

$$W = \frac{1+\gamma}{2(R_1 + R_2)} \\ \times \frac{q_2^2 + \frac{2q_1 q_2 \gamma}{(1+\gamma)r} + q_1^2 \gamma}{\left(\gamma - \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2 r^2} \right)} \rightarrow \left[\frac{q_2^2}{2R_2} + \frac{2q_1 q_2}{2l} + \frac{q_1^2}{2R_1} \right]; \quad (3)$$

$$F = -\frac{(1+\gamma)}{2(R_1+R_2)^2} \left\{ \frac{\left(-\frac{2\gamma}{(1+\gamma)^2} \frac{q_2^2}{r^3} - \frac{2\gamma}{(1+\gamma)} \frac{q_1 q_2}{r^2} - \frac{2\gamma^2}{(1+\gamma)^2} \frac{q_1^2}{r^3}\right)}{\left(\gamma - \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2 r^2}\right)} - \frac{\left(q_2^2 + \frac{2\gamma}{(1+\gamma)} \frac{q_1 q_2}{r} + q_1^2 \gamma\right) \left(-\frac{2\gamma^2}{(1+\gamma)^2} \frac{1}{r^3} - \frac{2\gamma^2}{(1+\gamma)^2 r^3} + \frac{2\gamma^2}{(1+\gamma)^2} \frac{1}{r^3}\right)}{\left(\gamma - \frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2 r^2}\right)^2} \right\}$$

$$\sim \frac{1}{(R_1+R_2)^2} \left\{ \left(\frac{q_2^2}{(1+\gamma)r^3} + \frac{q_1 q_2}{r^2} + \frac{\gamma q_1^2}{(1+\gamma)r^3}\right) - (q_2^2 + q_1^2 \gamma) \frac{1}{(1+\gamma)r^3} \right\} \equiv \frac{q_1 q_2}{(R_1+R_2)^2 r^2} \equiv \frac{q_1 q_2}{l^2}.$$

В (3) первое и последнее слагаемые определяют собственную электростатическую энергию заряженных шаров.

Переход к асимптотике взаимодействия точечного заряда с заряженным шаром конечного радиуса

Полученный выше результат можно проверить, переходя к асимптотике одного точечного заряда: т.е. рассматривая взаимодействие точечного заряда q_2 с заряженным проводящим шаром радиуса R_1 с зарядом q_1 . Такая асимптотика позволяет уйти от бесконечных рядов (1) и (2) к простым аналитическим выражениям, получаемым в методе электростатических изображений для ситуации взаимодействия точечного заряда с шаром конечных размеров [12].

В соответствии с формулировкой задачи при замене шара с радиусом R_2 и зарядом q_2 на точечный заряд q_2 отношение радиусов $\gamma \equiv (R_2/R_1) \rightarrow 0$ (или $R_2 \rightarrow 0$). При $r = \text{const}$, $\gamma \rightarrow 0$ получим

$$\cosh(\beta) = \frac{r^2(1+\gamma)^2 - (1+\gamma^2)}{2\gamma} \Rightarrow \frac{(r^2-1)}{2\gamma} \rightarrow \infty;$$

$$\cosh(\beta) \sim \frac{r^2-1}{2\gamma} \rightarrow \infty;$$

$$\sinh(\beta) \sim \frac{(r^2-1)}{2\gamma} \rightarrow \infty; \quad \coth(\beta) \rightarrow 1;$$

$$\sinh(n\beta) \sim (2\gamma)^{-n} \rightarrow \infty; \quad \cosh(n\beta) \sim (2\gamma)^{-n} \rightarrow \infty;$$

$$\beta'(r) = \frac{r(1+\gamma)^2}{\gamma \sinh(\beta)} \rightarrow \frac{2r}{(r^2-1)};$$

$$c_{12} \equiv -\frac{\gamma}{(1+\gamma)r} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\beta)}{\sinh(n\beta)}$$

$$\sim -\frac{\gamma}{r} \{1 + O(\gamma)\} \sim -\frac{\gamma}{r} \rightarrow 0;$$

$$c_{11} \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma \sinh(\beta)}{\gamma \sinh(n\beta) + \sinh((n-1)\beta)} \rightarrow 1;$$

$$c_{22} \equiv \gamma \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\beta)}{\sinh(n\beta) + \gamma \sinh((n-1)\beta)} \sim \gamma \rightarrow 0;$$

$$u_{12} \equiv \frac{\gamma}{r^2(1+\gamma)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\beta)}{\sinh(n\beta)} - \frac{2\gamma(1+\gamma)}{(r^2-1)} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\cosh(\beta) - n \coth(n\beta) \sinh(\beta))}{\sinh(n\beta)} \right\} \sim \frac{\gamma}{r^2(1+\gamma)} \rightarrow 0;$$

$$u_{11} \equiv \Rightarrow \frac{r(1+\gamma)^2}{\gamma} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\coth[\beta]}{\sinh[n\beta]} - \frac{n \coth[\beta]}{\sinh[n\beta]} \right\} \sim \frac{2\gamma r}{(r^2-1)^2} \rightarrow 0;$$

$$u_{22} \equiv r(1+\gamma)^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\coth[\beta]}{\sinh[n\beta]} - \frac{n \coth[\beta]}{\sinh[n\beta]} \right\} \sim -\frac{2r\gamma^2}{(r^2-1)^2} \rightarrow 0.$$

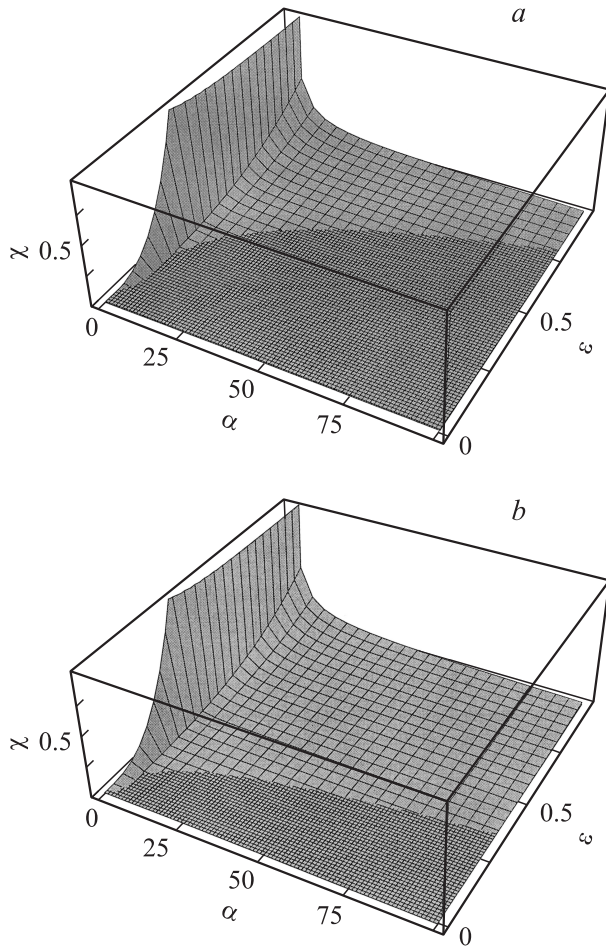
Подставим полученные выражения в (1), (2) и, отбрасывая слагаемое, соответствующее собственной электростатической энергии точечного заряда, получим соотношения, получающиеся в расчетах электростатического взаимодействия точечного заряда и электропроводного шара методом изображений [12,13]:

$$W = \frac{1+\gamma}{2R_1} \left(\frac{2q_1 q_2 \frac{r}{l} + q_1^2 \gamma}{\gamma - \frac{\gamma^2}{r^2}} \right) \rightarrow \frac{q_1 q_2}{l} + \frac{q_1^2}{2R_1};$$

$$F = \frac{1}{R_1^2} \left\{ \frac{q_1 q_2}{r^2} - \frac{r q_2^2}{(r^2-1)^2} + \frac{q_2^2}{r^3} \right\} \equiv \left\{ \frac{q_1 q_2}{l^2} - \frac{l R_1 q_2^2}{(l^2 - R_1^2)^2} + \frac{q_2^2 R_1}{l^3} \right\}. \quad (4)$$

Несложно видеть, что эти выражения не обладают симметрией по отношению к смене знака одного из зарядов и это отсутствие симметрии обусловлено слагаемыми, $\sim q^2$, описывающими взаимодействие точечного заряда с зарядом на шаре, появившимся вследствие поляризации. При больших расстояниях между шаром и точечным зарядом ($r \rightarrow \infty$) значение поляризационного заряда убывает (стремятся к нулю), и сила электростатического взаимодействия шара и точечного заряда, согласно (4), определится последним слагаемым, убывающим с увеличением расстояния медленнее ($\sim r^{-2}$), чем остальные два, т.е. приходим к закону Кулона.

Сравним в (4) первое слагаемое, соответствующее кулоновскому взаимодействию, с суммой остальных, описывающих поляризационное взаимодействие. Для этого построим график зависимости χ — отношения поляризационной компоненты полной силы электростатического взаимодействия к ее кулоновской компоненте



Зависимость отношения поляризационной компоненты полной силы электростатического взаимодействия заряженного шара и точечного заряда к ее кулоновской компоненте χ от отношения зарядов α и отношения радиуса шара к расстоянию между центром шара и точечным зарядом ε , пересеченная плоскостью: $a - \chi = 0.01$; $b - 0.001$.

от отношения зарядов α и отношения радиуса шара к расстоянию между центром шара и точечным зарядом ε :

$$\chi \equiv \frac{-\frac{1R_1q_2^2}{(l^2-R_1^2)^2} + \frac{q_2^2R_1}{l^3}}{\frac{q_1q_2}{l^2}} \approx \frac{2q_2R_1^3}{q_1l^3} \equiv \frac{2\varepsilon^3}{\alpha};$$

$$\alpha \equiv \frac{q_1}{q_2}; \quad \varepsilon \equiv \frac{R_1}{l}.$$

Линия пересечения поверхностей $\chi = \chi(\alpha, \varepsilon)$ и $\chi = 0.01$ (см. рисунок) обозначает ту границу, за которой величина отношения поляризационной компоненты полной силы к ее кулоновской компоненте становится меньше одного процента. В зависимости от необходимой точности расчетов расстояние в окрестности шара, на котором необходимо учитывать поляризационную компоненту общей силы, увеличивается, как это можно видеть из сравнения рисунка, a и b .

Из рисунка видно, что в достаточно широком диапазоне значений α и ε поляризационное взаимодействие

заметно искажает симметрию закона Кулона. Интересно, что для большой величины точечного заряда (для малых α) расстояние, на котором поляризационная компонента существенна, может на порядок превышать радиус шара. Такая ситуация может реализоваться в грозовом облаке на начальной стадии заряжения градины при ее столкновении с мелкими капельками [5–7].

Взаимодействие заряженного шара (точечного заряда) и электропроводной плоскости

Согласно [8,12], выражения для энергии и силы электростатического взаимодействия электропроводного шара радиуса R , имеющего заряд q , и бесконечной электропроводной плоскостью описываются выражениями (1), (2) при

$$c_{11} = -c_{12} \equiv R \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sinh(\beta)}{\sinh(n\beta)}; \quad c_{22} \rightarrow \infty; \quad \cosh(\beta) = \frac{l}{R}$$

и имеют вид:

$$W = \frac{q^2}{2c_{11}} \sim \frac{q^2}{2R} \left(1 - \frac{R}{l}\right) \equiv \frac{q^2}{2R} - \frac{q^2}{2l}; \quad (5)$$

$$F = -\frac{dW}{dl} \equiv \frac{q^2 u_{11}}{2Rc_{11}^2 \sinh(\beta)} \sim -\frac{q^2}{4l^2} + \frac{q^2 R}{2l^3}; \quad (6)$$

$$u_{11} = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(\cosh[\beta] - n \coth[n\beta] \sinh[\beta])}{\sinh[n\beta]} \right\}.$$

Из (5), (6) несложно видеть, что в рассматриваемой ситуации и энергия, и сила чисто поляризационного взаимодействия при изменении знака заряда на шаре не изменяются и взаимодействие носит характер притяжения.

В (5) первое слагаемое определяет энергию собственного заряда шара, а второе — энергию поляризационного взаимодействия шара с плоскостью. Для перехода к ситуации взаимодействия точечного заряда с плоскостью ($R \rightarrow 0$) первое слагаемое в (5) должно быть опущено.

Заключение

Для электростатического взаимодействия заряженных тел характерным является отсутствие симметрии по отношению к смене знака одного из зарядов, поскольку силы поляризационного взаимодействия независимо от знаков взаимодействующих зарядов имеет характер притяжения. Следствием обсуждаемого отсутствия зарядовой симметрии будет самостягивание заряженных жидкокапельных и твердофазных аэродисперсных образований, в том числе плазменных [14]. Данный феномен может иметь отношение к проблеме формирования долгоживущих светящихся образований и шаровой молнии [14–16].

Причиной отмеченного отсутствия зарядовой симметрии, по-видимому, является нарушение закона парности взаимодействий в феномене поляризации, который, по сути, является коллективным эффектом. Рассмотрение взаимодействия точечного заряда с проводящим телом (шаром, плоскостью) сводится к взаимодействию точечного заряда с распределенным по границе тела поляризационным зарядом посредством поля, созданного и самим точечным зарядом, и множеством элементарных зарядов, составляющих поляризационный заряд.

Следует отметить, что хотя все рассмотрение проводилось для шаров, делалось это лишь для упрощения получающихся аналитических выражений, основные выводы останутся справедливыми для электростатического взаимодействия капель и твердых частиц произвольной формы.

Работа выполнена в рамках тематического плана университета, при поддержке грантов: Рособразования № 2.1.1/3776, РФФИ № 09-01-00084 и № 09-08-00148.

Список литературы

- [1] Мучник И.М., Фишман Б.Е. Электризация грубодисперсных аэрозолей в атмосфере. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 208 с.
- [2] Ширяева С.О., Григорьев А.И. Заряженная капля в грозовом облаке. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2008. 535 с.
- [3] Григорьев А.И., Ширяева С.О. // ЖТФ. 1991. Т. 61. Вып. 3. С. 19–28.
- [4] Жаров А.Н., Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 12. С. 26–30.
- [5] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 31–36.
- [6] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 40–47.
- [7] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 11. С. 10–19.
- [8] Саранин В.А. // ЖТФ. 1999. Т. 69. Вып. 12. С. 12–17.
- [9] Саранин В.А. // УФН. 1999. Т. 169. № 4. С. 453–458.
- [10] Щерба Е.А., Григорьев А.И., Коромыслов В.А. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 1. С. 15–19.
- [11] Коромыслов В.А., Щерба Е.А., Григорьев А.И. // ЭОМ. 2003. № 1. С. 35–38.
- [12] Смайт В. Электростатика и электродинамика. М.: ИЛ, 1954. 604 с.
- [13] Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982. 620 с.
- [14] Стаханов И.П. Физическая природа шаровой молнии. М.: Атомиздат, 1979. 242 с.
- [15] Григорьев А.И. Шаровая молния. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2006. 220 с.
- [16] Волновая электрогидродинамика проводящей жидкости. Доживущие плазменные образования и малоизученные формы естественных электрических разрядов в атмосфере. Сб. докл. VIII Междунар. конф. Ярославль: Изд-во ЯрГУ им. П.Г. Демидова, 2009. 192 с.