

01;03

О возможности зажигания коронного разряда у гребней нелинейных волн на поверхности заряженного тонкого слоя вязкой электропроводной жидкости

© А.В. Климов, А.И. Григорьев

Ярославский государственный университет им. П.Г. Демидова,
150000 Ярославль, Россия
e-mail: grig@uniyar.ac.ru

(Поступило в Редакцию 27 октября 2009 г.)

В асимптотических расчетах второго порядка малости по амплитуде периодической бегущей капиллярно-гравитационной волны на однородно заряженной поверхности вязкой несжимаемой жидкости малой глубины найдено аналитическое выражение для напряженности электростатического поля у ее свободной поверхности. Показано, что коронный разряд у гребней волн может зажигаться при докритических в смысле возможности реализации неустойчивости Тонкса—Френкеля значениях напряженности поля. Напряженность электростатического поля у гребней нелинейных волн увеличивается с ростом волнового числа и амплитуды волны.

Введение

В связи с проблемами жидкометаллической литографии и эпитаксии, реализуемых с помощью высокоинтенсивных пучков ионов, а также в связи с разработкой различных способов создания на поверхности полупроводников и металлов упорядоченной пространственно периодической структуры волнового типа с характерной длиной волны $\sim 0.1-1 \mu$ под действием интенсивных электромагнитных (лазерных) и ионных пучков [1–3], встает вопрос о расчете напряженности электрического поля у свободной поверхности весьма тонкого слоя вязкой жидкости. Такая же проблема возникает и в теории атмосферного электричества при истолковании феномена огней Святого Эльма, которые связываются с неустойчивостью во внешнем электрическом поле тонкой пленки воды на поверхности предмета, возле которого появляется свечение [4–6].

В настоящей работе приводится расчет напряженности электрического поля у гребней волн конечной амплитуды на свободной поверхности тонкого слоя вязкой жидкости по методике, ранее использованной в [7–9].

1. Формулировка задачи

Пусть имеется слой вязкой несжимаемой жидкости толщиной d с плотностью ρ , кинематической вязкостью ν , коэффициентом поверхностного натяжения γ . Плоский слой жидкости, безграничный по площади, задан геометрическим местом точек $-d \leq z \leq 0$ в декартовой трехмерной системе координат, плоскость $z = 0$ которой совпадает с равновесной плоской свободной поверхностью жидкости. Жидкость находится в поле силы тяжести $\mathbf{g} \parallel -\mathbf{e}_z$ (\mathbf{e}_z — орт оси Oz) и снизу ограничена твердым дном: $z = -d$, на котором выполняется условие прилипания вязкой жидкости. Над свободной поверхностью жидкости находится вакуум. Жидкость идеально

электропроводная находится в однородном электрическом поле напряженностью $\mathbf{E}_0 \parallel \mathbf{g}$. В начальный момент времени $t = 0$ находящаяся в состоянии покоя свободная поверхность жидкости $z = 0$ претерпевает возмущение малой амплитуды a в виде периодической, синусоидальной в линейном приближении по a , плоской волны, бегущей в положительном направлении оси Ox . Бегущая волна полагается однородной по координате y .

Уравнение свободной поверхности жидкости запишем в виде:

$$z = \xi(x, t) = A(t) \cos(\text{Im} St - kx) + o(A(t)); \quad A(0) = a;$$

$k = 2\pi/\lambda$ — волновое число; λ — длина волны; S — комплексная частота.

Движение жидкости в слое, связанное с волной, будем считать не зависящим от координаты y . Зададимся целью расчета напряженности электрического поля у свободной поверхности жидкости, искаженной волновым движением конечной амплитуды.

Математическая формулировка задачи будет иметь вид

$$-d \leq z \leq \xi :$$

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} - \mathbf{U}(\nabla \times \mathbf{U}) = -\nabla \left(\frac{1}{\rho} p + \frac{1}{2} \mathbf{U}^2 + gz \right) + \nu \Delta \mathbf{U};$$

$$\text{div } \mathbf{U} = 0;$$

$$z \geq \xi : \quad \Delta \Phi = 0;$$

$$z = \xi : \quad \frac{\partial \xi}{\partial t} + U_x \frac{\partial \xi}{\partial x} = U_z;$$

$$p - 2\rho\nu \mathbf{n}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \frac{(\nabla \Phi)^2}{8\pi} = -\gamma \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \left(1 + \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 \right)^{-3/2};$$

$$\boldsymbol{\tau}(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{U} + \mathbf{n}(\boldsymbol{\tau} \cdot \nabla) \mathbf{U} = 0; \quad \Phi = 0;$$

$$z = -d : \quad U_x = 0; \quad U_z = 0;$$

$$z \rightarrow \infty: \quad \nabla \Phi = -E_0 \mathbf{e}_z,$$

где $\mathbf{U}(\mathbf{r}, t) = (U_x, 0, U_z)$ — поле скоростей; $p(\mathbf{r}, t)$ — гидродинамическое давление внутри жидкости; $\Phi(\mathbf{r}, t)$ — потенциал электрического поля; \mathbf{n} и $\boldsymbol{\tau}$ — единичные векторы нормали и касательной к свободной поверхности жидкости.

2. Решение задачи

Решение приведенной задачи во втором порядке малости по амплитуде волны было найдено в [10]. В частности, выражение для потенциала электростатического поля с учетом слагаемых второго порядка малости по амплитуде волн a имеет вид:

$$\Phi(x, z, t) = \Phi_0(x, z, t) + \varepsilon \Phi_1(x, z, t) + \varepsilon^2 \Phi_2(x, z, t) + O(\varepsilon^3);$$

$$\varepsilon = \frac{a}{\alpha}; \quad \alpha = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho g}};$$

$$\Phi_0(x, z, t) = -E_0 z;$$

$$\Phi_1(x, z, t) = \alpha E_0 \exp(\text{Re } S t - k z) \cos(\text{Im } S t - k x);$$

$$\Phi_2(x, z, t) = \alpha^2 a_0 \exp((S + \bar{S})t)$$

$$+ \alpha^2 (a_1 \exp(2St - 2ikx - 2kz) + c.c.);$$

$$a_0 = \frac{E_0 k}{2}; \quad a_1 = E_0 Z_1 + \frac{E_0 k}{4};$$

$$\begin{aligned} Z_1 = & \frac{\nu}{2\Delta_{Z_1}} \left(16k^2 \nu \rho w_1 (4k^2 + w_1^2) R_{11} + 2ik \nu \rho w_1 \right. \\ & \times (12k^2 + w_1^2) R_{13} + \nu \rho w_1 (16k^4 - w_1^4) R_{22} \text{ ch } dw_1 \\ & + 2ik \nu \rho (16k^4 - w_1^4) R_{21} \text{ sh } dw_1 - 8k^2 \nu \rho w_1 (4k^2 - w_1^2) \\ & \times R_{22} \text{ ch } 2dk - 8ik^2 \nu \rho w_1 (4k^2 - w_1^2) R_{21} \text{ sh } 2dk \\ & - \nu \rho w_1 ((80k^4 + 8k^2 w_1^2 + w_1^4) R_{11} + 2ik(12k^2 + w_1^2) R_{13}) \\ & \times \text{ch } 2dk \text{ ch } dw_1 + 2k \nu \rho ((16k^4 + 24k^2 w_1^2 + w_1^4) R_{11} \\ & + 2ik(4k^2 + 3w_1^2) R_{13}) \text{ sh } 2dk \text{ sh } dw_1 - 2k w_1 (4k^2 - w_1^2) \\ & \times R_{121} \text{ sh } 2dk \text{ ch } dw_1 + 4k^2 (4k^2 - w_1^2) R_{121} \text{ ch } 2dk \text{ sh } dw_1 \left. \right); \\ \Delta_{Z_1} = & \rho S \left(16k^2 \nu^2 w_1 (4k^2 + w_1^2) - w_1 (\nu^2 (80k^4 + 8k^2 w_1^2 \right. \\ & + w_1^4) \text{ ch } 2dk + \omega_1^2 \text{ sh } 2dk) \text{ ch } dw_1 + 2k (\omega_1^2 \text{ ch } 2dk \\ & \left. + \nu^2 (16k^4 + 24k^2 w_1^2 + w_1^4) \text{ sh } 2dk) \text{ sh } dw_1 \right); \\ R_{11} = & \frac{\nu k}{2(9k^2 - q^2)(-q \text{ ch } dq \text{ sh } dk + k \text{ ch } dk \text{ sh } dq)} \\ & \times \left(4k^2 q (5k^2 + q^2) - q (31k^4 + 10k^2 q^2 - q^4) \text{ ch } dk \text{ ch } dq \right. \\ & \left. + k (3k^4 + 22k^2 q^2 - q^4) \text{ sh } dk \text{ sh } dq \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{13} = & \frac{ivk^2}{(9k^2 - q^2)(-q \text{ ch } dq \text{ sh } dk + k \text{ ch } dk \text{ sh } dq)} \\ & \times \left(q (31k^4 + q^4) - 2q (22k^4 + 11k^2 q^2 - q^4) \text{ ch } dk \text{ ch } dq \right. \\ & \left. + 2k^3 (3k^2 + 13q^2) \text{ sh } dk \text{ sh } dq \right); \end{aligned}$$

$$R_{21} = \frac{ik(3k^4 + 6k^2 q^2 - q^4) \sigma_1^2 + 8k^2 q^2 \sigma_2^2}{4\nu(k^2 - q^2)(9k^2 - q^2)};$$

$$R_{22} = -\frac{4k^4 q \sigma_1 \sigma_2}{\nu(k^2 - q^2)(9k^2 - q^2)};$$

$$\begin{aligned} R_{121} = & -\frac{E_0^2 k^2}{16\pi} + \frac{(k^2 - q^2)^2 \nu^2 \rho}{4} \\ & - \frac{\rho((k^2 + q^2) \sigma_1^2 - 2q^2 \sigma_2^2)}{8} + \frac{k\rho}{2(9k^4 - 10k^2 q^2 + q^4)} \\ & \times \left(k((9k^4 + 10k^2 q^2 - 3q^4) \text{ ch } dk \text{ ch } dq + 4kq(3k^2 + q^2) \right. \\ & \times \text{sh } dk \text{ sh } dq) \sigma_1^2 + q(4kq(3k^2 + q^2) \text{ ch } dk \text{ ch } dq \\ & + (9k^4 + 10k^2 q^2 - 3q^4) \text{ sh } dk \text{ sh } dq) \sigma_2^2 \\ & + (q(21k^4 + 14k^2 q^2 - 3q^4) \text{ sh } dk \text{ ch } dq \\ & \left. + k(9k^4 + 22k^2 q^2 + q^4) \text{ ch } dk \text{ sh } dq) \sigma_1 \sigma_2 \right); \end{aligned}$$

$$\sigma_1 = -\frac{iv(-2kq \text{ sh } dk + (k^2 + q^2) \text{ sh } dq)}{-q \text{ ch } dq \text{ sh } dk + k \text{ ch } dk \text{ sh } dq};$$

$$\sigma_2 = -\frac{iv(2k^2 \text{ ch } dk - (k^2 + q^2) \text{ ch } dq)}{-q \text{ ch } dq \text{ sh } dk + k \text{ ch } dk \text{ sh } dq};$$

$$\omega_0^2 = gk \left(1 + \frac{\gamma}{\rho g} k^2 - \frac{E_0^2}{4\pi \rho g} k \right);$$

$$w_1 = \sqrt{4k^2 + \frac{2S}{\nu}}; \quad q = \sqrt{k^2 + \frac{S}{\nu}},$$

где ε — малый параметр, α — капиллярная постоянная жидкости, \bar{S} — частота, комплексно-сопряженная к частоте S бегущей волны; аббревиатура „с.с.“ означает комплексно-сопряженное слагаемое.

Комплексная частота S определяется из дисперсионного уравнения

$$\text{Det} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -i\frac{q}{k} & 0 \\ 0 & 1 & -i & 0 & 0 \\ -\text{sh } dk & -\text{ch } dk & i \text{ ch } dq & i \text{ sh } dq & \frac{S}{k} \\ -(k^2 + q^2) \text{ ch } dk & -(k^2 + q^2) \text{ sh } dk & 2ikq \text{ sh } dq & 2ikq \text{ ch } dq & -\frac{\omega_0^2}{\nu k} \\ 2ik^2 \text{ sh } dk & 2ik^2 \text{ ch } dk & (k^2 + q^2) \text{ ch } dq & (k^2 + q^2) \text{ sh } dq & 0 \end{pmatrix} = 0,$$

где W — параметр Тонкса–Френкеля [11]:

$$W \equiv \frac{E_0^2}{4\pi \sqrt{\rho g \gamma}}.$$

Приведа выражение для потенциала электрического поля возле свободной поверхности жидкости к вещественному виду, получим:

$$\begin{aligned} \Phi(x, z, t) = E_0 & \left(-z + a \exp(\operatorname{Re} St - kz) \cos(\operatorname{Im} St - kx) \right. \\ & + a^2 2 \left| Z_1 + \frac{k}{4} \right| \exp(2 \operatorname{Re} St - 2kz) \cos \left(2 \operatorname{Im} St - 2kx \right. \\ & \left. + \operatorname{Arg} \left(Z_1 + \frac{k}{4} \right) \right) + a^2 \frac{k}{2} \exp(2 \operatorname{Re} St) \left. \right) + O(a^3). \end{aligned}$$

Выражение для формы свободной поверхности жидкости, возмущенной волной конечной амплитуды, имеет вид [10]:

$$\begin{aligned} \xi(x, t) = a \exp(\operatorname{Re} St) \cos(\operatorname{Im} St - kx) \\ + a^2 2 |Z_1| \exp(2 \operatorname{Re} St) \cos(2 \operatorname{Im} St - 2kx + \operatorname{Arg} Z_1) + O(a^3). \end{aligned}$$

Коронный разряд зажигается, когда напряженность электрического поля возле некой поверхности достигает фиксированной при заданном давлении воздуха величины. Определяющим параметром величины напряженности поля в рассматриваемой ситуации является значение нормальной к свободной поверхности жидкости компоненты вектора напряженности электрического поля.

3. Вывод аналитического выражения для нормальной к свободной поверхности жидкости компоненты напряженности электрического поля

Искомое значение нормальной к свободной поверхности напряженности электрического поля определяется как величина проекции вектора напряженности поля на вектор нормали к свободной поверхности жидкости

$$z = \xi(x, t) : \quad E_n = -\mathbf{n} \cdot \nabla \Phi \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{E}.$$

Аналитическое выражение для вектора напряженности электрического поля над поверхностью жидкости имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{E} = E_0 & \left\{ \left[ak \exp(\operatorname{Re} St - kz) \sin(\operatorname{Im} St - kx) + a^2 k |4Z_1 + k| \right. \right. \\ & \times \exp(2t \operatorname{Re} S - 2kz) \sin(2t \operatorname{Im} S - 2kx + \operatorname{Arg}(4Z_1 + k)) \left. \right] \mathbf{e}_x \\ & - \left[1 + ak \exp(\operatorname{Re} St - kz) \cos(\operatorname{Im} St - kx) + a^2 k |4Z_1 + k| \right. \\ & \times \exp(2t \operatorname{Re} S - 2kz) \cos(2t \operatorname{Im} S - 2kx - \operatorname{Arg}(4Z_1 + k)) \left. \right] \mathbf{e}_z \\ & \left. + O(a^3) \right\}. \end{aligned}$$

Вектор напряженности электрического поля на свободной поверхности жидкости, деформированной бегущей капиллярно-гравитационной волной, определится

выражением:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, \xi(x, t), t) = E_0 & \left\{ \left[ak \exp(t \operatorname{Re} S) \sin(t \operatorname{Im} S - kx) \right. \right. \\ & + a^2 k |4Z_1 + k| \exp(2t \operatorname{Re} S - 2kz) \sin(2t \operatorname{Im} S - 2kx \\ & + \operatorname{Arg}(4Z_1 + k)) - a^2 \frac{k^2}{2} \exp(2t \operatorname{Re} S) \sin(2t \operatorname{Im} S - 2kx) \left. \right] \mathbf{e}_x \\ & - \left[1 + ak \exp(t \operatorname{Re} S) \cos(t \operatorname{Im} S - kx) + a^2 k |4Z_1 + k| \right. \\ & \times \exp(2t \operatorname{Re} S) \cos(2t \operatorname{Im} S - 2kx + \operatorname{Arg}(4Z_1 + k)) \\ & \left. - a^2 \frac{k^2}{2} \exp(2t \operatorname{Re} S) [1 + \cos(2t \operatorname{Im} S - 2kx)] \right] \mathbf{e}_z \\ & \left. + O(a^3) \right\}. \end{aligned}$$

Аналитическое выражение орта нормали к свободной поверхности жидкости определяется как

$$\begin{aligned} \mathbf{n}(x, t) & \equiv \frac{\nabla F(x, z, t)}{|\nabla F(x, z, t)|} \Big|_{z=\xi} \\ & = [-ak \exp(t \operatorname{Re} S) \sin(t \operatorname{Im} S - kx) \\ & - a^2 4k |Z_1| \exp(2t \operatorname{Re} S) \sin(2t \operatorname{Im} S - 2kx + \operatorname{Arg} Z_1)] \mathbf{e}_x \\ & + \left[1 - a^2 \frac{k^2}{4} \exp(2t \operatorname{Re} S) (1 - \cos(2t \operatorname{Im} S - 2kx)) \right] \mathbf{e}_z \\ & + O(a^3); \end{aligned}$$

$$F \equiv z - \xi(x, t) = 0.$$

Тогда выражение для проекции вектора напряженности поля на вектор нормали к поверхности жидкости будет иметь вид:

$$\begin{aligned} E_n(x, t) = \mathbf{E}(x, \xi(x, t), t) \mathbf{n}(x, t) = -E_0 & \left(1 + ak \exp(t \operatorname{Re} S) \right. \\ & \times \cos(t \operatorname{Im} S - kx) + a^2 \exp(2t \operatorname{Re} S) \left(k^2 \sin(t \operatorname{Im} S - kx)^2 \right. \\ & + k |4Z_1 + k| \cos(2t \operatorname{Im} S - 2kx + \operatorname{Arg}(4Z_1 + k)) - \frac{3}{4} k^2 \\ & \left. \left. - \frac{1}{4} k^2 \cos(2t \operatorname{Im} S - 2kx) \right) \right) + O(a^3). \end{aligned}$$

В полученном выражении слагаемое при a^2 раскладывается по функциям $\cos(2t \operatorname{Im} S - 2kx)$ и $\sin(2t \operatorname{Im} S - 2kx)$ и его можно представить в виде:

$$\begin{aligned} -E_0 a^2 \exp(2t \operatorname{Re} S) & \left(-\frac{1}{4} k^2 + k \left(-\frac{3}{4} k \right. \right. \\ & \left. \left. + |4Z_1 + k| \cos \operatorname{Arg}(4Z_1 + k) \right) \cos(2t \operatorname{Im} S - 2kx) \right. \\ & \left. - k |4Z_1 + k| \sin \operatorname{Arg}(4Z_1 + k) \sin(2t \operatorname{Im} S - 2kx) \right). \end{aligned}$$

Преобразовав вид данного соотношения, получим:

$$-E_0 a^2 \exp(2t \operatorname{Re} S) \left(-\frac{1}{4} k^2 + k \left(-\frac{3}{4} k + \operatorname{Re}(4Z_1 + k) \right) \cos(2t \operatorname{Im} S - 2kx) - k \operatorname{Im}(4Z_1 + k) \sin(2t \operatorname{Im} S - 2kx) \right).$$

Поскольку k — вещественное, вышеприведенное выражение можно представить как

$$-E_0 a^2 \exp(2t \operatorname{Re} S) \left(-\frac{1}{4} k^2 + k \operatorname{Re} \left(4Z_1 + \frac{k}{4} \right) \cos(2t \operatorname{Im} S - 2kx) - k \operatorname{Im} \left(4Z_1 + \frac{k}{4} \right) \sin(2t \operatorname{Im} S - 2kx) \right).$$

Для комплексного выражения Z справедливо соотношение: $\operatorname{Re} Z = |Z| \cos \operatorname{Arg} Z$ и $\operatorname{Im} Z = |Z| \sin \operatorname{Arg} Z$. Поэтому последнее выражение можно представить в виде

$$-E_0 a^2 \exp(2t \operatorname{Re} S) \left(-\frac{1}{4} k^2 + k \left| 4Z_1 + \frac{k}{4} \right| \cos \operatorname{Arg} \left(4Z_1 + \frac{k}{4} \right) \cos(2t \operatorname{Im} S - 2kx) - k \left| 4Z_1 + \frac{k}{4} \right| \sin \operatorname{Arg} \left(4Z_1 + \frac{k}{4} \right) \sin(2t \operatorname{Im} S - 2kx) \right).$$

Используя далее тригонометрическую формулу для косинуса суммы двух углов, последнее выражение можно переписать в виде

$$-E_0 a^2 \exp(2t \operatorname{Re} S) \left(-\frac{1}{4} k^2 + k \left| 4Z_1 + \frac{k}{4} \right| \cos \left(2t \operatorname{Im} S - 2kx + \operatorname{Arg} \left(4Z_1 + \frac{k}{4} \right) \right) \right).$$

Таким образом, окончательное выражение для нормальной компоненты вектора напряженности электрического поля на свободной поверхности жидкости, деформированной бегущей капиллярно-гравитационной волной, получается достаточно компактным

$$z = \xi(x, t): \quad E_n = \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = -E_0 \left(1 + ak \exp(t \operatorname{Re} S) \times \cos(t \operatorname{Im} S - kx) + a^2 k \left| 4Z_1 + \frac{k}{4} \right| \exp(2t \operatorname{Re} S) \times \cos \left(2t \operatorname{Im} S - 2kx + \operatorname{Arg} \left(4Z_1 + \frac{k}{4} \right) \right) - a^2 \frac{k^2}{4} \exp(2t \operatorname{Re} S) \right) + O(a^3). \quad (1)$$

4. Анализ полученных результатов

Дальнейший анализ найденного выражения для напряженности электрического поля на свободной поверхности жидкости (1) проведем для волн на воде при температуре 293 К. При этом значения основных параметров воды приняты следующими: плотность $\rho = 0.99823 \text{ g/cm}^3$, коэффициент поверхностного натяжения $\gamma = 72.8 \text{ dyne/cm}$, динамическая вязкость $\eta = 0.01004 \text{ g/s cm}$.

Будем рассматривать капиллярно-гравитационные периодические волны с волновыми числами, близкими к волновому числу k_* наиболее неустойчивой, по Тонксу–Френкелю, волны:

$$k_* = \frac{1}{\alpha}.$$

Величина внешнего электрического поля полагается близкой к критической для реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля, которая реализуется при $W \geq 2$. При расчетах будем принимать $W = 1.95$.

Для оценки возможности зажигания на гребнях волн коронного разряда будем исходить из максимального (пикового) значения нормальной составляющей напряженности электрического поля на поверхности жидкости. Искомое значение является функцией времени и определится выражением:

$$E_{\text{peak}}(t) = \max_x E_n(x, t).$$

На рис. 1 приведены зависимости величины максимальной напряженности электрического поля на свободной поверхности жидкости от толщины ее слоя, построенные для $\varepsilon = 0.2$, при этом амплитуда линейной части волны составляет $a = 0.2\alpha = 0.054 \text{ cm}$. На рис. 1, *a* приведены результаты расчетов для волны с $k = 0.5k_*$ ($\lambda = 3.42 \text{ cm}$), на рис. 1, *b* — для $k = 3k_*$ ($\lambda = \lambda = 0.57 \text{ cm}$). Величина электростатического поля принята равной $E_0 = 80.9 \text{ CGSE}$ (это соответствует $W = 1.95$). Величина напряженности однородного электростатического поля, критическая для зажигания коронного разряда в воздухе при атмосферном давлении, равна $E_3 = 86.7 \text{ CGSE}$ [12]. Из рис. 1 видно, что в зависимости от длины волны в области малых значений толщины слоя жидкости напряженность поля как функции толщины слоя имеет максимум, быстро (за время порядка полупериода волны) исчезающий в силу диссипации энергии. Сама напряженность поля у свободной поверхности слоя жидкости уменьшается с увеличением толщины слоя, но при принятых значениях физических параметров превышает критическую для зажигания коронного разряда. С увеличением волнового числа напряженность поля у гребней волн растет.

На рис. 2 приведены зависимости величины максимальной напряженности электрического поля у возмущенной капиллярно-гравитационным волновым движением на свободной поверхности жидкости от волнового

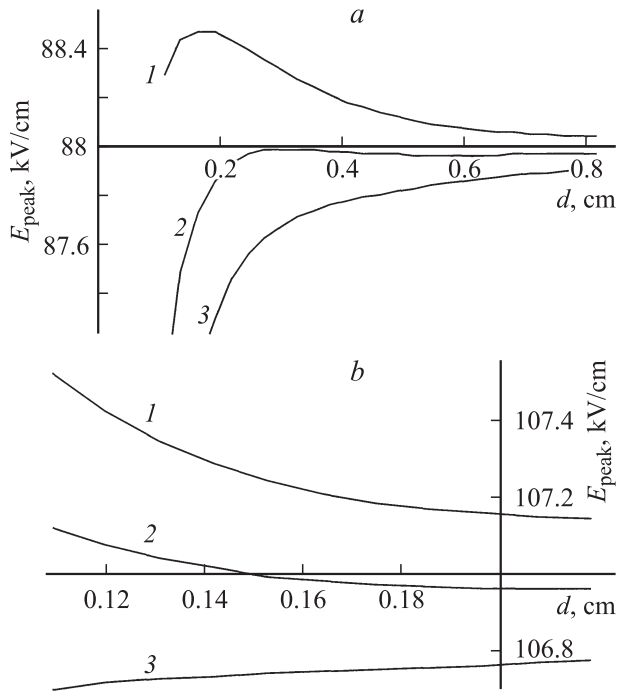


Рис. 1. Зависимости величины максимальной напряженности электрического поля на свободной поверхности жидкости от толщины ее слоя, построенные при $W = 1.95$ для волны в различные моменты времени t : 1 — 0, $k = 0.5k_*$ (а), $\alpha = 0.2\alpha$; 2 — $T/4$; $k = 3k_*$ (б).

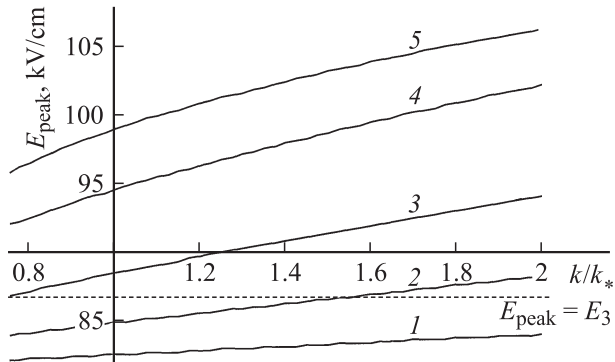


Рис. 2. Зависимости величины максимальной напряженности электрического поля на свободной поверхности жидкости от безразмерного волнового числа k , построенные при $t = 0$, $d = 0.164$ cm, $W = 1.95$ для различных амплитуд волн a : 1 — 0.0055 ($\epsilon = 0.02$); 2 — 0.014 ($\epsilon = 0.05$); 3 — 0.027 ($\epsilon = 0.1$); 4 — 0.055 ($\epsilon = 0.2$); 5 — 0.082 cm ($\epsilon = 0.3$). Пунктиром нанесена напряженность поля, критическая для зажигания коронного разряда.

числа k , обезразмеренного на α — капиллярную постоянную жидкости ($k/k_* \equiv k\alpha$) при различных амплитудах волн. Видно, что напряженность поля у гребней волн в принятом диапазоне изменения волнового числа превышает критическое для зажигания коронного разряда значение и увеличивается с ростом волнового числа и амплитуды волны.

На рис. 3 приведены зависимости величины максимальной напряженности электрического поля от амплитуды волны a для волн различной длины. Видно, что с ростом амплитуды волны и ее волнового числа напряженность поля у гребней волн увеличивается.

На рис. 4 и 5 иллюстрируются зависимости напряженности электрического поля от продольной координаты и форму профилей нелинейных волн на свободной поверхности жидкости, рассчитанные для волн с различными волновыми числами и согласующиеся с результатами расчетов, приведенных на рис. 1–3.

Решаемую задачу можно было бы сформулировать несколько иначе в виде требования отыскать при фиксированных значениях физических параметров минимальную напряженность внешнего электрического поля E_0 , при которой у гребней волн может зажечься коронный разряд, как это было сделано в [7–9] при расчете возможности зажигания коронного разряда у поверхности капель и тающих градин в грозовом облаке. Но в силу того что выражение (1) линейно по E_0 , ответ на такой вопрос будет очевидным из приведенных иллюстраций (рис. 1–5).

Требование асимптотичности выражения (1) не позволяет использовать разложение (1) для анализа напряженности поля, превышающей E_0 более чем в полтора раза, но, согласно рис. 1–3, коронный разряд при атмосферном давлении окружающего воздуха у плоской поверхности жидкости, возмущенной волновым движением, может зажечься при $E_0 \approx 50$ –60 CGSE. При пониженном давлении критическая для зажигания коронного разряда величина напряженности снижается, что актуально для жидкометаллических источников ионов и масс-спектрометров, а также для самолетов, летящих в облаках на высоте нескольких километров, на которых летчики часто наблюдают огни Святого Эльма [5].

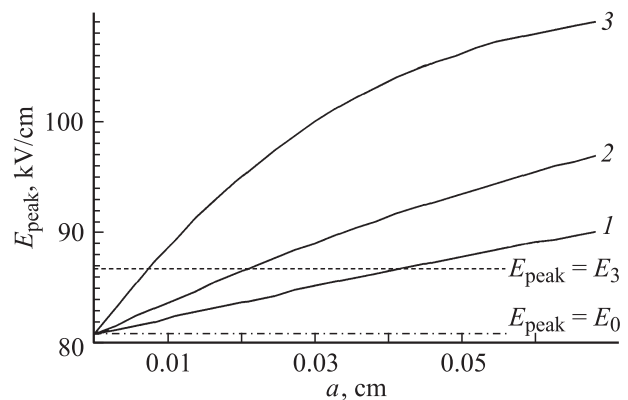


Рис. 3. Зависимости величины максимальной напряженности электрического поля на свободной поверхности жидкости от амплитуды волны a , построенные при $t = 0$, $d = 0.164$ cm, $W = 1.95$ для волн различной длины λ : 1 — 3.43 cm ($k = 0.5k_*$); 2 — 1.71 cm ($k = k_*$); 3 — 0.57 cm ($k = 3k_*$). Пунктиром нанесена напряженность поля, критическая для зажигания коронного разряда, а штрихпунктиром напряженность однородного внешнего поля.

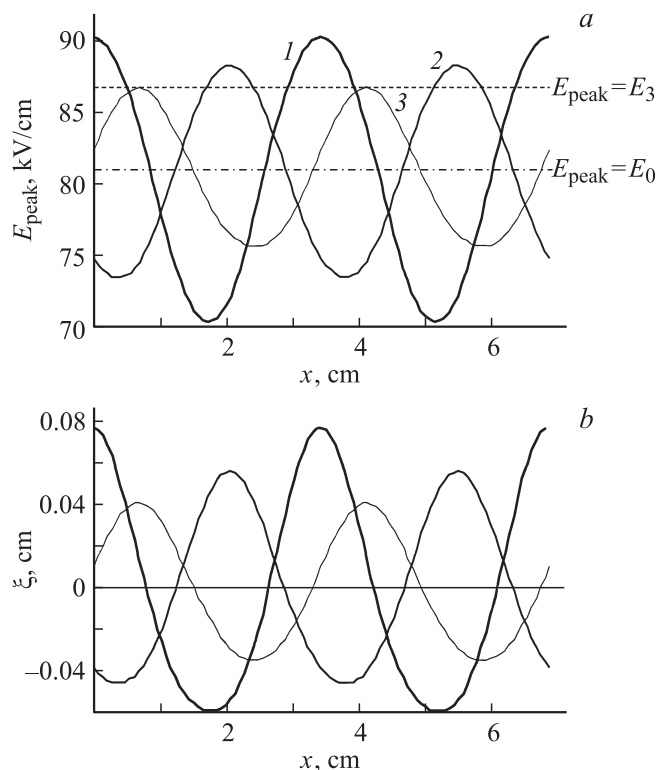


Рис. 4. Зависимость напряженности поля от продольной координаты (а) и профили волн (б) на свободной поверхности жидкости в различные моменты времени: 1 — 0; 2 — $3T/5$; 3 — $6T/5$, $T = 0.56$ s, построенные при $\varepsilon = 0.25$, $k = 0.5k_*$, $\lambda = 3.43$ cm, $d = 0.164$ cm, $W = 1.95$.

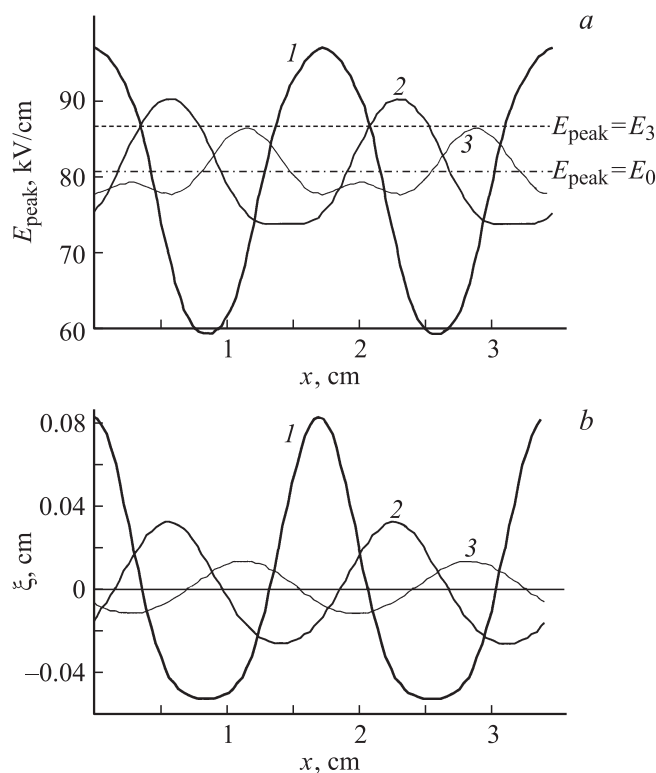


Рис. 5. То же, что на рис. 4, а, но построенное для волны с $k = k_*$, $\lambda = 1.71$ cm: 1 — $t = 0$, 2 — $4T/3$, 3 — $8T/3$, $T = 0.68$ s.

Тем не менее общие тенденции, проиллюстрированные рис. 2–3, указывают, что при прочих равных условиях напряженность поля у гребней волн увеличивается с ростом волнового числа. В этой связи, принимая во внимание, что рассматриваются волны в тонких пленках жидкости, целесообразно учесть влияние на нелинейное волновое движение флуктуационных сил [13–20].

Важным для проводимого рассмотрения обстоятельством является тот факт, что зависимость квадрата частоты ω^2 флуктуационной ветви капиллярно-флуктуационных волн от волнового числа k такая же, как и у гравитационной ветви капиллярно-гравитационных волн, т.е. линейная: $\omega^2 \sim k$ [17,18,20]. В итоге в дисперсионное уравнение для волн на поверхности жидкости в описанных условиях ускорения поля силы тяжести и поля флуктуационных сил войдут в виде суммы. Иными словами, качественный вид нелинейного взаимодействия капиллярно-флуктуационных волн между собой аналогичен взаимодействию капиллярно-гравитационных волн, достаточно детально исследованному. Оценки показывают [20], что ускорение поля флуктуационных сил в тонких слоях жидкости ($d \leq 100$ nm) на три–пять порядков (в зависимости от толщины слоя и вида жидкости) превышает ускорение поля силы тяжести и последним можно пренебрегать. Поэтому влияние поля силы тяжести на закономерности волнового движения по сравнению с влиянием флуктуационных сил в тонкой пленке жидкости пренебрежимо мало и может не учитываться в большинстве реальных ситуаций: для тонкого слоя воды на поверхности тающей грядины [19]; пленки жидкого металла на поверхности иглы эмиттера в жидкометаллических источниках ионов [21]; пленки электролита на оплавленном электроде из замороженного электролита в масс-спектрометрах для анализа труднолетучих веществ и веществ органического происхождения [22,23].

Если в проведенном рассмотрении под g понимать не ускорение поля силы тяжести, а ускорение поля флуктуационных сил, то величина характерного линейного масштаба задачи α сместится в область существенно более малых значений. Это означает, что волновые числа волн, которые будут распространяться по поверхности тонкого слоя жидкости, при определяющем влиянии флуктуационных сил увеличатся на несколько порядков. Оценки показывают, что при $d = 10$ nm волновое число наиболее неустойчивой в смысле реализации неустойчивости Тонкса–Френкеля волны на поверхности жидкости увеличится на три–четыре порядка в зависимости от величины коэффициента поверхностного натяжения и плотности жидкости, что приведет к увеличению кривизны гребней нелинейных волн и напряженности электрического поля в их окрестности.

Помимо указанного геометрического фактора влияние флуктуационных сил чисто физически (в силу их сильной зависимости от толщины слоя жидкости) приводит к увеличению кривизны гребней нелинейных волн [20],

что также увеличивает напряженность электрического поля в их окрестности.

Заключение

Аналитические асимптотические расчеты показывают, что напряженность электростатического поля у гребней нелинейных волн при достаточно большой напряженности внешнего электростатического поля в силу суперпозиции внешнего поля и поля индуцированного на свободной поверхности жидкости электрического заряда может превысить критическую для зажигания коронного разряда величину. Это обстоятельство необходимо принимать во внимание в практике жидкометаллической и электрохимической эпитаксии и в практике получения волнового микрорельефа при облучении твердой поверхности интенсивными пучками ионов или электромагнитных волн, где обсуждаемый эффект существенно увеличивается за счет влияния сил флуктуационной природы, действующих на слой жидкости со стороны твердой подложки.

Работа выполнена в рамках тематического плана НИР вуза, при поддержке грантов губернатора Ярославской области, Рособразования № 2.1.1/377 и РФФИ № 09-01-00084.

Список литературы

- [1] Либенсон М.Н., Ширяев В.А. // ЖТФ. 2000. Т. 70. Вып. 3. С. 6–8.
- [2] Григорьев А.И. // Письма в ЖТФ. 2000. Т. 26. Вып. 21. С. 89–94.
- [3] Rudy A.S., Birkgan S.E., Bachurin V.I., Smirnov V.K. // Radiation Effects and Defects in Solids. 2006. Vol. 161. N 6. P. 319–329.
- [4] Григорьев А.И., Синкевич О.А. // ЖТФ. 1984. Т. 54. Вып. 7. С. 1276–1283.
- [5] Grigor'ev A.I., Grigor'eva I.D., Shiryayeva S.O. // J. Sci. Exploration. 1991. N 2. P. 1–28.
- [6] Григорьев А.И. Шаровая молния. Ярославль: Изд-во ЯрГУ, 2006. 220 с.
- [7] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Волкова М.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 11. С. 31–36.
- [8] Ширяева С.О., Григорьев А.И., Волкова М.В. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 7. С. 40–47.
- [9] Григорьев А.И., Коромыслов В.А., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 11. С. 10–19.
- [10] Климов А.В., Белоножко Д.Ф., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2005. Т. 75. Вып. 10. С. 9–17.
- [11] Френкель Я.И. // ЖЭТФ. 1936. Т. 6. № 4. С. 348–350.
- [12] Александров А.Ф., Бычков В.Л., Грачев Л.П. и др. // ЖТФ. 2006. Т. 76. Вып. 3. С. 38–43.
- [13] Френкель Я.И. Кинетическая теория жидкости. М.: Наука, 1975. 592 с.
- [14] Лифшиц Е.М., Питаевский Л.П. Теоретическая физика. Т. 9. Статистическая физика. Ч. 2. М.: Наука, 1978. 448 с.
- [15] Дерягин Б.В. Теория устойчивости коллоидов и тонких пленок. М.: Наука, 1986. 405 с.

- [16] Grigor'ev A.I., Munichev M.I., Shiryayeva S.O. // J. Coll. Int. Sci. 1994. N 166. P. 267–274.
- [17] Григорьев А.И., Белоножко Д.Ф., Муничев М.И. // Письма в ЖТФ. 1997. Т. 23. Вып. 19. С. 66–70.
- [18] Саночкин Ю.В. // ЖТФ. 2003. Т. 73. Вып. 5. С. 24–29.
- [19] Григорьев А.И., Ширяева С.О., Крючков О.С. // ЖТФ. 2007. Т. 77. Вып. 12. С. 1–9.
- [20] Климов А.В., Григорьев А.И. // ЖТФ. 2009. Т. 79. Вып. 10. С. 14–21.
- [21] Wagner A., Hall T.M. // J. Vacuum Sci. Techn. 1979. Vol. 16. N 6. P. 1871–1874.
- [22] Ширяева С.О., Григорьев А.И. // ЖТФ. 1993. Т. 63. Вып. 8. С. 162–170.
- [23] Григорьев А.И., Морозов В.В., Ширяева С.О. // ЖТФ. 2002. Т. 72. Вып. 10. С. 33–37.