01;05

# Анализ энергетики нагружаемого квантового ангармонического осциллятора в широкой области температур

© В.Л. Гиляров, А.И. Слуцкер

Физико-технический институт им. А.Ф. Иоффе РАН,
194021 Санкт-Петербург, Россия
e-mail: Alexander.Slutsker@mail.ioffe.ru

(Поступило в Редакцию 15 сентября 2009 г.)

Анализ энергетики ансамбля квантовых ангармонических осцилляторов, нагружаемых внешней силой, в широкой области значений температуры (от $T = 0$) проведен общим методом на основе использования теоремы вириала. При $T = 0$ установлены ангармонические эффекты: линейное изменение нулевой энергии осциллятора при нагружении (уменьшение при растяжении, возрастание — при сжатии) и линейные изменения средних кинетической и потенциальной составляющих энергии. При высоких температурах, когда динамика осцилляторов становится классической, ангармонические эффекты выражаются в линейном по силе изменении колебательной энергии и линейном изменении средних кинетической и потенциальной составляющих энергии. И при низкой, и при высокой температуре имеет место взаимокомпенсирующее изменение средних кинетической и потенциальной составляющих внутренней динамической энергии осциллятора: перераспределение энергии при нагружении.

Нелинейность межатомного взаимодействия приводит ко многим явлениям в твердых телах: термическое расширение, конечная теплопроводность, определяемая средними значениями времени жизни фононов, непостоянство высокотемпературной теплоемкости и др. Она проявляется также при механических воздействиях на твердые тела. В частности, при адиабатическом (т. е. достаточно медленном и без теплового контакта со средой) нагружении происходит изменение температуры тела (термоупругий эффект) и фононных частот. Поскольку во многих случаях для описания нелинейных эффектов можно использовать модель твердого тела в виде системы осцилляторов, то детали энергетики нелинейного осциллятора представляют значительный интерес.

Как известно, в общем случае элементы колебательной динамики твердого тела выступают как квантовые осцилляторы, обладающие дискретными уровнями колебательной энергии и нулевой энергией (энергией основного состояния).

В области высоких температур — выше характеристических, дебаевских температур, когда энергия возбуждения много больше кванта энергии осциллятора, осциллятор можно рассматривать как классический.

Анализ энергетики нагружаемого ангармонического классического осциллятора проводился ранее [1,2]. Последовательный анализ нагружаемого ангармонического квантового осциллятора требует решения уравнения Шредингера, что является достаточно сложной задачей. Имеется много работ по определению собственных значений и волновых функций квантовых ангармонических осцилляторов с потенциалами различного порядка ангармонизма [3–8]. Существуют работы по исследованию резонансных явлений при воздействии на нелинейный квантовый осциллятор периодической внешней силы [9]. Детальный анализ воздействия постоянной силы на квантовый ангармонический осциллятор при конечных температурах с выявлением закономерностей изменения средних кинетической и потенциальных составляющих системы отсутствовал.

Поэтому представляет интерес провести анализ деталей энергетики ансамбля квантовых ангармонических осцилляторов в тепловом резервуаре в широкой области температуры одним общим методом, смягчающим трудности анализа нелинейных систем. В настоящей работе данная задача решается использованием теорем вириала. Такой подход позволяет обойтись без непосредственного решения уравнения Шредингера.

## 1. Теорема вириала

Понятие вириала введено Клаузисом для ансамбля частиц в силовом поле и вириалом в общем случае называется сумма скалярных произведений векторов $\sum_i \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i$: силы $\mathbf{F}_i$, действующей на частицу, и ее координаты $\mathbf{r}_i$.

Теорема вириала связывает среднюю кинетическую энергию $\langle E_{\text{kin}} \rangle$ частиц со средним значением вириала [10]:

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = -\frac{1}{2} \sum_i \langle \mathbf{F}_i \cdot \mathbf{r}_i \rangle. \tag{1}$$

Соотношение (1) справедливо и для квантовых систем при условии квантово-механического усреднения операторов входящих в выражение (1) величин.

Применим теорему вириала для ансамбля одинаковых одномерных ангармонических осцилляторов. Потенциальную яму для такого осциллятора представим в виде кубического двучлена:

$$U(z) = \frac{f}{2} z^2 - \frac{g}{3} z^3, \tag{2}$$

где $z$ — смещение осциллятора из исходного положения равновесия, $f$ — упругая силовая постоянная, $g$ — коэффициент ангармоничности.

Потенциальная энергия осциллятора в поле силы $F$:

$$U(F,z) = \frac{f}{2} z^2 - \frac{g}{3} z^3 - Fz.$$

Суммарная сила, действующая на осциллятор:

$$F_\Sigma = -\frac{\partial U(F,z)}{\partial z} = -fz + gz^2 + F.$$

Вириал такого одномерного осциллятора:

$$F_\Sigma z = -fz^2 + gz^3 + Fz.$$

Вид теоремы вириала (1) для ансамбля таких осцилляторов приобретает форму:

$$2\langle E_{\text{kin}}\rangle = -\langle F_\Sigma z\rangle = f\langle z^2\rangle - g\langle z^3\rangle - F\langle z\rangle. \tag{3}$$

Выражение (3) дает возможность нахождения такой важной характеристики, как средняя кинетическая энергия нагружаемого ангармонического осциллятора.

## 2. Детализация энергетики нагружаемого квантового ангармонического осциллятора

Смещение из положения равновесия $z$ можно представить в виде суммы двух $(z = x + a)$ смещений: мгновенного $x$ и среднего $a$, величина которого определяется из термодинамического условия равновесия в системе осцилляторов. Таким условием, как известно [11], является равенство нулю суммарной средней силы, действующей на осциллятор: $\langle F_\Sigma z\rangle = -\langle U'(z)\rangle = 0$. При этом выражение (3) преобразуется:

$$2\langle E_{\text{kin}}\rangle = \langle xU'(x+a)\rangle = (fa - F)\langle x\rangle + (f - 2ga)\langle x^2\rangle - g\langle x^3\rangle. \tag{4}$$

Таким образом, для определения $\langle E_{\text{kin}}\rangle$ требуются средние значения степеней координаты $z$ и значение $a$.

Для расчета средних значений используем самосогласованное гармоническое приближение [12], заключающееся в описании температурно-силового поведения системы нелинейных осцилляторов введением вспомогательной системы гармонических осцилляторов. Эта вспомогательная система квантовых гармонических осцилляторов с частотой $\omega$ описывается известной функцией распределения по координатам вида [13]:

$$\rho(x) = \sqrt{\frac{m\omega \operatorname{th} q}{\pi\hbar}} \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar} x^2 \operatorname{th} q\right), \quad q = \frac{\hbar\omega}{2kT}, \tag{5}$$

где $m$ — масса частицы, $T$ — абсолютная температура, $\hbar$ и $k$ — постоянные Планка и Больцмана.

Важно подчеркнуть, что в выражении (5) учитывается как квантово-механическое усреднение, так и усреднение по ансамблю гармонических осцилляторов [13]. Согласно вариационной теореме статистической физики [11], свободная энергия нелинейной системы (в расчете на одну частицу) может быть представлена при помощи вспомогательной системы в виде:

$$\Phi(a,\omega) \approx \Phi_0 + \langle U - U_0\rangle. \tag{6}$$

Здесь и далее усреднение производится при помощи функции распределения вспомогательной системы (5). Величины $\Phi_0 = kT\sum_n \ln\bigl(2\operatorname{sh}(\hbar\omega/2kT)\bigr)$ и $U_0 = m\omega^2x^2/2$ — свободная и потенциальная энергия вспомогательной системы, $U$ — потенциал нелинейной системы. В положении термодинамического равновесия свободная энергия (6) минимальна, т.е.

$$\frac{\partial\Phi}{\partial a} = 0 \quad \text{и} \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\omega} = 0. \tag{7}$$

Первое из этих уравнений приводит к выражению

$$\langle U'(x)\rangle = fa - g\langle x^2\rangle - ga^2 - F = 0. \tag{8}$$

Здесь учтено, что нечетные степени $x$ при усреднении с помощью функции (5) гауссова вида равны нулю. Выражение (8) опять отражает тот факт, что средняя сила в положении термодинамического равновесия равна нулю.

Второе из уравнений (7) (условие самосогласования) определяет наилучшее приближение свободной энергии рассматриваемого ансамбля ангармонических осцилляторов при помощи гармонической системы осцилляторов. Это уравнение определяет частоту гармонических осцилляторов вспомогательной системы ($\omega$):

$$m\omega^2 = f - 2ga. \tag{9}$$

Таким образом, самосогласование заключается в назначении гармоническому вспомогательному осциллятору частоты, равной частоте ангармонического осциллятора, зависящей от среднего смещения $a$, которое в свою очередь, согласно (8), зависит от температуры и внешней приложенной силы.

С помощью функции распределения (5) нетрудно найти выражение для среднего квадрата амплитуды колебаний, входящего в (4):

$$\langle x^2\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} x^2\rho(x)dx = \frac{\hbar}{2m\omega} \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right).$$

Теперь можно получить явное выражение для среднего значения кинетической энергии (4):

$$\langle E_{\text{kin}}\rangle = \frac{\langle x^2\rangle}{2}(f - 2ga) = \frac{1}{4}\hbar\omega \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right), \tag{10}$$

где, как и ранее, учитываем, что средние значения нечетных степеней $x$ равны нулю, т.е. $\langle x\rangle = \langle x^3\rangle = 0$. Таким образом, с использованием теоремы вириала, найдено среднее значение кинетической энергии осциллятора, зависящее от нагрузки (вследствие зависимости $\omega(F)(9)$) и температуры.

Среднее значение потенциальной энергии осциллятора в силовом поле получаем прямым усреднением (2), считая, как и ранее, $z = x + a$,

$$\langle U\rangle = \frac{\langle x^2\rangle}{2}(f - 2ga) + \frac{f}{2}a^2 - \frac{g}{3}a^3 - Fa$$
$$= \frac{1}{4}\hbar\omega \operatorname{cth}\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) + \frac{f}{2}a^2 - \frac{g}{3}a^3 - Fa. \quad (11)$$

Первые три слагаемых в (11) отвечают потенциальной энергии упругого деформирования связи в осцилляторе, поэтому по определению представляют собой среднее значение потенциальной составляющей внутренней энергии $\langle U_{\text{int}}\rangle$. Последнее слагаемое представляет собой средний потенциал поля внешней нагружающей силы: $\langle U_F\rangle = -Fa$. Все вместе является средней полной потенциальной энергией осциллятора во внешнем поле.

Величина $a$ представляет собой среднее смещение осциллятора под действием температуры и нагрузки. Это смещение определяется из уравнения равновесия (8).

Теперь на основе общих зависимостей (10) и (11) обратимся к предельным случаям: низких температур $T \to 0$ (квантовый осциллятор в основном состоянии) и высоких температур $kT \gg \hbar\omega$ (классический осциллятор).

Для дальнейших выкладок и оценок принимаем следующие характеристики ангармонического осциллятора.

В ангармоническом потенциале (2): $D = f^3/6g^2$ — энергия диссоциации связи (глубина ямы) и $F_m = f^2/4g$ — прочность связи.

Энергию возбуждения будем брать малой по сравнению с энергией диссоциации связи, т.е. при высоких температурах $kT/D \ll 1$, а при низких — $E_0/D \ll 1$ (нулевая энергия $E_0 = \Delta E/2$, где $\Delta E$ — квант энергии осциллятора). Нагружающую силу $F$ будем задавать также малой: $F/F_m \ll 1$. Такие ограничения позволяют получить достаточно простые приближенные соотношения.

### 2.1. Нагружение квантового осциллятора в пределе $T \to 0$

Условие низких температур означает $\hbar\omega/kT \gg 1$. Тогда $\operatorname{cth}(\hbar\omega/kT) \approx 1$, $\langle x^2\rangle \approx \hbar/2m\omega$ и из уравнений (9), (10) следует зависимость смещения $a$ от силы:

$$a \approx \frac{F}{m\omega_h^2} + \frac{g\hbar}{2m^2\omega_h^3}. \quad (12)$$

Здесь $\omega_h = \sqrt{f/m}$ — частота гармонической составляющей потенциала (2). Выражение (12) справедливо с точностью до второго порядка по параметрам $E_0/D \ll 1$, $F/F_m \ll 1$.

Для удобства введем безразмерную энергию отношением к энергии диссоциации $D$, обозначая ее в дальнейшем через $W$, а также безразмерную силу $P = F/F_m$. Тогда для средних значений безразмерных кинетической и полной потенциальной энергии из (10), (11) с точностью до второго порядка получим:

$$\langle W_{\text{kin}}\rangle \approx \frac{W_h}{2}\left(1 - \frac{P}{4} - \frac{W_h}{6}\right), \quad (13)$$

$$\langle W_{\text{pot}}\rangle \approx \left[\frac{W_h}{2}\left(1 + \frac{P}{4}\right) + \frac{3}{16}P^2\right] - \frac{3}{8}P^2 - \frac{1}{4}PW_h. \quad (14)$$

Здесь $W_h = \hbar\omega_h/2D$ — вспомогательная безразмерная нулевая энергия гармонической составляющей потенциала (2). В квадратных скобках заключена средняя потенциальная составляющая внутренней энергии осциллятора $\langle W^{\text{int}}_{\text{pot}}\rangle$. Среднее значение внутренней энергии представляет собой сумму этой величины и кинетической энергии:

$$\langle W^{\text{int}}\rangle = \langle W^{\text{int}}_{\text{pot}}\rangle + \langle W_{\text{kin}}\rangle = W_h - \frac{1}{12}W_h^2 + \frac{3}{16}P^2. \quad (15)$$

Обратимся к важной для квантового осциллятора характеристике — нулевой энергии и влиянию на нее нагружения осциллятора.

До нагружения, т.е. при $P = 0$, вся энергия осциллятора была его внутренней энергией и являлась исходной нулевой энергией $W_0$. Поэтому в соответствии с (13) и (14) имеется:

$$W_0 = W^{\text{int}}(0) = \langle W_{\text{kin}}\rangle(0) + \langle W_{\text{pot}}\rangle(0) = W_h - \frac{1}{12}W_h^2.$$

Тогда $W_h \approx W_0 + \frac{1}{12}W_0^2$.

Отсюда следует важный результат о внутренней энергетике нагруженного квантового ангармонического осциллятора. Действительно, переходя от вспомогательной нулевой энергии $W_h$ к истинной исходной нулевой энергии $W_0$, для внутренней энергии $W^{\text{int}}(P)$ из (15) получаем:

$$W^{\text{int}}(P) \approx W_0 + \frac{3}{16}P^2,$$

т.е. все изменение внутренней энергии при нагружении сводится к ее увеличению на значение, равное потенциальной энергии упругой статической деформации связи до нового положения равновесия. В классической механике это соответствует средней работе внешней силы при нагружении осциллятора [2].

Если бы осциллятор был гармоническим, то этим результатом воздействия нагружащей силы на динамику осциллятора весь энергетический эффект и исчерпывался. Ангармоничность осциллятора приводит к специфическим эффектам, проявляющимся в силовой зависимости составляющих внутренней энергии (13), (14).

Потенциальная составляющая внутренней энергии (14) состоит из двух частей — энергии статической деформации связи $(3P^2/16)$ и динамической части, обусловленной нулевыми колебаниями:

$$\langle W^d_{\text{pot}} \rangle = \frac{W_h}{2}\left(1 + \frac{P}{4}\right).$$

Выражая величины через исходную нулевую энергию ангармонического осциллятора, для составляющих внутренней энергии имеем:

$$\langle W_{\text{kin}} \rangle \approx \frac{W_0}{2}\left(1 - \frac{P}{4} - \frac{W_0}{12}\right), \tag{16}$$

$$\langle W^d_{\text{pot}} \rangle \approx \frac{W_0}{2}\left(1 + \frac{P}{4} + \frac{W_0}{12}\right). \tag{17}$$

Графики зависимостей $\langle W_{\text{kin}} \rangle(P)$ и $\langle W^d_{\text{pot}} \rangle(P)$ приведены на рис. 1. Графики построены для случая $\hbar\omega_h/D = 0.1$, что соответствует величине $W_0 \approx 0.0498$.

Видно, что эти зависимости, являясь линейными, образуют „зеркальную“ систему. При любом значении силы $P \ll 1$ их сумма остается постоянной и равной исходной нулевой энергии осциллятора $W_0$, что следует из выражений (16) и (17). Таким образом, между средними значениями кинетической и потенциальной составляющих внутренней энергии происходит своеобразное „перераспределение“, что является следствием ангармоничности осциллятора.

Перейдем к изменениям в самой нулевой энергии осциллятора при нагружении.

Найденная выше средняя кинетическая энергия осциллятора (с ее зависимостью от нагрузки (16)), будучи кинетической составляющей внутренней энергии, является и кинетической составляющей нулевой энергии

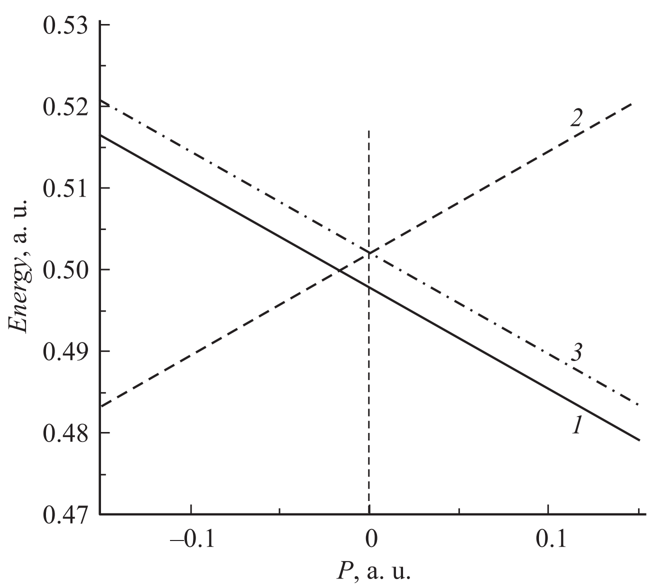


**Рис. 1.** Силовые зависимости средних значений кинетической *1* и потенциальных составляющих внутренней *2* и нулевой *3* энергий квантового ангармонического осциллятора при $T = 0$.

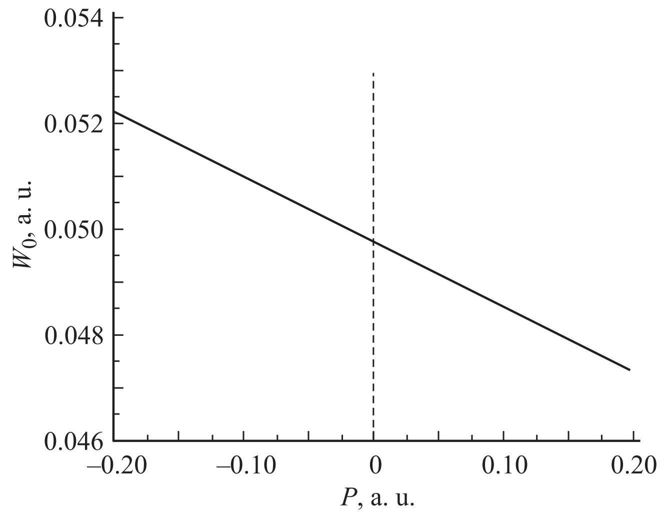


**Рис. 2.** Силовая зависимость нулевой энергии квантового ангармонического осциллятора.

$\langle W_{0\,\text{kin}} \rangle(P) \approx W_0(1 - P/4 - W_0/12)/2$. Потенциальная составляющая нулевой энергии является динамической частью полной потенциальной энергии — колебательной частью полной энергии и, как следует из (14), имеет вид:

$$\langle W_{0\,\text{pot}}(P) \rangle = \frac{1}{2} W_h\left(1 - \frac{P}{4}\right) \approx \frac{1}{2} W_0\left(1 - \frac{1}{4}P + \frac{1}{12}W_0\right). \tag{18}$$

Как видно из рис. 1 и как следует из (17), (18), силовые зависимости средних потенциальных составляющих нулевой и динамической внутренней энергии образуют еще одну зеркальную систему, что не удивительно, поскольку первая получается из второй вычитанием линейного члена $PW_0/4$. График силовой зависимости потенциальной части нулевой энергии (18) приведен на рис. 1.

Сама величина нулевой энергии может быть сконструирована суммированием ее кинетической (16) и потенциальной (18) составляющих:

$$W_0(P) = \langle W_{\text{kin}} \rangle(P) + W_{0\,\text{pot}}(P) \approx W_0 - \frac{1}{4}W_0 P. \tag{19}$$

Выражение (19) устанавливает силовую зависимость нулевой энергии ангармонического осциллятора.

График силовой зависимости нулевой энергии, демонстрирующий линейность $W_0(P)$, приведен на рис. 2.

Таким образом, детальный анализ энергетики квантового ангармонического осциллятора при $T = 0$ выявил:

— линейное по силе изменение (уменьшение при растягивающем напряжении и увеличение — при сжимающем) нулевой энергии осциллятора;

— линейное изменение того же характера по знаку средних значений кинетической и потенциальной составляющей нулевой энергии;

— взаимокомпенсирующее изменение средних значений кинетической и потенциальной составляющих динамической части внутренней энергии осциллятора.

### 2.2. Нагружение квантового осциллятора при высоких значениях температуры

Напомним, что в этих температурных условиях квантовые осцилляторы отвечают свойствам классических осцилляторов.

Условие высоких температур означает $\hbar\omega/2kT \ll 1$. Тогда $\mathrm{cth}(\hbar\omega/2kT) \approx 2kT/\hbar\omega$, $\langle x^2\rangle \approx kT/m\omega^2$ и в соответствии с (8) и (9) смещение $a \approx F/f + gkT/f^2$. Отсюда, согласно (10) и (11), получаем:

— для средней кинетической энергии

$$\langle E_{\mathrm{kin}}\rangle \approx \frac{1}{2}\,kT; \tag{20}$$

— для средней полной потенциальной энергии:

$$\langle U\rangle \approx \frac{1}{2}\,kT + \frac{g^2}{2f^3}\,(kT)^2 - \frac{F^2}{2f}. \tag{21}$$

Отметим, что формулы (20) и (21), полученные простым образом из теоремы вириала, совпадают с выражениями для $\langle E_{\mathrm{kin}}\rangle$ и $\langle U\rangle$, полученными путем достаточно сложного термодинамического анализа ансамбля нагруженных классических ангармонических осцилляторов [14].

Обозначим начальную (до нагружения) среднюю энергию в ансамбле осцилляторов: $\langle E_{\mathrm{beg}}\rangle$. Тогда из (20) и (21) при $F = 0$ следует:

$$\langle E_{\mathrm{beg}}\rangle \approx kT + \frac{g^2}{2f^3}\,(kT)^2. \tag{22}$$

Отсюда получаем для начальных средних в безразмерной форме:

$$\langle W_{\mathrm{kin}}\rangle \approx \frac{1}{2}\,\langle W_{\mathrm{beg}}\rangle\left(1 - \frac{1}{12}\,\langle W_{\mathrm{beg}}\rangle\right),$$

$$\langle W_{\mathrm{pot}}\rangle \approx \frac{1}{2}\,\langle W_{\mathrm{beg}}\rangle\left(1 + \frac{1}{12}\,\langle W_{\mathrm{beg}}\rangle\right). \tag{23}$$

Формулы (23) выражают характерные для ангармонических осцилляторов различия средних значений кинетической и потенциальной энергии в симметричной относительно $\langle W_{\mathrm{beg}}/2\rangle$ форме. Справедливость формул (23) подтверждена численным счетом [14].

Как видно из (20), зависимость $\langle E_{\mathrm{kin}}\rangle$ от нагружающей силы явно не видна. Эта зависимость заключается в зависимости температуры ансамбля осцилляторов от нагрузки. Термодинамический анализ ансамбля адиабатически нагружаемых ангармонических классических осцилляторов установил изменение температуры ансамбля с нагрузкой [14]:

$$T(P) \approx T_{\mathrm{beg}}\left(1 - \frac{P}{4}\right), \tag{24}$$

где $T_{\mathrm{beg}}$ — начальная (до нагружения) температура ансамбля.

Тогда из (10) и (11) с учетом (22) и (24) получаем силовые зависимости средних значений:

— для кинетической энергии

$$\langle W_{\mathrm{kin}}\rangle(P) \approx \frac{1}{2}\,\langle W_{\mathrm{beg}}\rangle\left(1 - \frac{1}{4}\,P - \frac{1}{12}\langle W_{\mathrm{beg}}\rangle\right),$$

— для полной потенциальной энергии

$$\langle W_{\mathrm{pot}}\rangle(P) \approx \left[\frac{1}{2}\,\langle W_{\mathrm{beg}}\rangle\left(1 + \frac{P}{4} + \frac{1}{12}\,\langle W_{\mathrm{beg}}\rangle\right) + \frac{3}{16}\,P^2\right] - \frac{3}{8}\,P^2 - \frac{1}{4}\,\langle W_{\mathrm{beg}}\rangle.$$

В квадратных скобках заключена потенциальная составляющая внутренней энергии осциллятора $\langle W_{\mathrm{pot}}^{\mathrm{int}}\rangle$ (аналогично (14) для квантового осциллятора).

Можно видеть, что выражения для силовых зависимостей кинетической и потенциальной составляющих энергии в ансамбле ангармонических классических осцилляторов сходны с выражениями для таких же составляющих в ансамбле квантовых осцилляторов при $T = 0$. При этом позицию средней начальной энергии возбуждения классического осциллятора $\langle W_{\mathrm{beg}}\rangle$ в квантовом осцилляторе занимает нулевая энергия $W_0$.

Детальный анализ энергетики адиабатически нагружаемого ангармонического классического осциллятора проведен в [2]. Установлены подобные квантовому случаю силовые зависимости: линейное изменение по силе колебательной энергии, взаимокомпенсирующие линейные изменения кинетической и динамической составляющей внутренней потенциальной энергии (перераспределение энергии).

Таким образом, ангармоничность осцилляторов определяет общие закономерности влияния нагружения на энергетику осцилляторов как квантовых, так и классических, заключающиеся в единообразном силовом изменении нулевой энергии квантового и колебательной энергии классического осциллятора, а также зависимостей от силы средних значений кинетической и потенциальной составляющих.

Теорема вириала создает возможность общей достаточно простой формы анализа нагружаемой нелинейной системы как в квантовых, так и в классических условиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-03-00148-а).

## Список литературы

[1] *Гиляров В.Л., Слуцкер А.И., Володин В.П., Лайус Л.А.* // ФТТ. 1997. Т. 39. Вып. 1. С. 153.

[2] *Слуцкер А.И., Гиляров В.Л., Лукьяненко А.И.* // ФТТ. 2006. Т. 48. Вып. 10. С. 1832.

[3] *Alvarez G., Howls C.J., Silverstone H.J.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2002. Vol. 35. N 18. P. 4017.

[4] *Amore P., Aranda A., De Pace A.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. Vol. 37. N 10. P. 3515.
[5] *Dusuel S., Uhrig G.S.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2004. Vol. 37. N 39. P. 9275.
[6] *Turbiner A.* // Lett. Meth. Phys. 2005. Vol. 74. N 2. P. 169.
[7] *Jafarpour M., Afshar D.J.* // J. Phys. A: Math. Gen. 2002. Vol. 35. N 1. P. 87.
[8] *Liverts E.Z., Mandelzweig B.* // Phys. Scr. 2008. Vol. 77. N 2. P. 025 003.
[9] *Розанов Н.Н., Смирнов В.А.* // Письма в ЖЭТФ. 1981. Т. 33. Вып. 10. С. 504.
[10] *Физическая энциклопедия*. М.: Сов. энциклопедия, 1988. Т. 1. С. 281.
[11] *Фейнман Р.* Статистическая механика. М.: Мир, 1978. С. 68.
[12] *Matsubara T., Kamiya K.* // Progr. Theor. Phys. 1987. Vol. 58. N 3. P. 767.
[13] *Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М.* Статистическая физика. М.: Наука, 1976. С. 107.
[14] *Гиляров В.Л., Слуцкер А.И., Володин В.П., Лайус Л.А.* // ФТТ. 1998. Т. 40. Вып. 8. С. 1548.